Δίσκοι με ιμάντα βγαίνουν τσάρκα σε μη λείο επίπεδο….

Δύο λεπτοί δίσκοι ίδιας μάζας M = 1 kg και ίδιας ακτίνας R = 0,3 m έχουν χαραγμένη στην περιφέρειά τους λεπτό αυλάκι μέσα στο οποίο βρίσκεται μη ελαστικός ιμάντας μήκους L = (3,175 + 0,6π) m.

Ο ιμάντας είναι τεντωμένος μέσα στο αυλάκι κάθε δίσκου ίσα που εφάπτεται με το έδαφος χωρίς να ακουμπά (οριακά) σ’ αυτό. Η τριβή ανάμεσα στον ιμάντα και κάθε δίσκο είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην ολισθαίνει ο ιμάντας στα αυλάκια. Οι δίσκοι είναι ακίνητοι πάνω σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο συντελεστή τριβής μ = 0,25. Στο κέντρο του πρώτου δίσκου και την στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F_1 έτσι ώστε οι δύο δίσκοι να αρχίζουν να κυλίονται ετοιμαζόμενοι και οι δύο να ολισθήσουν πάνω στο οριζόντιο επίπεδο και ο ιμάντας να είναι συνεχώς τεντωμένος. Αν την χρονική στιγμή t = 1 s κοπεί ο ιμάντας, ενώ ο πρώτος δίσκος προσκρούσει ακαριαία πάνω σε κατακόρυφο ελαστικό τοίχο και ταυτόχρονα καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$. Να βρεθούν:

α. Το μήκος του λεπτού ιμάντα που είναι συνεχώς ακίνητο.

β. Την κοινή επιτάχυνση των κέντρων μάζας των δύο δίσκων μέχρι την στιγμή t = 1 s

γ. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$.

δ. Η χρονική στιγμή της κρούσης των δύο δίσκων

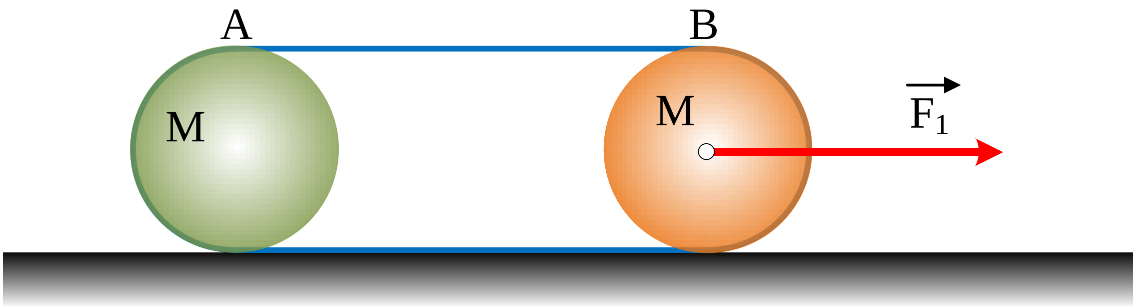
Δίνεται για τον κάθε δίσκο $I_{cm} = 0{,}5MR^2$ και για τις πράξεις σας να θεωρήσετε $g = 10\ m/s^2$.

Ο μη ελαστικός ιμάντας μετά την κοπή του δεν επηρεάζει πλέον την κίνηση των δύο δίσκων.

Επίσης να θεωρήσετε ότι $T_{στ,\,max} = T_{ολ}$.

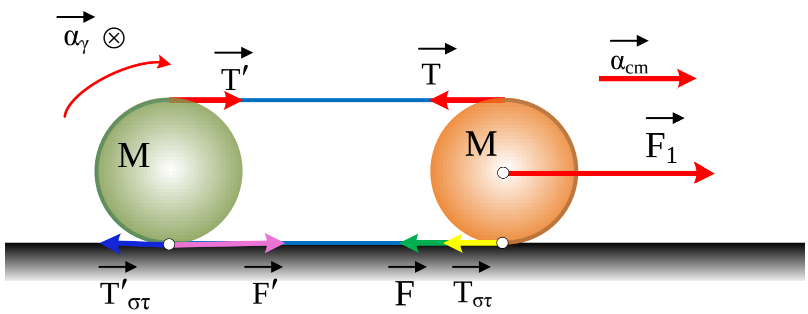
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α. Όλος ο ιμάντας που βρίσκεται στο έδαφος έχει συνεχώς μηδενική ταχύτητα. Η απόσταση του ιμάντα είναι η απόσταση ΑΒ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Όλο το μήκος του ιμάντα είναι $L = 2AB + 2\pi R \Rightarrow 3{,}175 + 0{,}6\pi = 2AB + 0{,}6\pi \Rightarrow$ $\mathbf{AB = 1{,}5875\,m}$

β. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στους δύο δίσκους στην διεύθυνση της κίνησης τους (οι δυνάμεις που είναι κάθετες στην κίνηση δεν έχουν σχεδιαστεί).



Οι δυνάμεις $\vec{T}, \vec{T'}$ και $\vec{F}, \vec{F'}$ έχουν ίσα μέτρα αφού ο ιμάντας είναι μη ελαστικός. Τα κέντρα μάζας των δύο δίσκων κινούνται με την ίδια επιτάχυνση και εφόσον οι δύο δίσκοι έχουν την ίδια ακτίνα θα έχουν και ίδια γωνιακή επιτάχυνση αφού για την κίνηση χωρίς ολίσθηση ισχύει $\alpha_{cm} = R\alpha_\gamma$.

Για κάθε δίσκο για τον κατακόρυφο άξονα ισχύει: $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N = Mg$

Επειδή οι δίσκοι είναι έτοιμοι να ολισθήσουν τότε $T_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau,max} = \mu N = \mu Mg \Rightarrow$ $\mathbf{T_{\sigma\tau} = 2{,}5\ N}$ (ίδια μέτρα και για τους δύο σύμφωνα με την εκφώνηση).

Με την βοήθεια των νόμων του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση θα έχουμε για το κάθε σώμα ξεχωριστά:

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma\vec{F}_1=M\alpha_{cm}\\ \Sigma\vec{\tau}_1=I\vec{\alpha}_\gamma\\ \Sigma\vec{F}_2=M\alpha_{cm}\\ \Sigma\vec{\tau}_1=I\vec{\alpha}_\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}F_1-T-F-T_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm}\\ FR+T_{\sigma\tau}R-TR=0,5MR^2\alpha_\gamma\\ T'+F'-T'_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm}\\ T'R-F'R+T'_{\sigma\tau}R=0,5MR^2\alpha_\gamma\end{array}\right\}\xrightarrow[\alpha_{cm}=R\alpha_\gamma,T_{\sigma\tau}=T'_{\sigma\tau}]{T=T',F=F'}\left.\begin{array}{rr}F_1-T-F-T_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm} & (1)\\ F+T_{\sigma\tau}-T=0,5M\alpha_{cm} & (2)\\ T+F-T_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm} & (3)\\ T-F+T_{\sigma\tau}=0,5M\alpha_{cm} & (4)\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[\tau\iota\varsigma(2),(4)]{\pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau o\upsilon\mu\varepsilon}2T_{\sigma\tau}=M\alpha_{cm}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_{cm}=5\frac{m}{s^2}}$$

γ. Με πρόσθεση των (3) και (4) προκύπτει: $2T = 1,5M\alpha_{cm} \Rightarrow$ **$T = 3,75$ N**

Με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει: $F_1 - 2T = 1,5M\alpha_{cm} \Rightarrow$ **$F_1 = 15$ N**

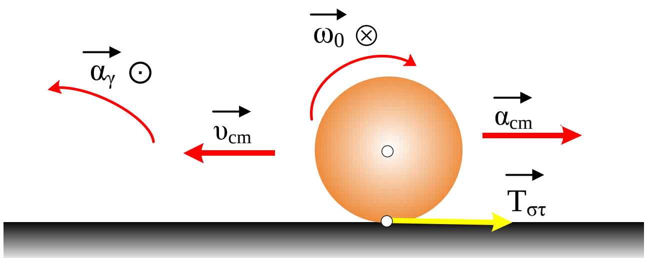
ή με πρόσθεση όλων προκύπτει: $F_1 = 3M\alpha_{cm} \Rightarrow$ **$F_1 = 15$ N**

δ. Τα κέντρα μάζας των δύο δίσκων την στιγμή της κρούσης του πρώτου δίσκου με τον κατακόρυφο τοίχο θα έχουν μέτρο $\upsilon_{cm,1} = \upsilon_{cm,2} = \upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t = 5$ m/s

Μετά την κρούση ο πρώτος δίσκος γυρίζει προς τα πίσω με την ίδια μέτρου ταχύτητα ενώ συνεχίζει να περιστρέφεται δεξιόστροφα ενώ ο δεύτερος δίσκος εκτελεί ομαλή στροφική και μεταφορική κίνηση.

Η κρούση των δύο δίσκων θα συμβεί όταν $S_1 + S_2 + 2R = AB$ δηλαδή όταν

$$(\upsilon_{cm}t-\frac{1}{2}\alpha t^2)+(\upsilon_{cm}t)+2R=AB \quad (5)$$ και υπό την προϋπόθεση ότι ο πρώτος δίσκος δεν έχει προλάβει να αρχίσει την καθαρή του κύλιση.



Για την μεταφορική κίνηση του πρώτου δίσκου από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F}=M\vec{\alpha}\Rightarrow T=M\alpha\Rightarrow \mu_{min}Mg=M\alpha\Rightarrow \boldsymbol{\alpha=2,5\frac{m}{s^2}}\ .$$

κάνοντας αντικατάσταση στην σχέση (5) θα έχουμε:

$$5t - 1,25t^2 + 5t + 0,6 = 1,5875 \Rightarrow 1,25t^2 - 10t + 0,9875 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 0,79 = 0$$

και με λύση αυτής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης θα βρούμε ότι θα χρειασθεί χρόνος t_1 = 0,1 s ή t_2 = 7,9 s μετά την κρούση του δίσκου με τον τοίχο για να συμβεί και η δεύτερη κρούση.

Για την πρώτη λύση προκύπτει $\upsilon = \upsilon'_{cm} - \alpha t \Rightarrow \upsilon = 5 - 2,5t$

άρα υ_1 = 4,75 m/s και για την δεύτερη λύση υ_2 = –14,75 m/s που απορρίπτεται γιατί για να συμβεί αυτό θα πρέπει εξαιτίας της τριβής ολίσθησης να αλλάξει κατεύθυνση κίνησης.

Πράγματι την χρονική στιγμή t_1 έχουμε: $\omega_0 = \frac{\upsilon_{cm}}{R} = \frac{50}{3}\frac{rad}{s}$ και $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{50}{3}\frac{rad}{s^2}$

$\omega = \omega_0 - \alpha_\gamma t \Rightarrow \omega = \frac{50}{3} - \frac{50}{3}\cdot 0,1 \Rightarrow \omega = 15\frac{rad}{s^2}$ αλλά $\upsilon_1 \neq \omega R$, οπότε ισχύει η υπόθεση.