penalità

Ingegneria Biomedica
Esame di Geometria e Algebra Lineare

3 febbraio 2005

voto

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

tempo a disposizione: 2 ore

Esercizio 1. **[8pt.]** Si determinino le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{2z} = -3i \cdot e^{\overline{z}} \\ |z - \log 3| < 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. **[8pt.]** Sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ tx_1 + 2x_2 + tx_3 \\ tx_1 + 4x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Determinare, al variare del parametro reale t:

(i) $\dim(Ker(f_t))$ e $\dim(Im(f_t))$, e, per i valori di t tali che $Ker(f_t) \neq \{0_V\}$, una base di $Ker(f_t)$ e una base di $Im(f_t)$;

(ii) la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $f_t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. **[8pt.]** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Si determinino gli autovalori di f specificandone la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Si determinino la forma di Jordan e una base di Jordan per f.

Esercizio 4. **[8pt.]** Sia $V \subset \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ generato dalle funzioni $\{1, \sin x, \cos x\}$ e sia $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ il prodotto scalare definito da

$$\langle f(x), g(x) \rangle \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\ dx$$

(i) Rispetto alla base $\{1, \sin x, \cos x\}$ determinare la matrice assaciata a $<\ ,\ >$.
(ii) Dire se tale prodotto scalare è degenere o non degenere.
(iii) Trovare, se esiste, un vettore isotropo non nullo.
(iv) Trovare, se esiste, una base ortonormale.