

Ingegneria Biomedica  
Esame di Geometria e Algebra Lineare  
penalità 1 febbraio 2006

(Cognome)

(Nome)

(Numero di matricola)

**tempo a disposizione: 2 ore**

**Esercizio 1. [8pt.]** Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{iz-i} = i \\ |z| \leq 2\pi \end{cases}$$

**Esercizio 2.** [8pt.] Al variare del parametro reale  $\beta$  sia  $f_\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \beta & -1 & \beta \\ -\beta & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

(i) Al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  si determini la dimensione di  $\ker(f_\beta)$  e  $\text{Im}(f_\beta)$ .

(ii) Al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  si determini la dimensione dello spazio delle soluzioni

del sistema  $f_\beta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) Si determini per quali valori di  $\beta$  il vettore  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  è autovettore per  $f_\beta$ .

**Esercizio 3.** [8pt.] Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (i) Si determinino gli autovalori di  $f$  specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per  $f$ .

**Esercizio 4.** [8pt.] Sia  $V$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado  $\leq 3$  a coefficienti in  $\mathbb{R}$  che si annullano in 0 e sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  il prodotto scalare definito da

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- (i) Determinare la matrice associata a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  rispetto alla base  $\{x, x^2, x^3\}$ .
- (ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- (iii) Trovare, se esiste, una base ortonormale.