



**Universidad Nacional de Colombia**  
**Facultad de Ingeniería**

Deformaciones no Paramétricas 3D Aplicadas a  
la Morfometría de Estructuras Anatómicas

*Andrea del Pilar Rueda Olarte*

Director:

*Eduardo Romero Castro, Ph.D.*

Profesor Asociado, Dep. de Imágenes Diagnósticas  
Facultad de Medicina

Bogotá D.C., 19 de noviembre de 2006



# Agradecimientos

Inicialmente quiero expresar mi agradecimiento a mi director, el profesor Eduardo Romero, por todo su apoyo y confianza a lo largo del desarrollo de este trabajo. También por su paciencia cuando empecé con la fundamentación matemática del proyecto, y cuando me impacientaba porque los resultados no eran los esperados. Sus oportunos consejos me han ayudado muchísimo, tanto en el ámbito académico y profesional como en el personal.

También quiero agradecer a mis compañeros del grupo Biolngenium y del Centro de Telemedicina: Fabio, Juan Carlos, Javier, Gloria, Yuly, Julián, Camilo, Susana y demás. Sus comentarios, sugerencias, explicaciones y consejos fueron de gran ayuda para mí en todo momento.

Por último, quiero agradecer a mi familia, por su apoyo incondicional desde que decidí empezar con este proyecto y por comprenderme cuando no podía dedicarles tiempo por estar trabajando.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Morfometría de Estructuras 3D</b>	<b>4</b>
2.1. Morfometría basada en Superficies . . . . .	5
2.1.1. Morfometría Basada en Voxeles . . . . .	5
2.1.2. Morfometría Basada en Deformaciones . . . . .	6
2.1.3. Morfometría Basada en Tensores . . . . .	6
2.2. Caracterización de las Medidas Morfométricas . . . . .	7
2.3. Aplicaciones en Morfometría de Superficies . . . . .	8
<b>3. Modelos de Deformación de Superficies</b>	<b>9</b>
3.1. Modelos para Aplanar una Superficie . . . . .	10
3.2. Modelos para Alisar o Suavizar una Superficie . . . . .	13
3.3. Modelos de Mapeo de Superficies . . . . .	15
3.4. Modelos de Metamorfosis de Superficies . . . . .	17
3.5. Aplicaciones . . . . .	18
<b>4. Modelo Físico de Deformación</b>	<b>20</b>
4.1. Caracterización del Modelo . . . . .	20
4.2. Formulación del Modelo . . . . .	22
<b>5. Modelo Variacional de Deformación</b>	<b>25</b>
5.1. Caracterización del Modelo . . . . .	25
5.2. Formulación del Modelo . . . . .	26
<b>6. Prototipo de Visualización y Medición</b>	<b>29</b>
6.1. Metodología de Desarrollo . . . . .	29
6.2. Componentes . . . . .	30
6.2.1. Modelo Físico . . . . .	30
6.2.2. Modelo Variacional . . . . .	30

6.2.3. Cálculo de las Medidas . . . . .	30
6.3. Requerimientos de <i>Hardware</i> y <i>Software</i> . . . . .	30
<b>7. Pruebas y Validación</b>	<b>31</b>
7.1. Modelo Físico . . . . .	31
7.1.1. Modelo Físico sobre Curvas 2D . . . . .	31
7.1.2. Modelo Físico sobre Superficies 3D . . . . .	32
7.2. Modelo Variacional sobre Superficies 3D . . . . .	32
7.3. Pruebas de Usuario . . . . .	34
<b>8. Conclusiones</b>	<b>36</b>
8.1. Trabajo Futuro . . . . .	36
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

# Lista de Figuras

1.1. Representación 3D de la corteza cerebral, junto con la segmentación manual del lóbulo temporal en un corte coronal. La segmentación permite visualizar la intrincada geometría de las cisuras. . . . .	2
3.1. Clasificación somera de los métodos para deformar superficies	10
3.2. Esquematización del proceso de aplanado de una superficie 3D	11
3.3. Vistas del proceso de suavizado de una superficie . . . . .	14
3.4. Vista del mapeo de una superficie en una esfera . . . . .	16
3.5. Esquematización 2D del proceso de metamorfosis entre superficies . . . . .	17
4.1. Sección transversal de la membrana deformada . . . . .	21
5.1. Representación de la superficie de triangulación . . . . .	26
7.1. Curva sintética 2D construída para validar el método físico .	32
7.2. Resultado de la simulación del método físico sobre la curva sintética 2D . . . . .	33
7.3. Curva sintética 2D suavizada para validar el método físico . .	33
7.4. Resultado de la simulación del método físico sobre la curva sintética 2D suavizada . . . . .	34
7.5. Dos vistas de la superficie 3D sintética construída para validar el método variacional . . . . .	35
7.6. Resultado de la aplicación del método variacional sobre la superficie sintética 3D . . . . .	35

# Resumen

La visualización y análisis de las características funcionales y anatómicas de algunas estructuras se puede facilitar con modelos tridimensionales obtenidos por segmentación a partir de imágenes de tomografía o resonancia magnética. La determinación de longitudes y áreas en estas superficies puede dificultarse debido a la intrincada geometría de algunas estructuras anatómicas, como la corteza cerebral, órganos huecos como el colon, etc. Algunas aplicaciones en morfometría se simplifican si las mediciones se realizan sobre otra superficie más suave con una topología similar.

Este trabajo presenta un método novedoso cuyo objetivo es deformar una superficie 3D en otra de geometría más simple sin utilizar una parametrización y preservando la mayoría de las métricas, de forma que los análisis morfométricos que se le apliquen a la superficie simplificada arrojen resultados lo más realistas posible.

# Abstract

Visualization and analysis of functional and anatomical features in some structures can be facilitated with three-dimensional models obtained by segmentation from tomography or magnetic resonance images. Estimation of areas and lengths in these surfaces can become difficult due to the intricate geometry of some anatomical structures, like cerebral cortex, hollow organs like colon, etc. Some morphometry applications can be simplified if the measures are made on another smoother surface with similar topology.

This work presents a novel method whose objective is deform an 3D surface in another one of simpler geometry without using a parameterization and preserving most of the metrics, where the morphometric analyses applied to the simplified surface provides the most realistic results.

# Capítulo 1

## Introducción

La visualización y análisis de las características funcionales y anatómicas de algunas estructuras puede facilitarse mediante modelos tridimensionales obtenidos por segmentación a partir de imágenes de tomografía computarizada (*CT, Computer Tomography*) o resonancia magnética (*MR, Magnetic Resonance*). La determinación de longitudes y áreas en estas superficies se dificulta debido a la intrincada geometría de algunas estructuras anatómicas, como la corteza cerebral, órganos huecos como el colon, etc. En el caso de la corteza cerebral, la compleja e intrincada forma de algunas circunvoluciones y cisuras no permite calcular de manera exacta el valor de las áreas funcionales, tal como se muestra en la Figura 1.1. Sin embargo, algunas de estas aplicaciones morfométricas pueden simplificarse si las mediciones se realizan sobre otra superficie más suave con una topología similar y que conserve las métricas lo más posible.

Por otro lado, las deformaciones de superficies tridimensionales y sus aplicaciones han sido tema de estudio en los últimos 20 años. Los modelos deformables se aplican actualmente en diferentes áreas, para automatizar procesos tales como segmentación, registro, medición, ajuste, y otros relativos a imágenes médicas.

Básicamente, se denominan modelos deformables a aquellos en los que un contorno bidimensional o una superficie tridimensional se hacen evolucionar hasta que toman la forma de otro contorno o superficie objetivo. De acuerdo a lo presentado por Montagnat *et al.* en su revisión de los modelos deformables [52], los campos de acción en los cuales se aplican los modelos deformables cubren el reconocimiento de patrones [10–12], animación computarizada [8, 47], simulación de cirugías [7, 15], y la segmentación de imágenes [30, 37, 73], entre otras. También se utilizan diferentes representaciones

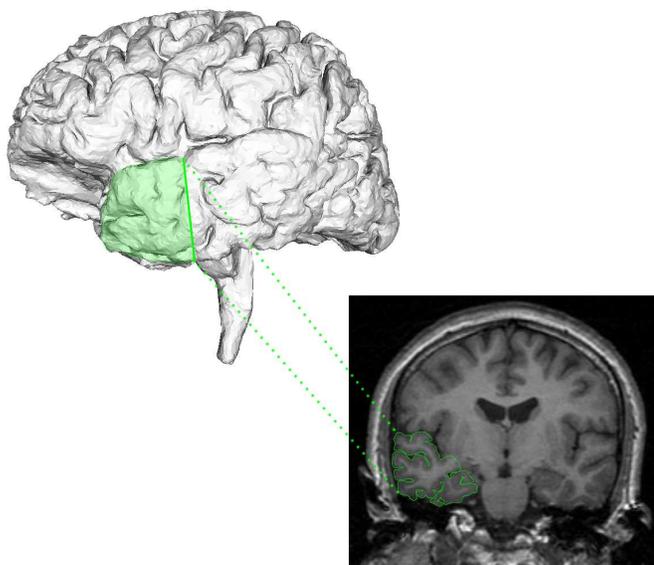


Figura 1.1: Representación 3D de la corteza cerebral, junto con la segmentación manual del lóbulo temporal en un corte coronal. La segmentación permite visualizar la intrincada geometría de las cisuras.

para generar desde líneas 3D deformables hasta volúmenes deformables. Los modelos deformables fueron introducidos por Kass *et al.* en 2D [42] y extendidos al caso 3D por Terzopoulos *et al.* [63]. Algunos de los modelos deformables reseñados por Montagnat *et al.*, como *level sets*, *spring-mass*, y modelos de elementos finitos; son también incluidos aquí junto con algunas otras aproximaciones relacionadas, y combinaciones de éstas.

## Estructura del Documento

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

- El **Capítulo 2: Morfometría de Estructuras 3D** presenta las características y algunos trabajos relacionados con la estimación de medidas en superficies 3D, enfatizando los casos donde el cálculo exacto de estas medidas no puede realizarse.
- El **Capítulo 3: Modelos de Deformación de Superficies** recopila los métodos más representativos utilizados para la deformación de superficies 3D, clasificándolos en cuatro grandes grupos: métodos para

aplanar (Sección 3.1), métodos para suavizar (Sección 3.2), métodos de mapeo (Sección 3.3) y métodos de metamorfosis entre superficies (Sección 3.4). También incluye las aplicaciones más relevantes de estos métodos en la Sección 3.5.

- El **Capítulo 4: Modelo Físico de Deformación** incluye la caracterización y formulación de un modelo físico para deformación de superficies con preservación de áreas.
- El **Capítulo 5: Modelo Variacional de Deformación** presenta la caracterización y formulación de un modelo variacional de deformación de superficies con preservación local de áreas.
- El **Capítulo 6: Prototipo de Visualización y Medición** describe el proceso de implementación de los modelos de deformación y del cálculo de medidas, y el desarrollo de la aplicación de visualización.
- El **Capítulo 7: Pruebas y Validación** presenta las actividades de validación, tanto de los modelos de deformación con respecto a la preservación de métricas, como de la aplicación de visualización con respecto a la facilidad de uso.
- Por último, el **Capítulo 8: Conclusiones** recopila las reflexiones sobre el trabajo realizado y delinea las posibles líneas de trabajo por explotar.

## Capítulo 2

# Morfometría de Estructuras 3D

En los últimos años la medicina ha sido invadida por avances tecnológicos que han cambiado de muchas maneras el ejercicio profesional. En particular, los recursos computacionales se han convertido en una importante herramienta en la toma de decisiones más acertadas acerca de la condición del paciente y de su tratamiento. Algunos tipos de imágenes médicas que se emplean en la actualidad permiten obtener representaciones bidimensionales y tridimensionales (conjuntos de *voxels*<sup>1</sup>, mallas poligonales, modelos paramétricos, superficies implícitas, etc.) de las estructuras anatómicas del paciente, con lo cual los médicos pueden estudiarlas con más comodidad y precisión, y diversos paquetes de *software* desarrollados en la actualidad permiten simular, por ejemplo, los efectos a largo plazo de un tratamiento o de una cirugía. Muchas herramientas proporcionan medidas más precisas, y son mucho más rápidas para efectuar análisis complejos.

La morfometría o biometría, es decir, el estudio cuantitativo de las estructuras anatómicas, es un elemento potencialmente importante en el diagnóstico, el pronóstico y el seguimiento de la condición de un paciente. Las mediciones sobre algún órgano, cuando se realizan, generalmente se hacen de forma manual, por lo cual son vulnerables a errores en la medición, y como consecuencia producen pérdida en la precisión y en la confiabilidad de la medida [22].

Existen paquetes de *software* que permiten realizar mediciones exactas sobre superficies lisas y sencillas; sin embargo, el realizar este tipo de me-

---

<sup>1</sup> *Volume elements*. Los voxels de una representación 3D son equivalentes a los pixeles de una imagen 2D.

diciones en superficies más complejas e intrincadas es más difícil, pues es necesario considerar factores tales como el cambio en los ángulos, en las curvaturas, etc. que determinan la precisión de las mediciones. Para resolver este problema, una aproximación posible es deformar la superficie inicial de forma que su geometría se simplifique, y poder aplicar los algoritmos de medición para superficies sencillas. Sin embargo, el proceso de deformación de estas superficies se puede hacer de diferentes maneras, tal como se presentará en las siguientes secciones. Un elemento adicional que se considera es la posibilidad de transformar una superficie en otra, con el objetivo de comparar las mediciones realizadas en cada una de ellas.

## **2.1. Morfometría basada en Superficies**

Una vez obtenida una representación simplificada de una superficie 3D, es importante revisar qué análisis pueden aplicarse sobre esta nueva superficie. Una de las aplicaciones más comunes en la medicina son los estudios morfométricos, es decir, la toma de medidas con el objeto de comparación con otros sujetos o con un atlas, o para observar los cambios producidos durante la evolución de la estructura anatómica. Estas mediciones permiten la detección de tumores y otras enfermedades que afecten la forma de las estructuras anatómicas.

De acuerdo a la investigación en morfometría realizada por Ashburner y presentada en el Capítulo 6 de [3], existen tres métodos morfométricos principales: la morfometría basada en deformaciones, la morfometría basada en tensores y la morfometría basada en voxeles. Cada método identifica elementos diferentes (diferencias anatómicas macroscópicas, diferencias estructurales en regiones y composición local, respectivamente) se aplican exclusivamente al cerebro y son utilizados para comparación entre pacientes.

### **2.1.1. Morfometría Basada en Voxeles**

El método de morfometría basado en voxeles es considerado el más simple dentro de la neuroanatomía computacional, únicamente requiere una comparación basada en voxeles de la concentración local de materia gris entre dos grupos de sujetos. Para que esta comparación entregue resultados lo más exactos posibles, se requiere una etapa de normalización espacial de todas las imágenes a un mismo espacio, luego se extrae de las imágenes la parte que corresponde a la materia gris y se aplica un filtro de suavizado, con lo cual pueden aplicarse análisis estadísticos para localizar y hacer inferencias acerca de las diferencias entre los grupos. El resultado obtenido es un mapa

paramétrico estadístico (SPM, *statistical parametric map*) que muestra las regiones donde la concentración de materia gris difiere de forma significativa entre los grupos.

### 2.1.2. Morfometría Basada en Deformaciones

La técnica de morfometría basada en deformaciones caracteriza las diferencias globales a nivel macroscópico (por ejemplo, cambios en el tamaño de los órganos o asimetrías) que complementan los resultados obtenidos con la morfometría basada en voxeles, permitiendo así la comparación de diferencias tanto a nivel macroscópico como a nivel mesoscópico (por ejemplo, displasia<sup>2</sup> de la corteza cerebral).

Inicialmente el método requiere la normalización espacial de todas las imágenes del conjunto de observación. Esta normalización se lleva a cabo utilizando una plantilla que servirá como imagen de referencia, y luego para cada imagen se genera un campo de vectores de deformación que mapean la imagen en la plantilla. Estos campos de deformación son comparados por medio de técnicas estadísticas multivariadas para estimar la naturaleza de las diferencias y para hacer inferencias sobre ellas. El resultado obtenido con esta técnica es un valor  $p$  relacionado con la significancia del efecto y uno o más vectores canónicos, o deformaciones, que caracterizan la naturaleza de las diferencias.

La morfometría basada en deformaciones generalmente requiere métodos de registro no rígido de imágenes, para realizar análisis de las relaciones espaciales entre estructuras anatómicas [58]. De esta manera, esta técnica puede ser aplicada para detectar cambios volumétricos en las superficies [13], utilizando el Jacobiano del campo de deformaciones. Este método presenta dos ventajas principales sobre la manera tradicional de medición de cambios en el volumen (volumetría basada en imágenes de resonancia magnética):

- No requiere de un conocimiento *a priori* de la región de interés para realizar los análisis morfométricos
- Incrementa la capacidad de detección de las regiones con cambios en el volumen dentro de los límites de precisión del algoritmo de registro

### 2.1.3. Morfometría Basada en Tensores

Con la utilización de los métodos de morfometría basados en tensores, se persigue localizar regiones que involucren cambios en la forma de las su-

---

<sup>2</sup>Transtorno del desarrollo de los tejidos que ocasiona malformaciones

perfiles entre grupos de imágenes, utilizando los campos de deformación calculados con la morfometría basada en deformaciones. Para analizar las formas locales, se utiliza la matriz Jacobiana del campo de deformación, que constituye el tensor de segundo orden relativo a las derivadas espaciales de la transformación, y contiene información acerca de los estiramientos (*stretching*), deformación lateral (*shearing*) y rotaciones aplicadas en la deformación.

Una forma simple de esta técnica constituye en comparar los volúmenes relativos de diferentes estructuras cerebrales, donde cada volumen se obtiene tomando el determinante de la matriz Jacobiana en cada punto. Utilizando técnicas estadísticas univariadas, es posible conocer si hay un aumento o disminución en el volumen.

Otra forma más potente de la morfometría basada en tensores es utilizada cuando es necesario analizar muchos sujetos en un mismo estudio. Extrayendo medidas de forma (como áreas, longitudes y volúmenes) de la matriz Jacobiana, y utilizando técnicas estadísticas multivariadas, es posible conocer si existen variaciones en las formas a lo largo de todo el estudio.

## 2.2. Caracterización de las Medidas Morfométricas

Las medidas morfométricas básicas que se pueden tomar sobre la superficie incluyen longitudes o distancias, áreas, ángulos, curvaturas, grosor, etc. Es necesario resaltar que la característica más importante que deben poseer los métodos de deformación de superficies es que la nueva representación simplificada preserve la mayoría de las métricas de la superficie 3D original, pues de otra forma no tendría gran aplicación. La superficie puede estar representada por una malla de triangulación, por voxeles, o por alguna otra estructura; y los métodos de medición son dependientes del tipo de estructura que se utilice.

En modelos poligonales, por ejemplo, una aproximación a la distancia entre dos puntos puede encontrarse sumando los valores de las aristas que los conectan; de forma similar el área de una región puede encontrarse sumando las áreas de los triángulos que se encuentran en ella. El problema se presenta cuando se requiere que estas áreas y distancias sean lo más exactas posibles, lo que requiere definir rutas que no caen totalmente sobre las aristas del modelo.

### 2.3. Aplicaciones en Morfometría de Superficies

Entre algunos desarrollos relacionados con este campo se encuentra la estimación de áreas basada en voxels, presentada por Windreich *et al.* en [71]. El método requiere dos pasos: detectar y delimitar la región de interés y luego estimar el área de la región. El usuario debe indicar algunos puntos que indican la región de interés, los cuales son conectados de acuerdo a la ruta más corta para delimitar la región. Luego, se aplica el estimador de área de Mullikin & Verbeek para aproximar el área de la región. Nótese que el estimar la ruta más corta entre cada par de puntos permite calcular también distancias entre éstos y podría obtenerse también el perímetro de la región de interés.

Otro trabajo relacionado es presentado por Chung *et al.* en [14]. En éste se presenta una aproximación estadística para realizar morfometría basada en superficies de la corteza cerebral. El cálculo de las medidas consideradas en este trabajo está basado en el tensor métrico de Riemann, el cual permite medir longitudes, áreas y ángulos, y cuyo diferencial permite estimar cambios en el área y en la curvatura de la superficie. Esta aproximación no requiere la definición de una región de interés.

## Capítulo 3

# Modelos de Deformación de Superficies

El problema de obtener una representación plana de una superficie curva, como por ejemplo una esfera, fue estudiado por Gauss hacia 1828, quien lo consideró un problema sin solución exacta debido a la diferencia entre las curvaturas Gaussianas de la superficie curvada y su representación en el plano. Sin embargo, hacia 1989, empezaron a publicarse las primeras soluciones aproximadas de este problema. La investigación en este campo continúa con mejores aproximaciones planares de las superficies 3D, mientras se han explorado además otras posibilidades, como suavizar la geometría de la superficie o obtener un mapeo entre los puntos de la superficie y otra más simple.

Los trabajos realizados por David Van Essen *et al.* [9, 17–21, 32, 39] y Bruce Fischl *et al.* [16, 23–25], aunque están enfocados hacia el estudio de la corteza cerebral, constituyen un buen ejemplo y son actualmente una referencia de los trabajos que se pueden realizar con los modelos de deformación basados en superficies. Sus artículos presentan desarrollos muy completos acerca de los tres tipos de modelos que se presentarán aquí (aplanamiento, suavizado y mapeo). Del mismo modo, se han elaborado herramientas de *software*, como **SureFit**<sup>1</sup>, **Caret**<sup>2</sup> y **SuMS**<sup>3</sup>, reseñadas en [20], las cuales permiten al usuario realizar diversos análisis sobre superficies de la corteza cerebral y aplicar operaciones como suavizado, transformaciones geométricas, proyecciones, aplanado y otras deformaciones.

---

<sup>1</sup><http://brainvis.wustl.edu/resources/surefitnew.html>

<sup>2</sup><http://brainmap.wustl.edu/resources/caretnew.html>

<sup>3</sup><http://sumsdb.wustl.edu:8081/sums/index.jsp>

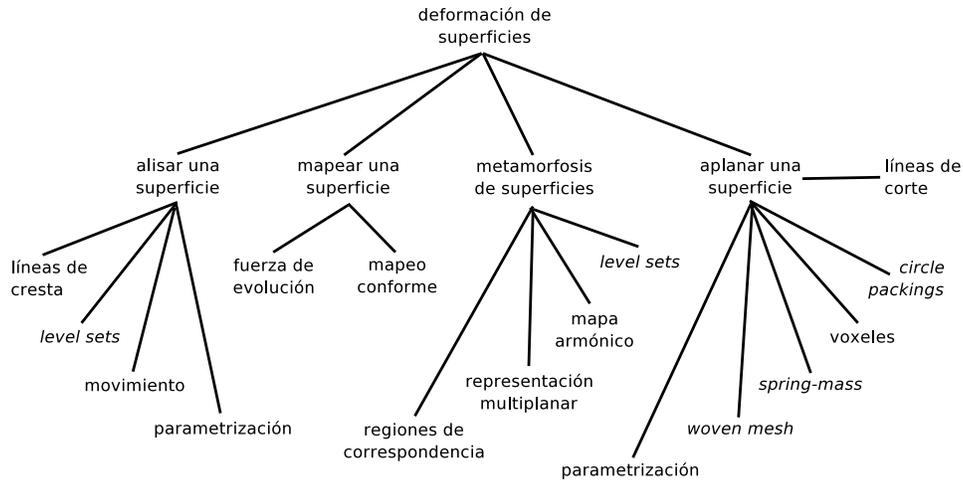


Figura 3.1: Clasificación somera de los métodos para deformar superficies

Los modelos para deformar superficies, reseñados en la literatura más reciente pueden ser clasificados en cuatro grandes grupos, como lo muestra la Figura 3.1. Los modelos que aplanan una superficie buscan obtener una representación en el plano euclidiano de la superficie 3D, insertando si es necesario líneas de corte que mejoren la proyección. Con los modelos que suavizan la geometría de la superficie se obtiene una representación alisada, que conserva la forma básica pero elimina los picos y valles demasiado pronunciados. Con la aplicación de los métodos de mapeo de superficies se busca proyectar los puntos de la superficie 3D en otra de geometría más simple (como una esfera). Por último, con los métodos de metamorfosis entre superficies se busca la transformación que permite deformar una superficie en otra y las superficies correspondientes a los pasos intermedios de la transformación.

### 3.1. Modelos para Aplanar una Superficie

Este es el primer problema que se consideró en deformación de superficies, dada su similitud con el problema de elaborar mapas, cuyo objetivo es el de obtener representaciones planas de una superficie curvada. La cantidad de puntos de la superficie original se conserva en la representación en el plano, pero las distancias, ángulos y áreas se afectan significativamente entre más compleja y curva sea la superficie. En esas situaciones se utilizan las

líneas de corte, que ayudan a corregir un poco la distorsión en las métricas. En la Figura 3.2 se presenta una superficie inicial y el resultado esperado de aplicar alguno de los métodos para aplanar superficies. En este caso particular, la superficie aplanada presenta triángulos superpuestos, por lo que se hace necesario insertar una línea de corte en la superficie para obtener una nueva representación plana más acertada de la superficie inicial.

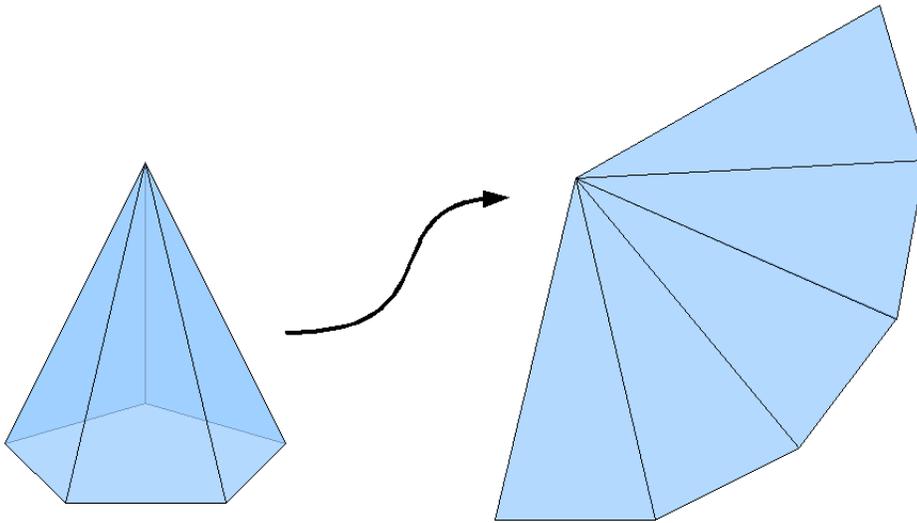


Figura 3.2: Esquemización del proceso de aplanado de una superficie 3D

La solución al problema de elaborar mapas presentada en [59] puede considerarse una aproximación muy primitiva pero válida por ser la pionera. Básicamente, se presentan los lineamientos de un algoritmo que permite alisar superficies no convexas, el cual se basa en calcular una matriz con las distancias entre los puntos de la superficie curva; luego, se determina un conjunto de puntos en el plano cuya matriz de distancias se ajuste a la calculada para la superficie inicial, usando el método del descenso del gradiente de Newton-Raphson y el algoritmo para calcular las distancias mínimas presentado en [72]. Junto con otros ajustes (como la cantidad de vecinos que se evalúan), la representación plana obtenida representa adecuadamente la forma alisada de la superficie original.

Más recientemente, se han presentado diferentes aproximaciones que resuelven de la forma más exacta posible el problema de aplanar una superficie:

- **Parametrización:** Floater presenta en [26] el desarrollo matemático necesario para elaborar una parametrización para una superficie de

triangulación de forma que la imagen obtenida sea una representación plana de esta superficie. Básicamente se hace una consideración sobre los vecinos en cada punto y se desarrollan tres diferentes parametrizaciones: uniforme, mínimos cuadrados ponderados y preservación de la forma, las cuales son comparadas al final para determinar la mejor aproximación.

- **Circle Packings:** El método de *Circle Packings* (empaquetar círculos) fue presentado inicialmente por Hurdal *et al.* en [36], y luego retomado y redefinido en [35] por los mismos autores. Aunque es un método que no preserva totalmente las métricas, se considera una aproximación discreta que permite generar representaciones planas de la superficie en el plano euclidiano y en el plano hiperbólico. Se trabaja sobre una malla de triangulación, se colocan círculos con centro en cada vértice de la malla, y el radio del círculo se va ajustando de acuerdo a una condición sobre la suma de los ángulos que se pueden construir en cada vértice. También se elaboró un paquete de *software*, `CirclePack`<sup>4</sup>, que implementa este método.
- **Basada en voxeles:** Dado que la representación general de las superficies 3D está basada en voxeles, Grossmann *et al.* [28] desarrollaron un método directo que opera sobre los voxeles de la superficie, el cual requiere de dos pasos: el cálculo de las distancias geodésicas mínimas entre los voxeles, y la búsqueda de una configuración de puntos en 2D cuyas distancias euclidianas aproximen lo más posible las distancias geodésicas entre los voxeles. El método es rápido pues no requiere el cálculo de una superficie de triangulación y conserva de forma aproximada las métricas globales.
- **Spring-Mass:** El método presentado por Wang *et al.* en [67] se enfoca en la aplicación de un modelo *spring-mass* (masas y conexiones) que se rige principalmente por la minimización de una función de energía y por términos que indican la precisión en la forma y en el área. Es un método relativamente rápido y generalmente requiere de pocas iteraciones para obtener buenos resultados. El modelo *spring-mass* es retomado y modificado por Li *et al.* en [49], incluyendo, además de las conexiones de tensión del modelo original, conexiones cruzadas que minimizan la distorsión de la representación resultante. La superficie se divide en cintas de triángulos que se van aplanando una a una, y

---

<sup>4</sup><http://www.math.utk.edu/~kens/DownLoad.html>

para eliminar las posibles superposiciones de triángulos se considera la energía global de relajación, un procedimiento local de corrección y algunas restricciones en la evolución.

- **Woven mesh:** El método más reciente, presentado por Wang *et al.* en [66], se basa en la construcción de una malla entrecruzada (*woven mesh*), utilizando dos tipos de mapeo: el de nodos de tensión, que va adicionando los nodos sobre dos rutas perpendiculares en la superficie; y el mapeo diagonal de nodos, que agrega los nodos ubicados en los cuadrantes. Luego se minimiza una función de energía que mide las deformaciones de longitud y área entre los nodos en la superficie y los nodos en la representación planar, lo que permite establecer una parametrización entre todos los puntos de cada una de las superficies.

Un elemento adicional que se considera en los modelos para aplanar una superficie 3D, es el de líneas de corte en una superficie con complejidad geométrica alta para garantizar que la representación plana corresponderá de mejor forma con la superficie inicial. En algunas aproximaciones iniciales, estas líneas de corte las podía estimar el usuario de forma manual. Ya más recientemente, Wang *et al.* presentan en [68] un método para automatizar esta labor, el cual evalúa en cada punto de la malla de triangulación la curvatura Gaussiana, y la utiliza como criterio para establecer la cantidad y longitud de las líneas de corte que deben aplicarse a la superficie. El proceso de aplanado se realiza por medio de un modelo *spring-mass* modificado.

## 3.2. Modelos para Alisar o Suavizar una Superficie

El proceso de suavizado puede generar una superficie con menos puntos, con lo que se reduce el espacio en disco que ocupa la representación y el tiempo de procesamiento de la misma. En la Figura 3.3 se presenta el resultado de alisar una representación 3D de la corteza cerebral.

Algunas de las aproximaciones más relevantes en este campo se presentan a continuación:

- **Parametrizaciones:** Un método de suavizado utilizando parametrizaciones relacionadas con multirresolución de mallas es presentado por Lee *et al.* en [46]. La idea básica es simplificar la malla de triangulación de forma iterativa utilizando mapas conformes, de forma que se establezca una jerarquía, y luego cada punto de la malla inicial se asocia con cada una de las diferentes resoluciones. Es una solución rápida y no restringe la topología de la malla.

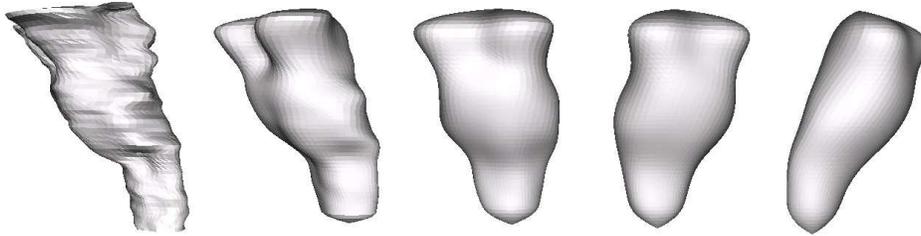


Figura 3.3: Vistas del proceso de suavizado de una superficie

En [60], Sheffer *et al.* se concentran en una parametrización que únicamente tiene en cuenta la preservación de los ángulos. Su argumento es que para preservar las características métricas únicamente se necesita que se mantenga el valor de los ángulos en cada iteración de la evolución de la superficie. Plantean un problema de minimización en término de los ángulos con restricciones que se van modificando si se observa que se generan intersecciones en la frontera. También puede aplicarse para generar múltiples resoluciones de la malla inicial.

Un tercer ejemplo de parametrización es introducido por Khodakovsky *et al.* en [43]. El proceso se basa en dividir la superficie en regiones triangulares y luego, para cada una de éstas, calcular el mapeo en el dominio de parámetros, cuya base es generada con la simplificación de la malla original por eliminación de vértices. El proceso considera la calidad de los triángulos y la distorsión métrica.

- **Level sets:** Hermosillo *et al.* presentan una aproximación al problema de suavizado empleando *level sets* en [33]. Se consideran las características que gobiernan el movimiento de la superficie de acuerdo a su curvatura media, en los casos de la preservación del área y la preservación del volumen; las cuales se integran a la formulación de *level sets* que aproxima estos movimientos. Adicionalmente, se determinan las condiciones que permiten mantener la correspondencia entre los puntos a lo largo de la evolución de la superficie.

La combinación de los modelos de *level sets* y la técnica de difusión anisotrópica para el suavizado de superficies es presentado por Tasdizen *et al.* en [62]. Se utilizan *level sets* con flujos de cuarto nivel, uno de los cuales es la difusión anisotrópica, representados con ecuaciones diferenciales parciales. El proceso consiste en resolver la difusión anisotrópica en el mapa normal de la superficie, y luego la superficie se deforma aplicando los *level sets* hasta que se ajusta a las normales

suavizadas. Se aplican conceptos de minimización del mapa normal de energía y reajuste de la superficie.

- **Estimación de la velocidad:** Pons *et al.* se enfocan en la preservación del área al suavizar una superficie en [56]. Su enfoque se basa en tomar un movimiento normal, dado por el usuario y el cual generalmente se basa en la curvatura media, y construir a partir de él una velocidad tangencial apropiada que preserve el área a medida que evoluciona la superficie. El método puede aplicarse en superficies de triangulación y en *level sets*, pero únicamente se presentan resultados con la implementación en *level sets*.
- **Líneas de cresta:** En [61], Stylianou *et al.* presentan la utilización de líneas de cresta para suavizar una superficie. El objetivo de establecer las líneas de cresta es que permiten particionar la superficie creando un diagrama geodésico de Voronoi, con el cual se puede implementar un algoritmo rápido de alisar superficies, el cual combina el mapeo baricéntrico de Tutte y las coordenadas de valor medio de Floater. Las líneas de cresta se calculan de acuerdo a una aproximación de la curvatura y a una esqueletización. La distorsión métrica introducida por este método parece ser mínima.

### 3.3. Modelos de Mapeo de Superficies

Los métodos que permiten mapear una superficie 3D en otra con las mismas características topológicas utilizan generalmente una esfera o una elipsoide como superficie objetivo. El que este método pueda utilizarse se justifica con la aplicación de la geometría de superficies de Riemann, con la que se puede afirmar que cualquier superficie sin hoyos o intersecciones consigo misma puede mapearse de forma conforme en una esfera, y cualquier porción de la superficie puede mapearse en un disco [31]. En la Figura 3.4 se presenta el resultado que se obtiene al aplicar uno de los métodos para mapear una superficie 3D (como la corteza cerebral) en otra superficie suave, en este caso una esfera.

El objetivo principal de estos métodos es determinar un mapa conforme entre la superficie y la esfera, pero varían las formas de llegar a este mapeo. Se pueden encontrar métodos que aplican elementos finitos para construir el mapa conforme, como el presentado por Haker *et al.* en [31], que adicionalmente considera la aplicación de texturas y la generación de mapas de coordenadas. En la misma línea, Angenent *et al.* presentan en [2] la aplica-

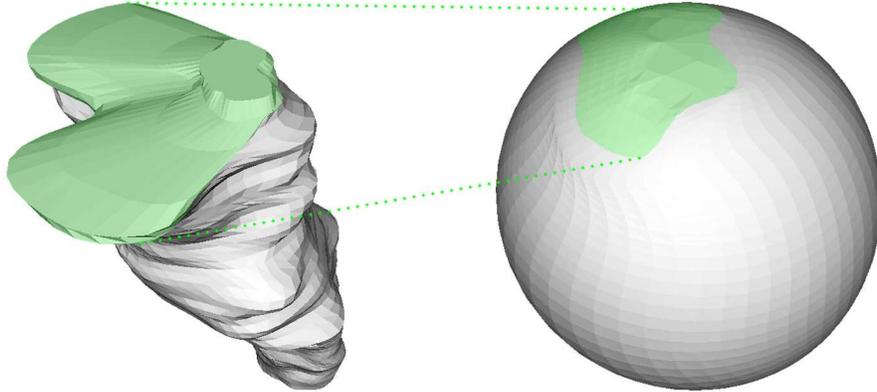


Figura 3.4: Vista del mapeo de una superficie en una esfera

ción del operador de Laplace-Beltrami<sup>5</sup> que, junto con la formulación por elementos finitos, permite construir el mapa conforme y mapear así la superficie en una esfera. Otra forma de construir un mapa conforme esférico es presentada por Ju *et al.* en [40], en donde se utiliza el mapeo conforme por mínimos cuadrados introducido por Levy *et al.* en [48], el cual no preserva muy bien las métricas pero invierte menos tiempo en los cálculos. Uno de los métodos más recientes para construir un mapa conforme único entre una superficie y una esfera es presentado por Wang *et al.* en [70], en donde se aplican los elementos de la geometría diferencial para construir un homeomorfismo entre las superficies y luego éste se deforma de forma que minimice la energía armónica.

Otra forma de obtener una representación esférica de una superficie 3D que es un poco más sencilla de formular, pero no ofrece tan buenos resultados de forma directa, es plantear una fuerza que mueva cada uno de los puntos de la superficie inicial hacia la superficie de la esfera. Fischl *et al.* presentan un método con esta característica en [23], y consideran, para cada punto y en cada iteración, una fuerza de suavizado y una fuerza radial. El método requiere de un paso posterior para uniformizar la densidad de puntos en la esfera.

---

<sup>5</sup>La generalización del operador de Laplace para superficies curvas.

### 3.4. Modelos de Metamorfosis de Superficies

A primera vista podría pensarse que la metamorfosis de superficies tiene muy poco en común con los demás métodos, sin embargo, podría funcionar de forma similar al método de mapeo en superficies más sencillas, tomando la superficie 3D inicial y la esfera o elipsoide (o alguna otra superficie suave) como la superficie objetivo. Una de las características de los demás métodos que no tienen los modelos de metamorfosis de superficies es la preservación de métricas, ya que no se aplican restricciones sobre la superficie inicial y la superficie objetivo. En la Figura 3.5 se presenta el resultado esperado al realizar la metamorfosis entre dos superficies.

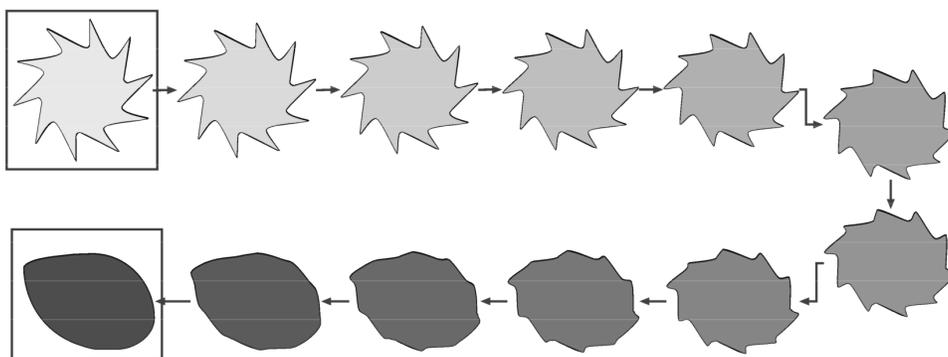


Figura 3.5: Esquematización 2D del proceso de metamorfosis entre superficies

Los métodos de metamorfosis entre superficies requieren en la mayoría de los casos la intervención del usuario para establecer algunos parámetros o elementos básicos necesarios para el proceso, de forma que son más propensos a errores. Sólo unos pocos son completamente automáticos.

Algunos desarrollos recientes en el área se presentan a continuación:

- Una transformación rápida entre superficies 2D o 3D es presentada por Kanai *et al.* en [41]. Esta aproximación se basa en la construcción de un mapa armónico entre las superficies y un disco unitario, que sirve para establecer la correspondencia uno-a-uno entre los puntos de las superficies. Requiere la intervención del usuario para definir una marca de posición en cada una de las superficies.
- Un elemento novedoso, denominado representación multiplanar, es introducido por Ramasubramanian *et al.* y aplicado a la transformación

entre superficies en [57]. La representación multiplanar toma una superficie 3D y construye un conjunto de planos 2D que la representan totalmente, con lo que es posible aplicar algoritmos de metamorfosis 2D. En cada plano se almacena un conjunto de superficies, determinadas por una parametrización basada en radios. Requiere que el usuario defina un eje, que afecta la cantidad de planos y la forma de las superficies; y algunas correspondencias entre los planos en caso de que no puedan ser determinadas por el algoritmo.

- Zockler *et al.* presentan en [76] un método de metamorfosis basado en regiones de correspondencia y puntos de ajuste, los cuales deben ser identificados completamente por el usuario en la etapa inicial. El algoritmo se encarga de establecer una parametrización entre cada par de regiones, de ajustarlas de acuerdo a los puntos puestos por el usuario y de generar las superficies intermedias de la transformación de acuerdo a una interpolación.
- Una aplicación del modelo de *level sets* 3D es presentada por Breen *et al.* en [6]. Se construye un *level set* que se ajusta a la superficie inicial y se deforma de forma progresiva, de acuerdo a la optimización de una función objetivo que actúa como medida de similaridad entre los objetos, hasta que alcanza la forma de la superficie final. Este método es completamente automático; sin embargo, no puede ser utilizado con superficies abiertas.
- En [64], Treece *et al.* presentan la extensión de un método de transformación 2D a la metamorfosis de superficies 3D, para lo cual utilizan volúmenes de distancias, representaciones en esferas y vectores de correspondencia entre esferas. Es un procedimiento algo complejo y requiere la intervención del usuario en cada etapa para determinar ciertos parámetros.

### 3.5. Aplicaciones

En la Sección 3.1 se menciona la primera aplicación de los modelos de deformación de superficies: elaborar un mapa a partir de una superficie curva como lo es el globo terráqueo. En la actualidad, las aplicaciones de este tipo de métodos abarcan campos muy variados, desde el diseño de prendas de vestir hasta la recreación de animaciones 3D; pero la mayoría de ellas están centradas en el campo de la medicina.

El diseño de prendas de vestir y de zapatos es una de las aplicaciones más directas de los métodos para aplanar superficies [4, 66, 67]. Se utiliza la representación tridimensional del cuerpo de la persona, sobre la cual se determina la superficie que cubrirá la prenda y luego ésta es extraída y aplanada, insertando las líneas de corte necesarias. Este modelo plano se imprime para luego cortar las telas y fabricar las prendas, que se ajustan perfectamente al cuerpo de la persona. El diseño de zapatos se realiza con un procedimiento similar.

Otro grupo de aplicaciones se relacionan directamente con el procesamiento de gráficas. Los métodos de metamorfosis entre superficies presentados en la Sección 3.4 pueden utilizarse para elaborar algunas animaciones y efectos especiales en las transiciones, las cuales son muy utilizadas en áreas como cine y televisión, publicidad y diseño gráfico. Los métodos para suavizar superficies presentados en [46] y [60] permiten obtener múltiples resoluciones de una malla poligonal, para facilitar el manejo de estas estructuras en tareas tales como almacenamiento, visualización, edición y transmisión. La adaptación de mapas de texturas a una superficie puede conseguirse utilizando los métodos de aplanado y de mapeo de superficies, tal como se presenta en [55].

El campo donde se concentran la mayor parte de las aplicaciones de los modelos de deformación de superficies es la medicina. En base a estos métodos se construyen paquetes de *software* que permiten a los profesionales de la salud analizar de una manera más precisa y segura las estructuras anatómicas de sus pacientes, así como establecer comparaciones entre ellas. Utilizando los métodos para aplanar superficies se pueden analizar vasos sanguíneos con el fin de detectar y visualizar patologías<sup>6</sup> y pólipos<sup>7</sup>, aplicación presentada por Zhu *et al.* en [75]; así como el interior del estómago, de acuerdo a lo presentado por Mori *et al.* en [53].

Dentro de la medicina, el área con mayor número de publicaciones sobre deformación de superficies es la relativa a las estructuras cerebrales, puesto que la corteza cerebral es considerada la superficie más compleja del cuerpo humano, en cuanto a geometría y topología se refiere. La aplicación de estos métodos permite la identificación de cambios en los surcos del cerebro debidos a tumores u otras patologías. También facilitan la visualización de las diferentes áreas funcionales del cerebro, así como la determinación de distancias y otras medidas.

---

<sup>6</sup>Estrechez de un conducto u orificio.

<sup>7</sup>Tumor benigno, blando, que se desarrolla en las cavidades de una mucosa.

## Capítulo 4

# Modelo Físico de Deformación

El modelo físico de deformación se formuló utilizando las ecuaciones que describen las tensiones de una membrana bajo escenarios de deformación, adaptándolas al caso particular.

### 4.1. Caracterización del Modelo

Se considera una membrana delgada estirada sobre un marco horizontal. Sobre la membrana se aplican ciertas deformaciones en sentido vertical, de forma que se presentan fuerzas en cada punto de la membrana debido a la tensión a la que está sometida. Esta *tensión superficial*  $\tau$  se define como la fuerza por unidad de longitud necesaria para mantener unidos los bordes de un corte que puede aplicarse sobre la superficie.

Si se considera únicamente una sección vertical de la membrana, aparecerá como una curva, tal como se muestra en la Figura 4.1, donde  $u$  corresponde al desplazamiento vertical con respecto a la posición normal.

Así, para un pedazo de la superficie de longitud  $\Delta x$  y ancho  $\Delta y$ , la fuerza a lo largo de la arista 1 es  $\tau_1 \Delta y$  con un ángulo  $\theta_1$ , y de manera similar para la arista 2. Así que la fuerza resultante es de la forma

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1 \quad (4.1)$$

Considerando únicamente pequeñas deformaciones de la membrana, es decir, pequeñas pendientes, es posible reemplazar  $\sin \theta$  por  $\tan \theta$ , que tam-

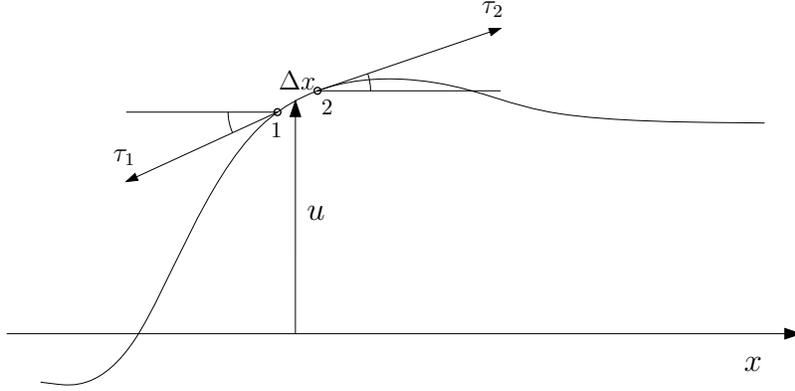


Figura 4.1: Sección transversal de la membrana deformada

bién puede reescribirse como  $\partial u / \partial x$ , de manera que la fuerza es entonces

$$\Delta F = \left[ \tau_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y$$

La cantidad entre paréntesis puede escribirse igualmente (para pequeños  $\Delta x$ ) como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x$$

con lo que la fuerza se expresa como

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y$$

Sobre los otros dos bordes del pedazo de superficie de longitud  $\Delta x$  y ancho  $\Delta y$ , habrá otra contribución a la fuerza resultante, de manera que la fuerza total sobre este trozo corresponde a

$$\Delta F = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y$$

La deformación de la membrana se debe a fuerzas externas.  $f$  representa la fuerza hacia arriba por unidad de área que ejercen sobre la membrana las fuerzas externas. Cuando la membrana está en equilibrio, esta fuerza debe equilibrarse con la fuerza interna (descrita por  $\Delta F$ )

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}$$

de manera que la fuerza total puede expresarse como

$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u)$$

donde  $\nabla$  corresponde al operador gradiente bidimensional  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ . Esta ecuación diferencial relaciona el cambio en la membrana  $u(x, y)$  con las fuerzas aplicadas  $f(x, y)$  y la tensión superficial  $\tau(x, y)$  que, en general, puede variar de un punto a otro sobre la membrana.

## 4.2. Formulación del Modelo

Para la aplicación específica de deformar la superficie (la membrana, en este caso particular) sin alterar de manera significativa los valores de áreas y longitudes, es imposible asumir que las deformaciones son pequeñas y suaves, puesto que en superficies tales como la corteza cerebral las cisuras y circunvoluciones corresponden a deformaciones bastante bruscas y abruptas. Teniendo en cuenta estas consideraciones, es necesario encontrar otros recursos para la simplificación de la Ecuación 4.1. Utilizando

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

se obtiene

$$\Delta F = \left[ \tau_2 \frac{\tan \theta_2}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_2}} - \tau_1 \frac{\tan \theta_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_1}} \right] \Delta y$$

Expresando  $\tan \theta$  como  $\partial u / \partial x$

$$\Delta F = \left[ \tau_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x}|_2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}|_2\right)^2}} - \tau_1 \frac{\frac{\partial u}{\partial x}|_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}|_1\right)^2}} \right] \Delta y$$

Para pequeños  $\Delta x$

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \right) \Delta x \Delta y$$

que también puede expresarse como

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right) \Delta x \Delta y \quad (4.2)$$

Esta expresión describe la fuerza interna del sistema, la cual es necesario equilibrar con las fuerzas externas, que producen las deformaciones en la membrana:

$$f = -\frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}$$

$$f = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right)$$

A  $f$  debe incorporarse la fuerza radial  $F_R = (R_k - x_k)$ , que conduce cada punto de la membrana hacia la superficie de una esfera de radio  $R$ .  $R_k$  corresponde a la proyección radial del punto  $x_k$  en la esfera de radio  $R$ .

$$f = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right) - F_R$$

Para describir la evolución de cada punto de la membrana de acuerdo a las fuerzas externas aplicadas, se utiliza la ecuación  $F = m a$ . En este caso, puede considerarse que todos los puntos tienen masa 1. De manera que la ecuación de fuerzas obtenida para el modelo de deformación es

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right) - F_R = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Reorganizando

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_R = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right)$$

Dado que  $(1 + x)^m \approx 1 + mx$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_R = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \frac{\partial u}{\partial x} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right)$$

Finalmente, la ecuación obtenida para modelar la deformación de la membrana (o de una superficie, en general) corresponde a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_R = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right] \right) \quad (4.3)$$

La tensión superficial  $\tau$  se modelará, en este caso, en función de la curvatura, puesto que en aquellos puntos donde la curvatura es más alta, se genera una tensión mayor que los hace retornar a su posición original. La curvatura en cada punto de la superficie se calcula con la siguiente fórmula

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Con este método se espera que aquellas métricas como áreas y longitudes se preserven en un alto grado en aquellos puntos donde la curvatura es mínima, debido a que la tensión depende directamente de la curvatura.

## Capítulo 5

# Modelo Variacional de Deformación

El modelo variacional considera las ecuaciones que describen la preservación local del área alrededor de cada punto de la superficie, y con ellas construye una expresión para el movimiento de evolución de estos puntos.

### 5.1. Caracterización del Modelo

El objetivo es plantear las ecuaciones de evolución de los  $N_V$  vértices  $x_i$  de una triangulación de una superficie cerrada que, conservando (lo más aproximadamente posible) el área de la triangulación, la hagan evolucionar a una forma esférica. Para esto, se tienen las siguientes consideraciones:

$$S(\vec{x}) = \text{const}$$

$$\dot{S}(\vec{x}) = 0$$

donde  $S$  corresponde a la superficie a deformar. Se exigirá en particular que un  $x_i$  dado evolucione durante el movimiento de manera que

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0$$

Esto asegura una “conservación local” del área alrededor de  $x_i$ .

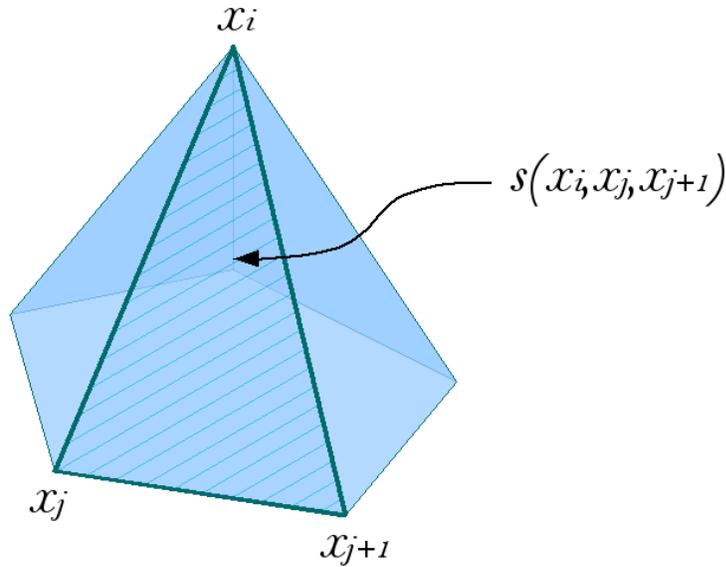


Figura 5.1: Representación de la superficie de triangulación

## 5.2. Formulación del Modelo

El área total se puede expresar como la suma

$$\sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) + S'(\vec{x}') = 0$$

donde  $s(x_i, x_j, x_{j+1})$  es el área de uno de los triángulos del abanico que tiene a  $x_i$  como vértice común y a los vecinos  $x_j, j = 1, \dots, N_i$  como vértices ordenados consecutivos (Figura 5.1).

Según esto, la derivada parcial de  $S$  respecto a  $x_i$  implica sólo derivar los sumandos  $s(x_i, x_j, x_{j+1})$ , de modo que la restricción para la constancia de la superficie se reduce a

$$\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

$$\dot{x}_i \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

Esta condición indica que el vector  $\dot{x}_i$  debe ser perpendicular al vector

$$k_i = \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) \quad (5.1)$$

De este modo, si para llevar un punto  $x_i$  de la forma original a la superficie de una esfera se propone una velocidad  $v_i$  (que depende de la distancia a la superficie de la esfera y, posiblemente, de la “suavidad” de la superficie), se tendrá que la ecuación

$$\dot{x} = v_i$$

se debe modificar a

$$\dot{x} = v_i - \frac{v_i \cdot k_i}{|k_i|^2} k_i \quad (5.2)$$

para que se conserve el área. Para el caso particular, la velocidad que lleva los puntos hacia la superficie de la esfera es la fuerza radial  $F_R = (R_k - x_k)$ .

**Observaciones:**

1. Si se plantea la velocidad  $v_i$  como de aproximación a la superficie de una esfera centrada en el origen de coordenadas, conviene tomar como origen el centro de masas de los  $x_i$  originales e incluir en  $v_i$  una velocidad  $v_{CM}$  de corrección del centro de masas en cada instante de tiempo, dada por

$$v_{CM} = -\frac{1}{N_V} \sum_i \left( v_i - \frac{v_i \cdot k_i}{|k_i|^2} k_i \right)$$

2. Lo habitual es que el área al final  $A_{end}$  de la iteración (básicamente, cuando  $\dot{x}_i \simeq 0$ , para todo  $i$ ) no sea exactamente igual al área inicial  $A_{init}$ , debido a limitaciones en el esquema de integración. Para corregirlo, dado que el centro de la esfera se sitúa en el origen, bastará reescalar todos los  $x_i$  obtenidos al final de la evolución por el factor

$$\sqrt{\frac{A_{init}}{A_{end}}}$$

**Cálculo del vector  $k_i$**

Para calcular el vector  $k_i$  se calculan los valores de las superficies que forma  $x_i$  con los sucesivos pares de vértices vecinos,  $x_j, x_{j+1}$ . La magnitud de dicha área viene dada por el módulo del producto vectorial

$$\vec{s}_{ij} = \frac{1}{2} (x_j - x_i) \times (x_{j+1} - x_i)$$

Dado que este módulo vale

$$|s_{ij}| = \frac{1}{2} |x_j - x_i| |x_{j+1} - x_i| \sin \theta_{i,j,j+1}$$

( $\theta_{i,j,j+1}$  es el ángulo que forman los dos vectores diferencia en el vértice  $x_i$ ) es fácil ver que su cuadrado está relacionado con el producto escalar por

$$|s_{ij}|^2 = \frac{1}{4}|x_j - x_i|^2|x_{j+1} - x_i|^2 \sin^2 \theta_{i,j,j+1} = \frac{1}{4}|x_j - x_i|^2|x_{j+1} - x_i|^2(1 - \cos^2 \theta_{i,j,j+1})$$

$$|s_{ij}|^2 = \frac{1}{4} \{ |x_j - x_i|^2|x_{j+1} - x_i|^2 - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_i)]^2 \}$$

Esta expresión, derivada respecto a  $x_i$  da

$$\begin{aligned} \nabla |s_{ij}|^2 = -\frac{1}{2} \{ & |x_{j+1} - x_i|^2(x_j - x_i) \\ & + |x_j - x_i|^2(x_{j+1} - x_i) \\ & - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_i)](x_j - x_i) \\ & - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_i)](x_{j+1} - x_i) \} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $|x_j - x_i|^2 = (x_j - x_i) \cdot (x_j - x_i)$ , agrupando los términos en  $(x_j - x_i)$  y los análogos en  $(x_{j+1} - x_i)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla |s_{ij}|^2 = -\frac{1}{2} \{ & [(x_{j+1} - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_j)](x_j - x_i) \\ & + [(x_j - x_i) \cdot (x_j - x_{j+1})](x_{j+1} - x_i) \} \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la derivada respecto a  $x_i$  de  $|s_{ij}|$  valdrá

$$2|s_{ij}|\nabla |s_{ij}| = \nabla |s_{ij}|^2$$

$$\begin{aligned} \nabla |s_{ij}| = -\frac{1}{4|s_{ij}|} \{ & [(x_{j+1} - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_j)](x_j - x_i) \\ & + [(x_j - x_i) \cdot (x_j - x_{j+1})](x_{j+1} - x_i) \} \end{aligned}$$

El vector  $k_i$  tendrá, entonces, la expresión

$$k_i = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{[(x_{j+1} - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_j)](x_j - x_i) + [(x_j - x_i) \cdot (x_j - x_{j+1})](x_{j+1} - x_i)}{\sqrt{|x_j - x_i|^2|x_{j+1} - x_i|^2 - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_i)]^2}}$$

que todavía se puede simplificar más, escribiéndolo como

$$k_i = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{[(x_{j+1} - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_j)]x_j - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_j)]x_{j+1} - |x_{j+1} - x_j|^2 x_i}{\sqrt{|x_j - x_i|^2|x_{j+1} - x_i|^2 - [(x_j - x_i) \cdot (x_{j+1} - x_i)]^2}}$$

## Capítulo 6

# Prototipo de Visualización y Medición

### 6.1. Metodología de Desarrollo

Se requiere el desarrollo de una aplicación que permita la visualización de la superficie 3D y del proceso de deformación de la misma, y que además ofrezca al usuario la funcionalidad para el cálculo del conjunto de métricas. La metodología de desarrollo de *software* escogida para la implementación de esta herramienta es la construcción de prototipos de forma evolutiva, con el fin de que, en cada etapa del proyecto, el aplicativo provea la funcionalidad básica para la validación y pruebas.

La metodología contempla una etapa de inicialización, donde se definen los objetivos que se piensan cumplir en cada iteración. Luego, se realiza la parte iterativa, en donde, de acuerdo a los objetivos trazados, se hace la planeación, análisis, diseño e implementación. Al terminar estas tareas, se hacen evaluaciones y pruebas para determinar si los objetivos se cumplieron. Luego, las dos etapas se repiten, hasta que el producto final cumple todas las especificaciones y satisface los requerimientos del usuario. Para esto, generalmente se mantiene una lista de control donde se especifican todas las tareas que deben ser realizadas.

## 6.2. Componentes

### 6.2.1. Modelo Físico

### 6.2.2. Modelo Variacional

### 6.2.3. Cálculo de las Medidas

## 6.3. Requerimientos de *Hardware* y *Software*

El desarrollo de la aplicación requiere una librería para visualizar e interactuar con las superficies tridimensionales, como VTK (*Visualization ToolKit*) o JOGL (*Java bindings for OpenGL*). También se requiere una librería para elaborar la interfaz de usuario, con VTK es posible utilizar *WxWidgets* o *Java* (dependiendo de la versión de VTK que se utilice), con JOGL sólo es posible utilizar *Java*.

En cuanto a los requerimientos de *hardware*, para la correcta visualización de las superficies 3D y una interacción más rápida, se requiere una tarjeta de video con mínimo 128MB de memoria independiente.

## Capítulo 7

# Pruebas y Validación

Para verificar el comportamiento de los modelos planteados con respecto a la restricción de conservación de áreas y longitudes, es necesario utilizar curvas y superficies *phantom* o sintéticas, elaboradas manualmente para explorar los aspectos de cada uno de los métodos.

### 7.1. Modelo Físico

El modelo construido con base en consideraciones físicas puede validarse tanto sobre curvas 2D como utilizando superficies 3D. Para la simulación de su comportamiento, requiere la aplicación de un método de integración para las derivadas temporales y espaciales. Inicialmente, se ha considerado utilizar el método de Runge-Kutta de orden 4, pero también pueden aplicarse esquemas de integración tales como diferencias finitas.

El resultado esperado de las simulaciones utilizando el método físico es que tanto las curvas 2D como las superficies 3D se desplieguen suavemente hasta suavizar y aplanar lo más posible los plegamientos que éstos puedan presentar.

#### 7.1.1. Modelo Físico sobre Curvas 2D

Para la simulación del modelo físico sobre curvas 2D, se construyó una curva sintética que representa la forma de las cisuras en la corteza cerebral. Se utilizaron funciones cuadráticas por trozos para crear esta curva, la cual presenta una singularidad en el centro, tal y como se muestra en la Figura 7.1.

Utilizando un tamaño de paso de 0.1 y 20 iteraciones, la simulación del

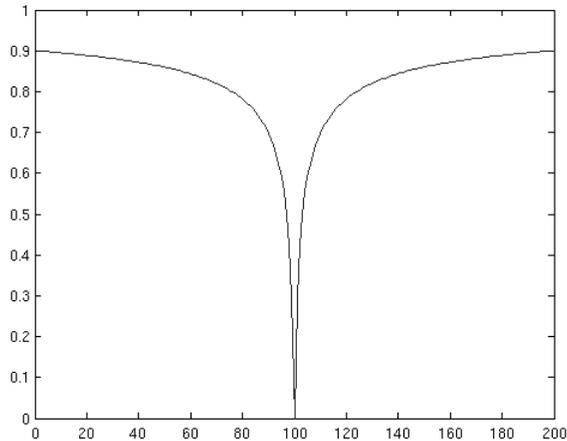


Figura 7.1: Curva sintética 2D construída para validar el método físico

método físico sobre esta curva sintética arrojó el resultado presentado en la Figura 7.2. El método tiende a oscilar bastante sobre el punto de inflexión de la curva, mientras que el resto no cambia a lo largo de las iteraciones.

Dado que el punto de inflexión presenta problemas en la simulación, se construyó otra curva sintética de forma similar a la primera, pero suavizada para eliminar la singularidad, como se muestra en la Figura 7.3.

Utilizando los mismos parámetros para la simulación (tamaño de paso 0.1, 20 iteraciones), pero utilizando la curva 2D suavizada, se obtuvieron los resultados presentados en la Figura 7.4. Aunque ya no se presentan las oscilaciones en el centro de la curva, de todas maneras la curva se mantiene invariante a lo largo de las iteraciones. Esto no corresponde al resultado esperado, en donde la curva debería desplegarse y evolucionar hacia una línea recta.

### 7.1.2. Modelo Físico sobre Superficies 3D

## 7.2. Modelo Variacional sobre Superficies 3D

El modelo variacional, dado que está formulado con base en la preservación local de las áreas, únicamente puede simularse sobre superficies 3D. Para esto, la posición de cada uno de los puntos se actualiza iteración tras iteración utilizando la velocidad de evolución planteada en la Ecuación 5.2, la cual incluye la fuerza radial como parte de la velocidad de aproximación a la esfera.

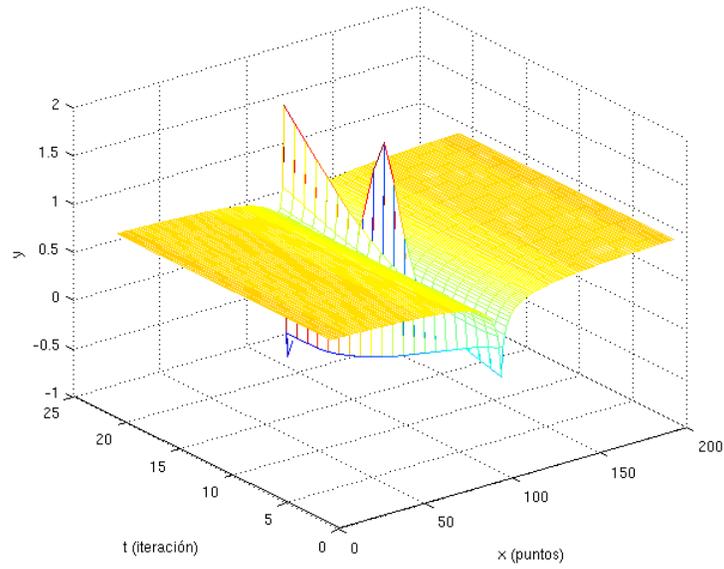


Figura 7.2: Resultado de la simulación del método físico sobre la curva sintética 2D

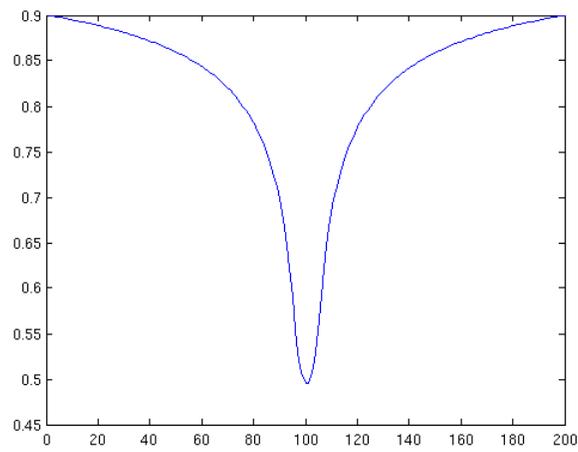


Figura 7.3: Curva sintética 2D suavizada para validar el método físico

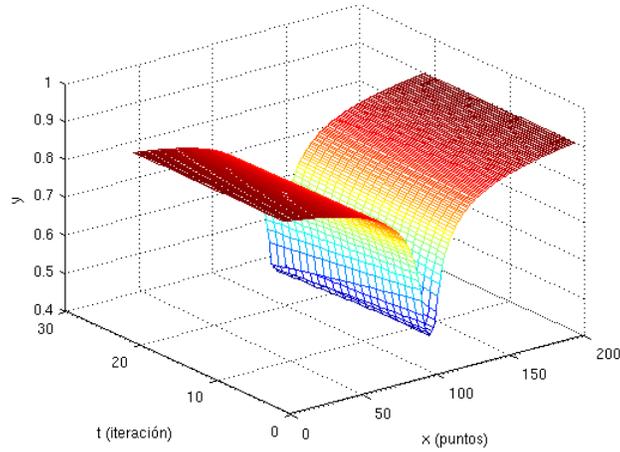


Figura 7.4: Resultado de la simulación del método físico sobre la curva sintética 2D suavizada

La superficie sintética que se construyó simula una esfera con una abolladura, y se obtuvo utilizando dos esferas, una más grande que la otra, y aplicando una operación de diferencia, de manera que a la esfera grande se le quitó una parte de la esfera pequeña. En la Figura 7.5 pueden apreciarse dos vistas de la superficie sintética construída.

La ecuación de actualización de la velocidad se aplicó de forma iterativa a esta superficie sintética, hasta que la superficie convergió completamente a una esfera. Los triángulos que correspondían a la abolladura variaron en tamaño y forma, pero el área local se conservó casi que totalmente. La Figura 7.6 presenta algunas imágenes de la secuencia de evolución de la superficie sintética.

### 7.3. Pruebas de Usuario

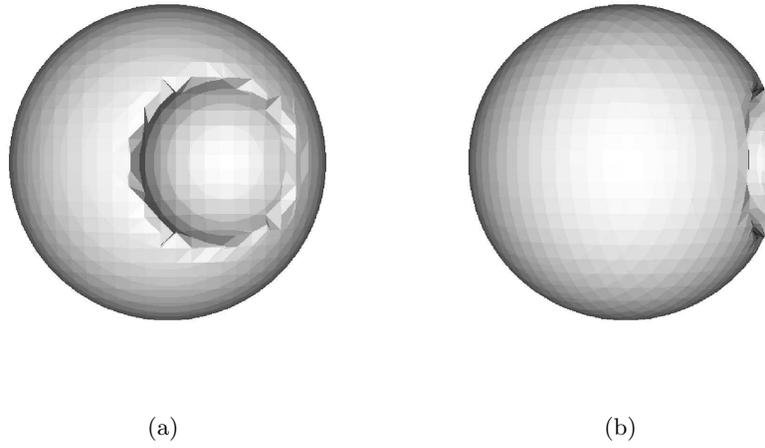


Figura 7.5: Dos vistas de la superficie 3D sintética construída para validar el método variacional

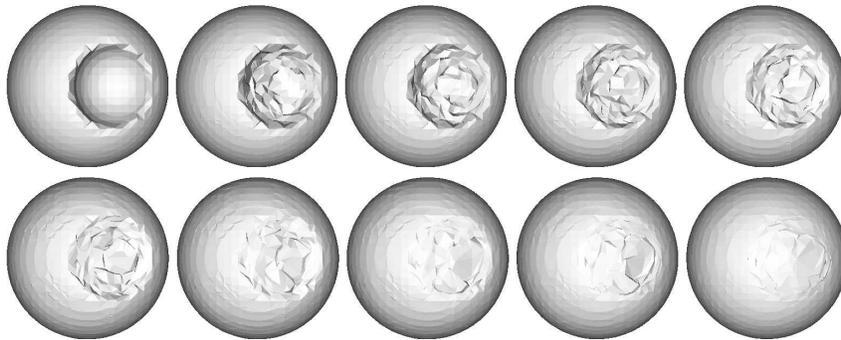


Figura 7.6: Resultado de la aplicación del método variacional sobre la superficie sintética 3D

## Capítulo 8

# Conclusiones

Los métodos para deformar superficies constituyen una herramienta muy valiosa al momento de simplificar análisis y procesamientos en diferentes disciplinas, como la computación gráfica, el diseño gráfico y de modas, entre otras. El área en la que se han aplicado la mayoría de modelos de deformación de superficies es la medicina, en donde se facilita la visualización de las características estructurales y funcionales de los volúmenes anatómicos construidos a partir de pilas de imágenes médicas. Los análisis que pueden realizarse sobre estas superficies son más precisos y proveen información adicional sobre la condición del paciente.

Existen diferentes clases de deformaciones de superficies: aplanado, alisado, mapeo y metamorfosis; bajo las cuales se pueden agrupar los métodos publicados más recientemente. Las características particulares de cada método pueden hacerlo menos adecuado para ciertos tipos de problemas, pero gracias a la diversidad de modelos planteados hasta ahora es posible encontrar alguno con el que se obtengan resultados satisfactorios.

Enfocándose en el problema particular de morfometría de estructuras anatómicas, se concluye que el grupo de métodos menos aplicable es el de metamorfosis de superficies, ya que no garantiza la preservación de métricas, la cual es una condición necesaria para asegurar la precisión en los análisis morfométricos.

### 8.1. Trabajo Futuro

Trabajos futuros en esta área incluyen determinar si la combinación de dos o más de estos métodos influye positivamente en la preservación de métricas, desarrollar métodos adaptativos de acuerdo a la complejidad de

pequeñas áreas de la superficie y estudiar la aplicabilidad de un modelo basado en el centro de masa y los vectores normales, entre otros.

# Bibliografía

- [1] S. Angenent, Steven Haker, Allen Tannenbaum, and Ron Kikinis. On area preserving mappings of minimal distortion. 1999.
- [2] Sigurd Angenent, Steven Haker, Allen Tannenbaum, and Ron Kikinis. On the Laplace-Beltrami operator and brain surface flattening. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18:700–711, 1999.
- [3] John Ashburner. *Computational Neuroanatomy*. PhD thesis, University College London, 2000.
- [4] P.N. Azariadis and N.A. Aspragathos. Geodesic curvature preservation in surface flattening through constrained global optimization. *Computer-Aided Design*, 33:581–591, 2001.
- [5] J. P. A. Baak and J. Oort. *A Manual of Morphometry in Diagnostic Pathology*. Springer, 1983.
- [6] David E. Breen and Ross T. Whitaker. A level-set approach for the metamorphosis of solid models. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 7:173–192, 2001.
- [7] Morten Bro-Nielsen and Stephane Cotin. Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation. *Computer Graphics Forum*, 15(3):57–66, 1996.
- [8] M. Cani-Gascuel and M. Desbrun. Animation of deformable models using implicit surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3:39–50, 1997.
- [9] G.J. Carman, H.A. Drury, and D.C. Van Essen. Computational methods for reconstructing and unfolding the cerebral cortex. *Cerebral Cortex*, 5:506–517, 1995.
- [10] K. Cheung, D. Yeung, and R. Chin. A unified framework for handwritten character recognition using deformable models. volume I, pages 344–348, 1995.
- [11] Kwok-Wai Cheung, Dit-Yan Yeung, and Roland T. Chin. A bayesian framework for deformable pattern recognition with application to handwritten character recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 20:1382–1388, 1998.
- [12] Kwok-Wai Cheung, Dit-Yan Yeung, and Roland T. Chin. On deformable models for visual pattern recognition. *Pattern Recognition*, 35:1507–1526, 2002.
- [13] M. K. Chung, K. J. Worsley, T. Paus, C. Cherif, D. L. Collins, J.Ñ. Giedd, J. L. Rapoport, and A. C. Evans. A unified statistical approach to deformation-based morphometry. *NeuroImage*, 14:595–606, 2001.

- [14] Moo K. Chung, Keith J. Worsley, Steve Robbins, Tomás Paus, Jonathan Taylor, JayÑ. Giedd, Judith L. Rapoport, and Alan C. Evans. Deformation-based surface morphometry applied to gray matter deformation. *NeuroImage*, 18:198–213, 2003.
- [15] Steven Cover, Norberto Ezquerra, James O’Brien, Richard Rowe, Thomas Gadacz, and Ellen Palm. Interactively deformable models for surgery simulation. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 13(6):68–75, 1993.
- [16] Anders M. Dale, Bruce Fischl, and Martin I. Sereno. Cortical surface-based analysis I: Segmentation and surface reconstruction. *NeuroImage*, 9:179–194, 1999.
- [17] H.A. Drury, M. Corbetta, G. Shulman, and D.C. Van Essen. Mapping fMRI activation data onto a cortical atlas using surface-based deformation. *NeuroImage*, 7:S728, 1998.
- [18] H.A. Drury, D.C. Van Essen, C.H. Anderson, C.W. Lee, T.A. Coogan, and J.W. Lewis. Computerized mappings of the cerebral cortex: a multiresolution flattening method and a surface-based coordinate system. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 1:1–28, 1996.
- [19] D. C. Van Essen and H. A. Drury. Structural and functional analyses of human cerebral cortex using a surface-based atlas. *The Journal of Neuroscience*, 17:7079–7102, 1997.
- [20] David C. Van Essen, Heather A. Drury, James Dickson, John Harwell, Donna Hanlon, and Charles H. Anderson. An integrated software suite for surface-based analyses of cerebral cortex. *Journal of the American Medical Informatics Association*, 8:443–459, 2001.
- [21] David C. Van Essen, Heather A. Drury, Sarang Joshi, and Michael I. Miller. Functional and structural mapping of human cerebral cortex: Solutions are in the surfaces. *Neuroimaging of Human Brain Function*, 95:788–795, 1998.
- [22] Bruce Fischl and Anders M. Dale. Measuring the thickness of the human cerebral cortex from magnetic resonance images. *Proceedings of the National Academy of Science*, 97:11050–11055, 2000.
- [23] Bruce Fischl, Arthur Liu, and Anders M. Dale. Automated manifold surgery: Constructing geometrically accurate and topologically correct models of the human cerebral cortex. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20:70–80, 2001.
- [24] Bruce Fischl, Martin I. Sereno, and Anders M. Dale. Cortical surface-based analysis II: Inflation, flattening, and a surface-based coordinate system. *NeuroImage*, 9:195–207, 1999.
- [25] Bruce Fischl, Martin I. Sereno, Roger B.H. Tootell, and Anders M. Dale. High-resolution intersubject averaging and a coordinate system for the cortical surface. *Human Brain Mapping*, 8:272–284, 1999.
- [26] Michael S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14:231–250, 1997.
- [27] Michael S. Floater and Kai Hormann. Surface parameterization: A tutorial and survey. In *Advances on Multiresolution in Geometric Modelling*, 2004.
- [28] R. Grossmann, N. Kiryati, and R. Kimmel. Computational surface flattening: A voxel-based approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24:433–441, April 2002.
- [29] Xianfeng Gu and Shing-Tung Yau. Computing conformal structure of surfaces. *CoRR: Graphics*, 2002.

- [30] A. Gupta, L. von Kurowski, A. Singh, D. Geiger, C.-C. Liang, M.-Y. Chiu, L.P. Adler, M. Haacke, and D.L. Wilson. Cardiac mr image segmentation using deformable models. In *Proceedings Computers in Cardiology 1993*, pages 747–750, 1993.
- [31] Steven Haker, Sigurd Angenent, Allen Tannenbaum, Ron Kikinis, Guillermo Sapiro, and Michael Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6:181–189, 2000.
- [32] John Harwell, David Van Essen, Donna Hanlon, and James Dickson. Integrated software for surface-based analyses of cerebral cortex. *NeuroImage*, 13:148, 2001.
- [33] Gerardo Hermosillo, Olivier Faugueras, and José Gomes. Cortex unfolding using level set methods. Technical report, INRIA: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1999.
- [34] M.K. Hurdal, K.W. Kurtz, and D.C. Banks. Case study: Interacting with cortical flat maps of the human brain. In *Proceedings of the IEEE Visualization Conference*, pages 469–472, 2001.
- [35] Monica K. Hurdal and Ken Stephenson. Cortical cartography using the discrete conformal approach of circle packings. *NeuroImage*, 23:s119–s128, 2004.
- [36] Monica K. Hurdal, Ken Stephenson, Philip L. Bowers, De Witt L. Sumners, and David A. Rottemberg. Cortical surface flattening: A quasi-conformal approach using circle packings. 2000.
- [37] Andrei C. Jalba, Michael H.F. Wilkinson, and Jos B.T.M. Roerdink. Automatic image segmentation using a deformable model based on charged particles. In *Lecture Notes in Computer Science, Image Analysis and Recognition*, volume 3211, pages 1–8, 2004.
- [38] Sylvain Jaume. *Topology Simplification Algorithm for the Segmentation of Medical Scans*. PhD thesis, Universite Catholique de Louvain, 2004.
- [39] Mukta Joshi, Jing Cui, Keith Doolittle, Sarang Joshi, David Van Essen, Lei Wang, and Michael I. Miller. Brain segmentation and the generation of cortical surfaces. *NeuroImage*, 9:461–476, 1999.
- [40] Lili Ju, Josh Stern, Kelly Rehm, Kirt Schaper, Monica Hurdal, and David Rottenberg. Cortical surface flattening using least square conformal mapping with minimal metric distortion. *2004 2nd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Macro to Nano*, 1:77–80, 2004.
- [41] Takashi Kanai, Hiromasa Suzuki, and Fumihiko Himura. 3D geometric metamorphosis based on harmonic map. *5th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (Pacific Graphics '97)*, 1:97, 1997.
- [42] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.
- [43] Andrei Khodakovsky, Nathan Litke, and Peter Schröder. Globally smooth parameterizations with low distortion. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 22:350–357, 2003.
- [44] Leif Kobbelt and Mario Botsch. A survey of point-based techniques in computer graphics. *Computers & Graphics*, 28:801–814, 2004.
- [45] A. Kuprat, A. Khamayseh, D. George, and L. Larkey. Volume conserving smoothing for piecewise linear curves, surfaces, and triple lines. *Journal of Computational Physics*, 172:99–118, 2001.

- [46] Aaron W. F. Lee, Wim Sweldens, Peter Schröder, Lawrence Cowsar, and David Dobkin. MAPS: multiresolution adaptive parameterization of surfaces. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 95–104, 1998.
- [47] S. Lee, K. Chwa, J. Hahn, and S. Shin. Image morphing using deformable surfaces. In *Proc. Computer Animation '94*, page 3139, 1994.
- [48] B. Levy, S. Petitjean, N. Ray, and J. Malliot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH'02*, 2002.
- [49] J. Li, D. Zhang, G. Lu, Y. Peng, X. Wen, and Y. Sakaguti. Flattening triangulated surfaces using a mass-spring model. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 25:108–117, 2005.
- [50] Oberholzer M., Christen H., Oestreicher M., Buser M., Dalquen P., Feichter G., and Ettl R. Prerequisites for the application of statical morphometry in diagnostics. *Verh Dtsch Ges Pathol.*, 74:225–7, 1990.
- [51] J. McCartney, B.K. Hinds, and B.L. Seow. The flattening of triangulated surfaces incorporating darts and gussets. *CAD Computer Aided Design*, 31:249–260, 1999.
- [52] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19:1023–1040, 2001.
- [53] Kensaku Mori, Hiroki Oka, Takayuki Kitasaka, Yasuhito Suenaga, and Junichiro Toriwaki. Virtual unfolding of the stomach based on volumetric image deformation. *MICCAI 2004*, 3217:389–396, 2004.
- [54] Jean-Marie Morvan and Boris Thibert. Unfolding of surfaces. Technical report, INRIA - Sophia Antipolis, Equipe : PRISME, November 2002.
- [55] Gabriel Peyré and Laurent Cohen. Geodesic computations for fast and accurate surface flattening. In *Eurographics*, pages 1–10, 2004.
- [56] Jean-Philippe Pons, Renaud Keriven, and Olivier Faugeras. Area preserving cortex unfolding. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention MICCAI 2004: 7th International Conference, Saint-Malo, France, September 26-29, 2004. Proceedings, Part I*, pages 376–383, 2004.
- [57] Mahesh Ramasubramanian and Anurag Mittal. Three-dimensional metamorphosis using multiplanar representation. In *IEEE*, pages 270–275, 1999.
- [58] Torsten Rohlfinga, Edith V. Sullivan, and Adolf Pfefferbaum. Deformation-based brain morphometry to track the course of alcoholism: Differences between intra-subject and inter-subject analysis. *Psychiatry Research: Neuroimaging*, 146:157–170, 2006.
- [59] E. L. Schwartz, A. Shaw, and E. Wolfson. A numerical solution to the generalized mapmaker’s problem: Flattening nonconvex polyhedral surfaces. *IEEE Transactions in Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:1005–1008, 1989.
- [60] A. Sheffer and E. de Sturler. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening. *Engineering with Computers*, 17:326–337, 2001.
- [61] G. Stylianou and G. Farin. Crest lines for surface segmentation and flattening. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10:536–544, 2004.
- [62] Tolga Tasdizen, Ross Whitaker, Paul Burchard, and Stanley Osher. Geometric surface smoothing via anisotropic diffusion of normals. In *13th IEEE Visualization 2002 (VIS'02)*, 2002.

- [63] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 36:91–123, 1988.
- [64] G.M. Treece, R.W. Prager, and A.H. Gee. Volume-based three-dimensional metamorphosis using region correspondence. *Visual Computer*, 17:397–414, 2001.
- [65] Brian A. Wandell, Suelika Chial, and Benjamin T. Backus. Visualization and measurement of the cortical surface. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12:739–752, 2000.
- [66] C.C.L. Wang, K. Tang, and B.M.L. Yeung. Freeform surface flattening based on fitting a woven mesh model. *CAD Computer Aided Design*, 37:799–814, 2005.
- [67] Charlie C.L. Wang, Shana S-F. Smith, and Matthew M.F. Yuen. Surface flattening based on energy model. *Computer-Aided Design*, 34:823–833, 2002.
- [68] Charlie C.L. Wang, Yu Wang, Kai Tang, and Matthew M.F. Yuen. Reduce the stretch in surface flattening by finding cutting paths to the surface boundary. *Computer-Aided Design*, 36:665–677, 2004.
- [69] M.-T. Wang. Deforming area preserving diffeomorphism of surfaces by mean curvature flow. *Mathematical Research Letters*, 8:651–661, 2001.
- [70] Yalin Wang, Xianfeng Gu, Tony F. Chan, Paul M. Thompson, and Shing-Tung Yau. Intrinsic brain surface conformal mapping using a variational method. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 5370:241–252, 2004.
- [71] G. Windreich, N. Kiryati, and G. Lohmann. Voxel-based surface area estimation: From theory to practice. *Pattern Recognition*, 36:2531–2541, 2003.
- [72] E. Wolfson and E.L. Schwartz. Computing minimal distances on polyhedral surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:1001–1005, 1989.
- [73] C. Xu, D. Pham, and J. Prince. Image segmentation using deformable models. In *Handbook of Medical Imaging*, volume 2, 2000.
- [74] Collan Y. Morphometry in pathology: another look at diagnostic histopathology. *Pathol Res Pract.*, 179(2):189–92, 1984.
- [75] Lei Zhu, Steven Haker, and Allen Tannenbaum. Area-preserving mappings for the visualization of medical structures. In *MICCAI 2003*, pages 277–284, 2003.
- [76] Malte Zockler, Detlev Stalling, and Hans-Christian Hege. Fast and intuitive generation of geometric shape transitions. *Visual Computer*, 16:241–253, 2000.