Ingegneria Biomedica
Esame di Geometria e Algebra Lineare
15 febbraio 2006

penalità

voto

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1. [8pt.] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z^4 + 3\,\overline{z}^2 = 0 \\ |e^{-iz}| \geq 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. **[8pt.]** Al variare del parametro reale β sia $f_\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \beta & \beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione di $ker(f_\beta)$ e $Im(f_\beta)$.

(ii) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema

$$f_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Si determini per quali valori di β il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore per f_β.

Esercizio 3. **[8pt.]** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per f.

Esercizio 4. **[8pt.]** Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\langle f(x), g(x)\rangle \ = \ (f(1) + f'(1))(g(1) + g'(1)).$$

(i) Determinare la matrice associata a $<\ ,\ >$ rispetto alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
(ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
(iii) Trovare una base ortogonale per $<\ ,\ >$.