

ΠΟΔΗΛΑΤΕΣ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΣΤΙΒΟ

Σ'ένα υποθετικά κυκλικό ποδηλατοδρόμιο οριζόντιο, τρέχουν αντίθετα των δεικτών ρολογιού δύο ποδηλάτες Α και Β σε κυκλικές τροχιές ακτίνων $R=60\text{m}$ και $2R$ αντίστοιχα, με σταθερού μέτρου ταχύτητες $v_1=3\pi\text{ m/s}$ ο Α και $v_2=2\pi\text{ m/s}$ ο Β.

Κάποια στιγμή που οι ποδηλάτες βρίσκονται σε θέσεις Β & Α τέτοιες που το ευθ/μο τμήμα ΒΑ να είναι ελάχιστου δυνατού μήκους, ενεργοποιούμε το χρονόμετρο και το σταματάμε

- 1) τη στιγμή που για πρώτη φορά θα βρεθούν σε θέσεις τέτοιες ώστε πάλι το ΒΑ να έχει ελάχιστο μήκος.
- 2) τη στιγμή που για πρώτη φορά θα βρεθούν σε θέσεις τέτοιες ώστε το ΒΑ να έχει μέγιστο μήκος.
- 3) τη στιγμή που για πρώτη φορά θα βρεθούν στις θέσεις που βρίσκονταν τη στιγμή που ενεργοποιήσαμε το χρονόμετρο

Ποια η ένδειξη του χρονόμετρου σε κάθε περίπτωση (1,2,3) και ποια η θέση των ποδηλατών Α και Β τότε (περιπτώσεις 1,2)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1) Ελάχιστο μήκος $BA=R$ οπότε η ΒΑ προεκτεινόμενη περνά από το κέντρο Ο. Όταν θα βρεθούν ξανά για πρώτη φορά σε ίδια κατάσταση ο ένας ποδηλάτης θα έχει κάνει ένα γύρο παραπάνω. Έτσι:

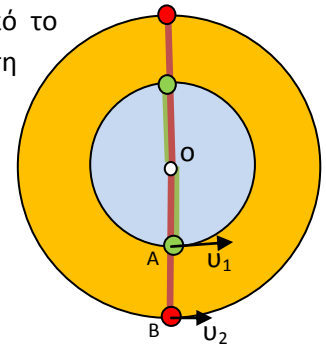
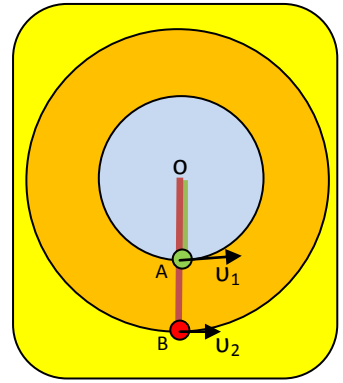
$$|\phi_1 - \phi_2| = 2\pi \Rightarrow |\omega_1 t - \omega_2 t| = 2\pi \Rightarrow \left| \frac{v_1}{R} t - \frac{v_2}{2R} t \right| = 2\pi \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\pi 2R}{|2v_1 - v_2|} = \frac{2\pi 2 \cdot 60}{2 \cdot 3\pi - 2\pi} \Rightarrow \boxed{t = 60\text{s}} \text{ (ένδαξη χρ/τρου)}$$

$$\text{Τότε: } \phi_1 = \omega_1 t = \frac{v_1}{R} t = \frac{3\pi}{60} 60 = 3\pi = 2\pi + \pi$$

$$\text{και } \phi_2 = \omega_2 t = \frac{v_2}{2R} t = \frac{2\pi}{2 \cdot 60} 60 = \pi$$

Ο Α λοιπόν διέγραψε ένα & μισό κύκλο ενώ ο Β μισό κύκλο και έτσι η τελική θέση φαίνεται στο σχήμα.



2) Μέγιστο μήκος $BA=R+2R=3R$ οπότε η ΒΑ περνά από το κέντρο Ο. Όταν θα βρεθούν λοιπόν για πρώτη φορά σε κατάσταση ώστε $BA=3R$ ο ένας ποδηλάτης θα έχει κάνει μισό γύρο παραπάνω. Έτσι:

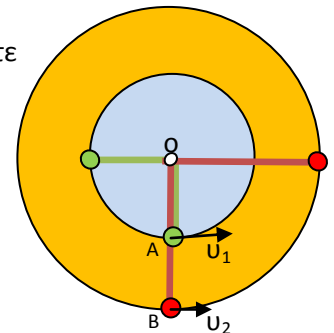
$$|\phi_1 - \phi_2| = \pi \Rightarrow |\omega_1 t - \omega_2 t| = \pi \Rightarrow \left| \frac{v_1}{R} t - \frac{v_2}{2R} t \right| = \pi \Rightarrow$$

$$t = \frac{\pi 2R}{|2v_1 - v_2|} = \frac{\pi 2 \cdot 60}{2 \cdot 3\pi - 2\pi} \Rightarrow \boxed{t = 30\text{s}}$$

$$\text{Τότε: } \phi_1 = \omega_1 t = \frac{v_1}{R} t = \frac{3\pi}{60} 30 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{και } \phi_2 = \omega_2 t = \frac{v_2}{2R} t = \frac{2\pi}{2 \cdot 60} 30 = \frac{\pi}{2}$$

Ο Α λοιπόν διέγραψε $\frac{3}{4}$ του κύκλου ενώ ο Β το $\frac{1}{4}$ του κύκλου και έτσι η τελική θέση φαίνεται στο σχήμα.



- 3) Όταν θα βρεθούν στην αρχική τους θέση και οι δύο θα έχουν διαγράψει ακέραιο πλήθος περιφερειών, έστω N_1 ο Α και N_2 ο Β. Τότε:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{N_1 2\pi}{N_2 2\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1 t}{\omega_2 t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{v_1}{R} t}{\frac{v_2}{2R} t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{2v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{2 \cdot 3\pi}{2\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{3}{1}$$

Άρα για πρώτη φορά βρίσκονται στην αρχική τους θέση όταν ο Α έχει κάνει $N_1=3$ στροφές και ο Β $N_2=1$ στροφή. Έτσι:

$$t = \frac{\phi_1}{\omega_1} = \frac{3 \cdot 2\pi}{\frac{v_1}{R}} = \frac{6\pi 60}{3\pi} = \boxed{120s} \quad \text{ή} \quad t = \frac{\phi_2}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{v_2}{2R}} = \frac{4\pi 60}{2\pi} = 120s$$

Παρατήρηση

1. Το κάθε ερώτημα απαντήθηκε αυτόνομα.

Εννοείται ότι το 3) προκύπτει με το αποτέλεσμα του 1) ερωτήματος καθ'όσον σε διπλάσιο χρόνο ($2 \cdot 60 = 120s$) ο Α θα έχει διαγράψει 3 κύκλους και ο Β 1 κύκλο οπότε θα βρεθούν στην αρχική τους θέση!

2. Το πρόβλημα αποτελεί μια παραλλαγή του γνωστού ρολογιού.

Είναι 12.00 μετά πόσο χρόνο α) ωροδείκτης και λεπτοδείκτης θα συμπίσουν για πρώτη φορά β) ωροδείκτης και λεπτοδείκτης θα έρθουν αντιδιαμετρικά (ή θα σχηματίζουν 180°) γ) θα συμπίσουν ξανά στο 12. Απλά εδώ γνωστές είναι οι περίοδοι αντί των v των άκρων των δεικτών και των μηκών τους.

Παντελεήμων Παπαδάκης

13^η - 2014