

penalità

Ingegneria Biomedica  
Esame di Geometria e Algebra Lineare  
22 febbraio 2005

voto

\_\_\_\_\_

(Cognome)

\_\_\_\_\_

(Nome)

\_\_\_\_\_

(Numero di matricola)

**tempo a disposizione: 2 ore**

**Esercizio 1.** [8pt.] Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{3z} + e^{z+2} = 0 \\ i(\bar{z} - z) > 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2.** [8pt.] Sia  $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (1-t)x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + tx_3 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare, al variare del parametro reale  $t$ ,  $\dim(\text{Ker}(f_t))$  e  $\dim(\text{Im}(f_t))$ ;
- (ii) per i valori di  $t$  tali che  $\text{Ker}(f_t) \neq \{0_V\}$ , trovare una base di  $\text{Ker}(f_t)$  e una base di  $\text{Im}(f_t)$ ;
- (iii) determinare, al variare dei parametri reali  $t, s$  la dimensione dello spazio delle soluzioni del

sistema  $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

**Esercizio 3.** [8pt.] Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) Si determinino gli autovalori di  $f$  specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.
- (ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per  $f$ .

**Esercizio 4.** [8pt.] Sia  $V \subset \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}\}$  lo spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$  generato dalle funzioni  $\{1, e^x, e^{-x}\}$  e sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  il prodotto scalare definito da

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$$

- (i) Rispetto alla base  $\{1, e^x, e^{-x}\}$  determinare la matrice associata a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
- (ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
- (iii) Trovare, se esiste, un vettore isotropo non nullo.
- (iv) Trovare, se esiste, una base ortonormale.