



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ



Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería

Deformaciones no Paramétricas 3D Aplicadas a
la Morfometría de Estructuras Anatómicas

Andrea del Pilar Rueda Olarte

Bogotá D.C., 8 de octubre de 2006

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Definición del Problema	6
2. Modelos de Deformación de Superficies	7
2.1. Modelos para Aplanar una Superficie	8
2.2. Modelos para Alisar o Suavizar una Superficie	10
2.3. Modelos de Mapeo de Superficies	12
2.4. Aplicaciones	13
2.4.1. Morfometría basada en Superficies	14
3. Modelo Físico de Deformación	16
3.1. Caracterización del Modelo	16
3.2. Formulación del Modelo	17
4. Modelo Variacional de Deformación	18
4.1. Caracterización del Modelo	18
4.2. Formulación del Modelo	18
5. Prototipo de Visualización y Medición	20
5.1. Metodología de Desarrollo	20
5.2. Componentes	20
5.2.1. Modelo Físico	20
5.2.2. Modelo Variacional	20
5.2.3. Cálculo de las Medidas	20
5.3. Requerimientos de <i>Hardware</i> y <i>Software</i>	20
6. Pruebas y Validación	21
6.1. Modelo Físico	21
6.1.1. Modelo Físico sobre Curvas 2D	21
6.1.2. Modelo Físico sobre Superficies 3D	21
6.2. Modelo Variacional sobre Superficies 3D	21
6.3. Pruebas de Usuario	21
7. Conclusiones	22
7.1. Trabajo Futuro	22

Índice de figuras

2.1. Clasificación somera de los métodos para deformar superficies . . .	8
2.2. Vistas del proceso de suavizado de una superficie	10
2.3. Vista del mapeo de una superficie en una esfera	12
3.1. Sección transversal de la membrana deformada	16

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

La visualización y análisis de las características funcionales y anatómicas de algunas estructuras puede facilitarse mediante modelos tridimensionales obtenidos por segmentación a partir de imágenes de tomografía computarizada (*CT*, *Computer Tomography*) o resonancia magnética (*MR*, *Magnetic Resonance*). La determinación de longitudes y áreas en estas superficies se dificulta debido a la intrincada geometría de algunas estructuras anatómicas, como la corteza cerebral, órganos huecos como el colon, etc. Sin embargo, algunas de estas aplicaciones morfométricas pueden simplificarse si las mediciones se realizan sobre otra superficie más suave con una topología similar y que conserve las métricas lo más posible.

Por otro lado, las deformaciones de superficies tridimensionales y sus aplicaciones han sido tema de estudio en los últimos 20 años. Los modelos deformables se aplican actualmente en diferentes áreas, para automatizar procesos tales como segmentación, registro, medición, ajuste, y otros relativos a imágenes médicas.

Básicamente, se denominan modelos deformables a aquellos en los que un contorno bidimensional o una superficie tridimensional se hacen evolucionar hasta que toman la forma de otro contorno o superficie objetivo. De acuerdo a lo presentado por Montagnat *et al.* en su revisión de los modelos deformables [41], los campos de acción en los cuales se aplican los modelos deformables cubren el reconocimiento de patrones, animación computarizada, simulación de cirugías, y la segmentación de imágenes, entre otras. También se utilizan diferentes representaciones para generar desde líneas 3D deformables hasta volúmenes deformables. Los modelos deformables fueron introducidos por Kass *et al.* en 2D [32] y extendidos al caso 3D por Terzopoulos *et al.* [51]. Algunos de los modelos deformables reseñados por Montagnat *et al.*, como *level sets*, *spring-mass*, y modelos de elementos finitos; son también incluidos aquí junto con algunas otras aproximaciones relacionadas, y combinaciones de éstas.

1.1. Definición del Problema

En medicina ha sido muy importante la inclusión de los recursos computarizados porque ayudan a tomar decisiones más acertadas acerca de la condición del paciente y del tratamiento que debe aplicársele. Algunos tipos de imágenes médicas que se emplean en la actualidad permiten obtener representaciones bidimensionales y tridimensionales (conjuntos de *voxels*¹, mallas poligonales, ...) de las estructuras anatómicas del paciente, con lo cual los médicos pueden estudiarlas con más comodidad y precisión, y diversos paquetes de *software* desarrollados en la actualidad permiten simular, por ejemplo, los efectos a largo plazo de un tratamiento o de una cirugía.

La morfometría, es decir, el estudio cuantitativo de las estructuras anatómicas, es un elemento básico en los diagnósticos de la condición de un paciente, pues permite determinar los cambios en la forma de estas estructuras. Las mediciones generalmente las realizan los médicos y especialistas de forma manual, por lo cual son vulnerables a errores humanos y a pérdida de precisión; en otros casos ni siquiera se considera el establecer estas medidas.

Existen paquetes de *software* que permiten realizar mediciones exactas sobre superficies lisas y sencillas; sin embargo, el realizar este tipo de mediciones en superficies más complejas e intrincadas es más difícil, pues es necesario considerar factores tales como el cambio en los ángulos, en las curvaturas, etc. que determinan la precisión de las mediciones. Para resolver este problema, una aproximación posible es deformar la superficie inicial de forma que su geometría se simplifique, y poder aplicar los algoritmos de medición para superficies sencillas. Sin embargo, el proceso de deformación de estas superficies se puede hacer de diferentes maneras, tal como se presentará en las siguientes secciones. Un elemento adicional que se considera es la posibilidad de transformar una superficie en otra, con el objetivo de comparar las mediciones realizadas en cada una de ellas.

¹ *Volume elements*. Los voxels de una representación 3D son equivalentes a los pixeles de una imagen 2D.

Capítulo 2

Modelos de Deformación de Superficies

El problema de obtener una representación plana de una superficie curva, como por ejemplo una esfera, fue estudiado por Gauss hacia 1828, el cual consideró un problema sin solución exacta debido a la diferencia entre las curvaturas Gaussianas de la superficie curvada y su representación en el plano. Sin embargo, hacia 1989, empezaron a publicarse las primeras soluciones aproximadas de este problema. La investigación en este campo continúa con aproximaciones planas cada vez más acertadas de las superficies 3D, y se han explorado además otras posibilidades, como suavizar la geometría de la superficie o obtener un mapeo entre los puntos de la superficie y otra más simple.

Los trabajos realizados por David Van Essen *et al.* ([7, 11, 12, 14, 10, 29, 13, 23]) y Bruce Fischl *et al.* ([17, 9, 16, 15]), aunque están enfocados hacia el estudio de la corteza cerebral, constituyen un buen ejemplo y referencia de los trabajos que se pueden realizar con los modelos de deformación basados en superficies. Sus artículos presentan desarrollos muy completos acerca de los tres tipos de modelos que se presentarán aquí (aplanamiento, suavizado y mapeo) y también han elaborado herramientas de *software*, como **SureFit**¹, **Caret**² y **SuMS**³, reseñadas en [13], las cuales permiten al usuario realizar diversos análisis sobre superficies de la corteza cerebral y aplicar operaciones como suavizado, transformaciones geométricas, proyecciones, aplanado y otras deformaciones.

Los modelos para deformar superficies reseñados en la literatura más reciente pueden ser clasificados en tres grandes grupos, como lo muestra la Figura 2.1. Los modelos que aplanan una superficie buscan obtener una representación en el plano euclidiano de la superficie 3D, insertando si es necesario líneas de corte que mejoren la proyección. Con los modelos que suavizan la geometría de la superficie se obtiene una representación alisada, que conserva la forma básica

¹<http://brainvis.wustl.edu/resources/surefitnew.html>

²<http://brainmap.wustl.edu/resources/caretnew.html>

³<http://sumsdb.wustl.edu:8081/sums/index.jsp>

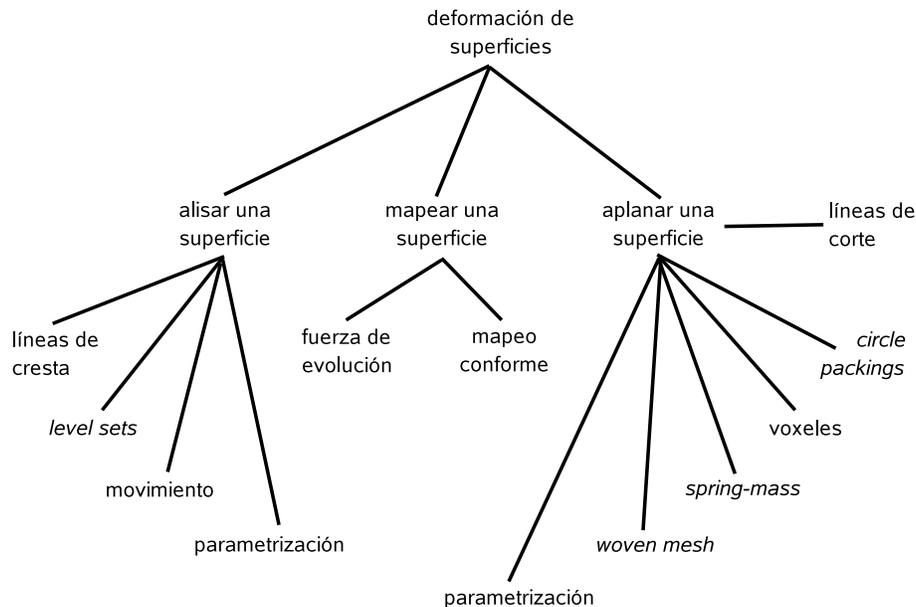


Figura 2.1: Clasificación somera de los métodos para deformar superficies

pero elimina los picos y valles demasiados pronunciados. Por último, con la aplicación de los métodos de mapeo de superficies se busca proyectar los puntos de la superficie 3D en otra de geometría más simple (como una esfera).

2.1. Modelos para Aplanar una Superficie

Este es el primer problema que se consideró en deformación de superficies, dada su similitud con el problema de elaborar mapas, cuyo objetivo es el de obtener representaciones planas de una superficie curvada. La cantidad de puntos de la superficie original se conserva en la representación en el plano, pero las distancias, ángulos y áreas se afectan significativamente entre más compleja y curva sea la superficie. En esas situaciones se utilizan las líneas de corte, que ayudan a corregir un poco la distorsión en las métricas. En la Figura ?? se presenta una superficie inicial y el resultado esperado de aplicar alguno de los métodos para aplanar superficies. En este caso particular, la superficie aplanada presenta triángulos superpuestos, por lo que se hace necesario insertar una línea de corte en la superficie para obtener una nueva representación plana más acertada de la superficie inicial.

La solución al problema de elaborar mapas presentada en [47] está básicamente limitada por la poca aplicación de la geometría diferencial y el poco poder de cómputo de los computadores en esa época; puede considerarse una aproximación muy primitiva pero válida por ser la pionera. Básicamente, se presentan

los lineamientos de un algoritmo que permite alisar superficies no convexas, el cual se basa en calcular una matriz con las distancias entre los puntos de la superficie curva; luego, se determina un conjunto de puntos en el plano cuya matriz de distancias se ajuste a la calculada para la superficie inicial, usando el método del descenso del gradiente de Newton-Raphson y el algoritmo para calcular las distancias mínimas presentado en [60]. Junto con otros ajustes (como la cantidad de vecinos que se evalúan), la representación plana obtenida representa adecuadamente la forma alisada de la superficie original.

Más recientemente, se han presentado diferentes aproximaciones que resuelven de la forma más exacta posible el problema de aplanar una superficie:

- **Parametrización:** Floater presenta en [18] el desarrollo matemático necesario para elaborar una parametrización para una superficie de triangulación de forma que la imagen obtenida sea una representación plana de esta superficie. Básicamente se hace una consideración sobre los vecinos en cada punto y se desarrollan tres diferentes parametrizaciones: uniforme, mínimos cuadrados ponderados y preservación de la forma, las cuales son comparadas al final para determinar la mejor aproximación.
- **Circle Packings:** El método de *Circle Packings* (empaquetar círculos) fue presentado inicialmente por Hurdal *et al.* en [27], y luego retomado y redefinido en [26] por los mismos autores. Aunque es un método que no preserva totalmente las métricas, se considera una aproximación discreta que permite generar representaciones planas de la superficie en el plano euclidiano y en el plano hiperbólico. Se trabaja sobre una malla de triangulación, se colocan círculos con centro en cada vértice de la malla, y el radio del círculo se va ajustando de acuerdo a una condición sobre la suma de los ángulos que se pueden construir en cada vértice. También se elaboró un paquete de *software*, `CirclePack`⁴, que implementa este método.
- **Basada en voxeles:** Dado que la representación general de las superficies 3D está basada en voxeles, Grossmann *et al.* [20] desarrollaron un método directo que opera sobre los voxeles de la superficie, el cual requiere de dos pasos: el cálculo de las distancias geodésicas mínimas entre los voxeles, y la búsqueda de una configuración de puntos en 2D cuyas distancias euclidianas aproximen lo más posible las distancias geodésicas entre los voxeles. El método es rápido pues no requiere el cálculo de una superficie de triangulación y conserva de forma aproximada las métricas globales.
- **Spring-Mass:** El método presentado por Wang *et al.* en [55] se enfoca en la aplicación de un modelo *spring-mass* (masas y conexiones) que se rige principalmente por la minimización de una función de energía y por términos que indican la precisión en la forma y en el área. Es un método relativamente rápido y generalmente requiere de pocas iteraciones para obtener buenos resultados. El modelo *spring-mass* es retomado y modificado por Li *et al.* en [38], incluyendo, además de las conexiones de tensión del

⁴<http://www.math.utk.edu/~kens/DownLoad.html>

modelo original, conexiones cruzadas que minimizan la distorsión de la representación resultante. La superficie se divide en cintas de triángulos que se van aplanando una a una, y para eliminar las posibles superposiciones de triángulos se considera la energía global de relajación, un procedimiento local de corrección y algunas restricciones en la evolución.

- **Woven mesh:** El método más reciente, presentado por Wang *et al.* en [54], se basa en la construcción de una malla entrecruzada (*woven mesh*), utilizando dos tipos de mapeo: el de nodos de tensión, que va adicionando los nodos sobre dos rutas perpendiculares en la superficie; y el mapeo diagonal de nodos, que agrega los nodos ubicados en los cuadrantes. Luego se minimiza una función de energía que mide las deformaciones de longitud y área entre los nodos en la superficie y los nodos en la representación planar, lo que permite establecer una parametrización entre todos los puntos de cada una de las superficies.

Un elemento adicional que se considera en los modelos para aplanar una superficie 3D, es el de líneas de corte en una superficie con complejidad geométrica alta para garantizar que la representación plana corresponderá de mejor forma con la superficie inicial. En algunas aproximaciones iniciales, estas líneas de corte las podía estimar el usuario de forma manual. Ya más recientemente, Wang *et al.* presentan en [56] un método para automatizar esta labor, el cual evalúa en cada punto de la malla de triangulación la curvatura Gaussiana, y la utiliza como criterio para establecer la cantidad y longitud de las líneas de corte que deben aplicarse a la superficie. El proceso de aplanado se realiza por medio de un modelo *spring-mass* modificado.

2.2. Modelos para Alisar o Suavizar una Superficie

El proceso de suavizado puede generar una superficie con menos puntos, con lo que se reduce el espacio en disco que ocupa la representación y el tiempo de procesamiento de la misma. En la Figura 2.2 se presenta el resultado de alisar una representación 3D de la corteza cerebral.

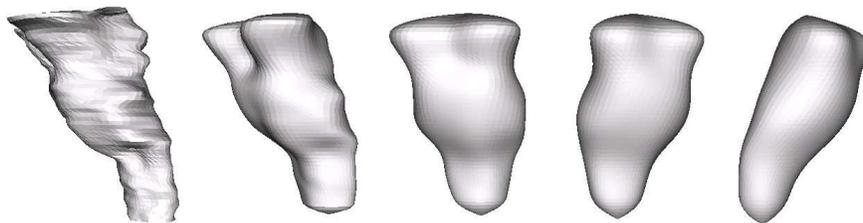


Figura 2.2: Vistas del proceso de suavizado de una superficie

Algunas de las aproximaciones más relevantes en este campo se presentan a continuación:

- **Parametrizaciones:** Un método de suavizado utilizando parametrizaciones relacionadas con multirresolución de mallas es presentado por Lee *et al.* en [36]. La idea básica es simplificar la malla de triangulación de forma iterativa utilizando mapas conformes, de forma que se establezca una jerarquía, y luego cada punto de la malla inicial se asocia con cada una de las diferentes resoluciones. Es una solución rápida y no restringe la topología de la malla.

En [48], Sheffer *et al.* se concentran en una parametrización que únicamente tiene en cuenta la preservación de los ángulos. Su argumento es que para preservar las características métricas únicamente se necesita que se mantenga el valor de los ángulos en cada iteración de la evolución de la superficie. Plantean un problema de minimización en término de los ángulos con restricciones que se van modificando si se observa que se generan intersecciones en la frontera. También puede aplicarse para generar múltiples resoluciones de la malla inicial.

Un tercer ejemplo de parametrización es introducido por Khodakovsky *et al.* en [33]. El proceso se basa en dividir la superficie en regiones triangulares y luego, para cada una de éstas, calcular el mapeo en el dominio de parámetros, cuya base es generada con la simplificación de la malla original por eliminación de vértices. El proceso considera la calidad de los triángulos y la distorsión métrica.

- **Level sets:** Hermosillo *et al.* presentan una aproximación al problema de suavizado empleando *level sets* en [24]. Se consideran las características que gobiernan el movimiento de la superficie de acuerdo a su curvatura media, en los casos de la preservación del área y la preservación del volumen; las cuales se integran a la formulación de *level sets* que aproxima estos movimientos. Adicionalmente, se determinan las condiciones que permiten mantener la correspondencia entre los puntos a lo largo de la evolución de la superficie.

La combinación de los modelos de *level sets* y la técnica de difusión anisotrópica para el suavizado de superficies es presentado por Tasdizen *et al.* en [50]. Se utilizan *level sets* con flujos de cuarto nivel, uno de los cuales es la difusión anisotrópica, representados con ecuaciones diferenciales parciales. El proceso consiste en resolver la difusión anisotrópica en el mapa normal de la superficie, y luego la superficie se deforma aplicando los *level sets* hasta que se ajusta a las normales suavizadas. Se aplican conceptos de minimización del mapa normal de energía y reajuste de la superficie.

- **Estimación de la velocidad:** Pons *et al.* se enfocan en la preservación del área al suavizar una superficie en [45]. Su enfoque se basa en tomar un movimiento normal, dado por el usuario y el cual generalmente se basa en la curvatura media, y construir a partir de él una velocidad tangencial apropiada que preserve el área a medida que evoluciona la superficie. El

método puede aplicarse en superficies de triangulación y en *level sets*, pero únicamente se presentan resultados con la implementación en *level sets*.

- **Líneas de cresta:** En [49], Stylianou *et al.* presentan la utilización de líneas de cresta para suavizar una superficie. El objetivo de establecer las líneas de cresta es que permiten particionar la superficie creando un diagrama geodésico de Voronoi, con el cual se puede implementar un algoritmo rápido de alisar superficies, el cual combina el mapeo baricéntrico de Tutte y las coordenadas de valor medio de Floater. Las líneas de cresta se calculan de acuerdo a una aproximación de la curvatura y a una esqueletización. La distorsión métrica introducida por este método parece ser mínima.

2.3. Modelos de Mapeo de Superficies

Los métodos que permiten mapear una superficie 3D en otra con las mismas características topológicas utilizan generalmente una esfera o una elipsoide como superficie objetivo. El que este método pueda utilizarse se justifica con la aplicación de la geometría de superficies de Riemann, con la que se puede afirmar que cualquier superficie sin hoyos o intersecciones consigo misma puede mapearse de forma conforme en una esfera, y cualquier porción de la superficie puede mapearse en un disco [22]. En la Figura 2.3 se presenta el resultado que se obtiene al aplicar uno de los métodos para mapear una superficie 3D (como la corteza cerebral) en otra superficie suave, en este caso una esfera.

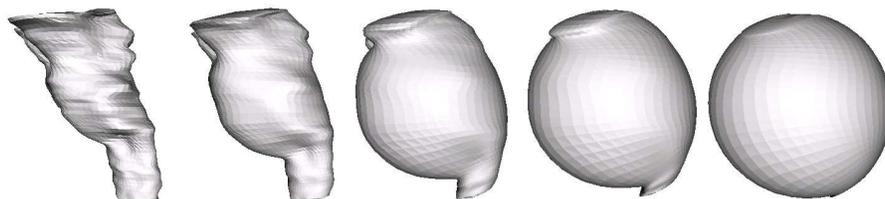


Figura 2.3: Vista del mapeo de una superficie en una esfera

El objetivo principal de estos métodos es determinar un mapa conforme entre la superficie y la esfera, pero varían las formas de llegar a este mapeo. Se pueden encontrar métodos que aplican elementos finitos para construir el mapa conforme, como el presentado por Haker *et al.* en [22], que adicionalmente considera la aplicación de texturas y la generación de mapas de coordenadas. En la misma línea, Angenent *et al.* presentan en [2] la aplicación del operador de Laplace-Beltrami⁵ que, junto con la formulación por elementos finitos, permite construir el mapa conforme y mapear así la superficie en una esfera. Otra forma de construir un mapa conforme esférico es presentada por Ju *et al.* en [30],

⁵La generalización del operador de Laplace para superficies curvas.

en donde se utiliza el mapeo conforme por mínimos cuadrados introducido por Levy *et al.* en [37], el cual no preserva muy bien las métricas pero invierte menos tiempo en los cálculos. Uno de los métodos más recientes para construir un mapa conforme único entre una superficie y una esfera es presentado por Wang *et al.* en [58], en donde se aplican los elementos de la geometría diferencial para construir un homeomorfismo entre las superficies y luego éste se deforma de forma que minimice la energía armónica.

Otra forma de obtener una representación esférica de una superficie 3D que es un poco más sencilla de formular, pero no ofrece tan buenos resultados de forma directa, es plantear una fuerza que mueva cada uno de los puntos de la superficie inicial hacia la superficie de la esfera. Fischl *et al.* presentan un método con esta característica en [15], y consideran, para cada punto y en cada iteración, una fuerza de suavizado y una fuerza radial. El método requiere de un paso posterior para uniformizar la densidad de puntos en la esfera.

2.4. Aplicaciones

En la subsección 2.1 se menciona la primera aplicación de los modelos de deformación de superficies: elaborar un mapa a partir de una superficie curva como lo es el globo terráqueo. En la actualidad, las aplicaciones de este tipo de métodos abarcan campos muy variados, desde el diseño de prendas de vestir hasta la recreación de animaciones 3D; pero la mayoría de ellas están centradas en el campo de la medicina.

El diseño de prendas de vestir y de zapatos es una de las aplicaciones más directas de los métodos para aplanar superficies, como se muestra en [55], [54] y [4]. Se utiliza la representación tridimensional del cuerpo de la persona, sobre la cual se determina la superficie que cubrirá la prenda y luego ésta es extraída y aplanada, insertando las líneas de corte necesarias. Este modelo plano se imprime para luego cortar las telas y fabricar las prendas, que se ajustan perfectamente al cuerpo de la persona. El diseño de zapatos se realiza con un procedimiento similar.

Otro grupo de aplicaciones se relacionan directamente con el procesamiento de gráficas. Los métodos de metamorfosis entre superficies pueden utilizarse para elaborar algunas animaciones y efectos especiales en las transiciones, las cuales son muy utilizadas en áreas como cine y televisión, publicidad y diseño gráfico. Los métodos para suavizar superficies presentados en [36] y [48] permiten obtener múltiples resoluciones de una malla poligonal, para facilitar el manejo de estas estructuras en tareas tales como almacenamiento, visualización, edición y transmisión. La adaptación de mapas de texturas a una superficie puede conseguirse utilizando los métodos de aplanado y de mapeo de superficies, tal como se presenta en [44].

El campo donde se concentran la mayor parte de las aplicaciones de los modelos de deformación de superficies es la medicina. En base a estos métodos se construyen paquetes de *software* que permiten a los profesionales de la salud analizar de una manera más precisa y segura las estructuras anatómicas de sus

pacientes, así como establecer comparaciones entre ellas. Utilizando los métodos para aplanar superficies se pueden analizar vasos sanguíneos con el fin de detectar y visualizar patologías como estenosis⁶ y pólipos⁷, aplicación presentada por Zhu *et al.* en [62]; así como el interior del estómago, de acuerdo a lo presentado por Mori *et al.* en [42].

Dentro de la medicina, el área con mayor número de publicaciones sobre deformación de superficies es la relativa a las estructuras cerebrales, puesto que la corteza cerebral es considerada la superficie más compleja del cuerpo humano, en cuanto a geometría y topología se refiere. La aplicación de estos métodos permite la identificación de cambios en los surcos del cerebro debidos a tumores u otras patologías. También facilitan la visualización de las diferentes áreas funcionales del cerebro, así como la determinación de distancias y otras medidas.

2.4.1. Morfometría basada en Superficies

Una vez obtenida una representación simplificada de una superficie 3D, es importante revisar qué análisis pueden aplicarse sobre esta nueva superficie. Una de las aplicaciones más comunes en la medicina son los estudios morfométricos, es decir, la toma de medidas con el objeto de comparación con otros sujetos o con un atlas, o para observar los cambios producidos durante la evolución de la estructura anatómica. Estas mediciones permiten la detección de tumores y otras enfermedades que afecten la forma de las estructuras anatómicas.

De acuerdo a la investigación en morfometría realizada por Ashburner y presentada en el capítulo 6 de [3], existen tres métodos morfométricos principales: la morfometría basada en deformaciones, la morfometría basada en tensores y la morfometría basada en voxeles. Cada método identifica elementos diferentes (diferencias anatómicas macroscópicas, diferencias estructurales en regiones y composición local, respectivamente) se aplican exclusivamente al cerebro y son utilizados para comparación entre pacientes.

Las medidas morfométricas básicas que se pueden tomar sobre la superficie incluyen longitudes o distancias, áreas, ángulos, curvaturas, grosor, etc. Es necesario resaltar que la característica más importante que deben poseer los métodos de deformación de superficies es que la nueva representación simplificada preserve la mayoría de las métricas de la superficie 3D original, pues de otra forma no tendría gran aplicación. La superficie puede estar representada por una malla de triangulación, por voxeles, o por alguna otra estructura; y los métodos de medición son dependientes del tipo de estructura que se utilice.

Entre algunos desarrollos relacionados con este campo se encuentra la estimación de áreas basada en voxeles, presentada por Windreich *et al.* en [59]. El método requiere dos pasos: detectar y delimitar la región de interés y luego estimar el área de la región. El usuario debe indicar algunos puntos que indican la región de interés, los cuales son conectados de acuerdo a la ruta más corta

⁶Estrechez de un conducto u orificio.

⁷Tumor benigno, blando, que se desarrolla en las cavidades de una mucosa.

para delimitar la región. Luego, se aplica el estimador de área de Mullikin & Verbeek para aproximar el área de la región. Nótese que el estimar la ruta más corta entre cada par de puntos permite calcular también distancias entre éstos y podría obtenerse también el perímetro de la región de interés.

Otro trabajo relacionado es presentado por Chung *et al.* en [8]. En éste se presenta una aproximación estadística para realizar morfometría basada en superficies de la corteza cerebral. El cálculo de las medidas consideradas en este trabajo está basado en el tensor métrico de Riemann, el cual permite medir longitudes, áreas y ángulos, y cuyo diferencial permite estimar cambios en el área y en la curvatura de la superficie. Esta aproximación no requiere la definición de una región de interés.

Capítulo 3

Modelo Físico de Deformación

El modelo físico de deformación se formuló utilizando las ecuaciones que describen las tensiones de una membrana bajo escenarios de deformación, adaptándolas al caso particular.

3.1. Caracterización del Modelo

Se considera una membrana delgada estirada sobre un marco horizontal. Esta membrana es sometida a ciertas deformaciones en sentido vertical, de forma que se presentan fuerzas de tensión en cada punto de la membrana. Si se considera únicamente una sección vertical de la membrana, aparecerá como una curva, tal como se muestra en la figura 3.1, donde u corresponde al desplazamiento vertical con respecto a la posición normal.

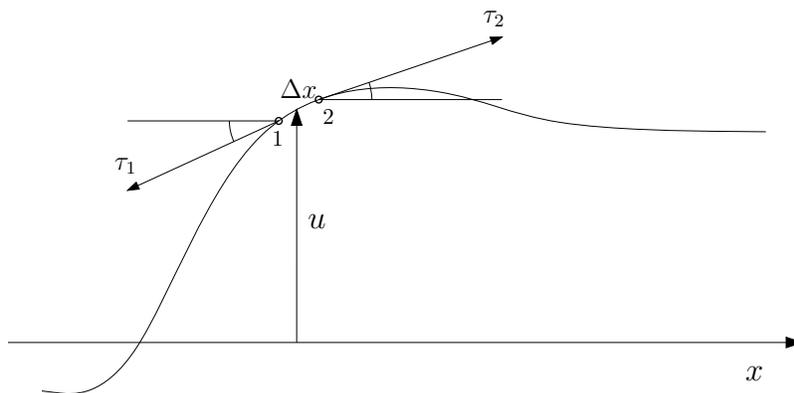


Figura 3.1: Sección transversal de la membrana deformada

Así, para un pedazo de la superficie de longitud Δx y ancho Δy , la fuerza a lo largo de la arista 1 es $\tau_1 \Delta y$ con un ángulo θ_1 , y de manera similar para la arista 2. Así que la fuerza resultante es de la forma

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1$$

3.2. Formulación del Modelo

La ecuación de fuerzas para el modelo de deformación, basado en lo anterior, es

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_R = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right) \right] \quad (3.1)$$

donde F_R corresponde a la fuerza radial a aplicar (ecuación ??), y τ corresponde a la tensión superficial sobre cada punto. Esta tensión superficial se modelará, en este caso, en función de la curvatura, puesto que en aquellos puntos donde la curvatura es más alta, se genera una tensión mayor que los hace retornar a su posición original. La curvatura en cada punto de la superficie se calcula con la siguiente fórmula

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Con este método se espera que aquellas métricas como áreas y longitudes se preserven en un alto grado en aquellos puntos donde la curvatura es mínima, debido a que la tensión depende directamente de la curvatura.

Capítulo 4

Modelo Variacional de Deformación

El modelo variacional considera las ecuaciones que describen la preservación local del área alrededor de cada punto de la superficie, y con ellas construye una expresión para el movimiento de evolución de estos puntos.

4.1. Caracterización del Modelo

4.2. Formulación del Modelo

El objetivo es plantear las ecuaciones de evolución de los N_V vértices x_i de una triangulación de una superficie cerrada que, conservando (lo más aproximadamente posible) el área de la triangulación, la hagan evolucionar a una forma esférica. Para esto, se tienen las siguientes consideraciones:

$$S(\vec{x}) = \text{const}$$

$$\dot{S}(\vec{x}) = 0$$

donde S corresponde a la superficie a deformar. Se exigirá en particular que un x_i dado evolucione durante el movimiento de manera que

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0$$

Esto asegura una “conservación local” del área alrededor de x_i .

El área total se puede expresar como la suma

$$\sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) + S'(\vec{x}') = 0$$

donde $s(x_i, x_j, x_{j+1})$ es el área de uno de los triángulos del abanico que tiene a x_i como vértice común y a los vecinos $x_j, j = 1, \dots, N_i$ como vértices ordenados consecutivos.

Según esto, la derivada parcial de S respecto a x_i implica sólo derivar los sumandos $s(x_i, x_j, x_{j+1})$, de modo que la restricción para la constancia de la superficie se reduce a

$$\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

$$\dot{x}_i \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

Esta condición indica que el vector \dot{x}_i debe ser perpendicular al vector

$$k_i = \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) \quad (4.1)$$

De este modo, si para llevar un punto x_i de la forma original a la superficie de una esfera se propone una velocidad v_i (que depende de la distancia a la superficie de la esfera y, posiblemente, de la “suavidad” de la superficie), se tendrá que la ecuación

$$\dot{x} = v_i$$

se debe modificar a

$$\dot{x} = v_i - \frac{v_i \cdot k_i}{|k_i|^2} k_i \quad (4.2)$$

para que se conserve el área. Para el caso particular, la velocidad que lleva los puntos hacia la superficie de la esfera es la misma fuerza radial definida por la ecuación ??.

Capítulo 5

Prototipo de Visualización y Medición

5.1. Metodología de Desarrollo

Durante el transcurso del proyecto, y de forma paralela, se desarrollará una aplicación que permita la visualización de la superficie 3D y del proceso de deformación de la misma, y que además ofrezca al usuario la funcionalidad para el cálculo del conjunto de métricas. La metodología de desarrollo de *software* escogida para la implementación de esta herramienta es la construcción de prototipos de forma evolutiva, con el fin de que, en cada etapa del proyecto, el aplicativo provea la funcionalidad básica para la validación y pruebas.

5.2. Componentes

5.2.1. Modelo Físico

5.2.2. Modelo Variacional

5.2.3. Cálculo de las Medidas

5.3. Requerimientos de *Hardware* y *Software*

Capítulo 6

Pruebas y Validación

6.1. Modelo Físico

6.1.1. Modelo Físico sobre Curvas 2D

6.1.2. Modelo Físico sobre Superficies 3D

6.2. Modelo Variacional sobre Superficies 3D

6.3. Pruebas de Usuario

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Trabajo Futuro

Bibliografía

- [1] S. Angenent, Steven Haker, Allen Tannenbaum, and Ron Kikinis. On area preserving mappings of minimal distortion. 1999.
- [2] Sigurd Angenent, Steven Haker, Allen Tannenbaum, and Ron Kikinis. On the Laplace-Beltrami operator and brain surface flattening. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18:700–711, 1999.
- [3] John Ashburner. *Computational Neuroanatomy*. PhD thesis, University College London, 2000.
- [4] P.N. Azariadis and N.A. Aspragathos. Geodesic curvature preservation in surface flattening through constrained global optimization. *Computer-Aided Design*, 33:581–591, 2001.
- [5] J. P. A. Baak and J. Oort. *A Manual of Morphometry in Diagnostic Pathology*. Springer, 1983.
- [6] David E. Breen and Ross T. Whitaker. A level-set approach for the metamorphosis of solid models. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 7:173–192, 2001.
- [7] G.J. Carman, H.A. Drury, and D.C. Van Essen. Computational methods for reconstructing and unfolding the cerebral cortex. *Cerebral Cortex*, 5:506–517, 1995.
- [8] Moo K. Chung, Keith J. Worsley, Steve Robbins, Tomás Paus, Jonathan Taylor, JayÑ. Giedd, Judith L. Rapoport, and Alan C. Evans. Deformation-based surface morphometry applied to gray matter deformation. *NeuroImage*, 18:198–213, 2003.
- [9] Anders M. Dale, Bruce Fischl, and Martin I. Sereno. Cortical surface-based analysis I: Segmentation and surface reconstruction. *NeuroImage*, 9:179–194, 1999.
- [10] H.A. Drury, M. Corbetta, G. Shulman, and D.C. Van Essen. Mapping fMRI activation data onto a cortical atlas using surface-based deformation. *NeuroImage*, 7:S728, 1998.
- [11] H.A. Drury, D.C. Van Essen, C.H. Anderson, C.W. Lee, T.A. Coogan, and J.W. Lewis. Computerized mappings of the cerebral cortex: a multiresolution flattening method and a surface-based coordinate system. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 1:1–28, 1996.
- [12] D. C. Van Essen and H. A. Drury. Structural and functional analyses of human cerebral cortex using a surface-based atlas. *The Journal of Neuroscience*, 17:7079–7102, 1997.
- [13] David C. Van Essen, Heather A. Drury, James Dickson, John Harwell, Donna Hanlon, and Charles H. Anderson. An integrated software suite for surface-based analyses of cerebral cortex. *Journal of the American Medical Informatics Association*, 8:443–459, 2001.
- [14] David C. Van Essen, Heather A. Drury, Sarang Joshi, and Michael I. Miller. Functional and structural mapping of human cerebral cortex: Solutions are in the surfaces. *Neuroimaging of Human Brain Function*, 95:788–795, 1998.
- [15] Bruce Fischl, Arthur Liu, and Anders M. Dale. Automated manifold surgery: Constructing geometrically accurate and topologically correct models of the human cerebral cortex. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20:70–80, 2001.

- [16] Bruce Fischl, Martin I. Sereno, and Anders M. Dale. Cortical surface-based analysis II: Inflation, flattening, and a surface-based coordinate system. *NeuroImage*, 9:195–207, 1999.
- [17] Bruce Fischl, Martin I. Sereno, Roger B.H. Tootell, and Anders M. Dale. High-resolution intersubject averaging and a coordinate system for the cortical surface. *Human Brain Mapping*, 8:272–284, 1999.
- [18] Michael S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14:231–250, 1997.
- [19] Michael S. Floater and Kai Hormann. Surface parameterization: A tutorial and survey. In *Advances on Multiresolution in Geometric Modelling*, 2004.
- [20] R. Grossmann, N. Kiryati, and R. Kimmel. Computational surface flattening: A voxel-based approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24:433–441, April 2002.
- [21] Xianfeng Gu and Shing-Tung Yau. Computing conformal structure of surfaces. *CoRR: Graphics*, 2002.
- [22] Steven Haker, Sigurd Angenent, Allen Tannenbaum, Ron Kikinis, Guillermo Sapiro, and Michael Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6:181–189, 2000.
- [23] John Harwell, David Van Essen, Donna Hanlon, and James Dickson. Integrated software for surface-based analyses of cerebral cortex. *NeuroImage*, 13:148, 2001.
- [24] Gerardo Hermosillo, Olivier Faugeras, and José Gomes. Cortex unfolding using level set methods. Technical report, INRIA: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1999.
- [25] M.K. Hurdal, K.W. Kurtz, and D.C. Banks. Case study: Interacting with cortical flat maps of the human brain. In *Proceedings of the IEEE Visualization Conference*, pages 469–472, 2001.
- [26] Monica K. Hurdal and Ken Stephenson. Cortical cartography using the discrete conformal approach of circle packings. *NeuroImage*, 23:s119–s128, 2004.
- [27] Monica K. Hurdal, Ken Stephenson, Philip L. Bowers, De Witt L. Sumners, and David A. Rottemberg. Cortical surface flattening: A quasi-conformal approach using circle packings. 2000.
- [28] Sylvain Jaume. *Topology Simplification Algorithm for the Segmentation of Medical Scans*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain, 2004.
- [29] Mukta Joshi, Jing Cui, Keith Doolittle, Sarang Joshi, David Van Essen, Lei Wang, and Michael I. Miller. Brain segmentation and the generation of cortical surfaces. *NeuroImage*, 9:461–476, 1999.
- [30] Lili Ju, Josh Stern, Kelly Rehm, Kirt Schaper, Monica Hurdal, and David Rottenberg. Cortical surface flattening using least square conformal mapping with minimal metric distortion. *2004 2nd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: Macro to Nano*, 1:77–80, 2004.
- [31] Takashi Kanai, Hiromasa Suzuki, and Fumihiko Himura. 3D geometric metamorphosis based on harmonic map. *5th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (Pacific Graphics '97)*, 1:97, 1997.
- [32] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.
- [33] Andrei Khodakovsky, Nathan Litke, and Peter Schröder. Globally smooth parameterizations with low distortion. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 22:350–357, 2003.
- [34] Leif Kobbelt and Mario Botsch. A survey of point-based techniques in computer graphics. *Computers & Graphics*, 28:801–814, 2004.

- [35] A. Kuprat, A. Khamayseh, D. George, and L. Larkey. Volume conserving smoothing for piecewise linear curves, surfaces, and triple lines. *Journal of Computational Physics*, 172:99–118, 2001.
- [36] Aaron W. F. Lee, Wim Sweldens, Peter Schröder, Lawrence Cowsar, and David Dobkin. MAPS: multiresolution adaptive parameterization of surfaces. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 95–104, 1998.
- [37] B. Levy, S. Petitjean, N. Ray, and J. Malliot. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH'02*, 2002.
- [38] J. Li, D. Zhang, G. Lu, Y. Peng, X. Wen, and Y. Sakaguti. Flattening triangulated surfaces using a mass-spring model. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 25:108–117, 2005.
- [39] Oberholzer M., Christen H., Oestreicher M., Buser M., Dalquen P., Feichter G., and Ettl R. Prerequisites for the application of statical morphometry in diagnostics. *Verh Dtsch Ges Pathol.*, 74:225–7, 1990.
- [40] J. McCartney, B.K. Hinds, and B.L. Seow. The flattening of triangulated surfaces incorporating darts and gussets. *CAD Computer Aided Design*, 31:249–260, 1999.
- [41] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19:1023–1040, 2001.
- [42] Kensaku Mori, Hiroki Oka, Takayuki Kitasaka, Yasuhito Suenaga, and Junichiro Toriwaki. Virtual unfolding of the stomach based on volumetric image deformation. *MICCAI 2004*, 3217:389–396, 2004.
- [43] Jean-Marie Morvan and Boris Thibert. Unfolding of surfaces. Technical report, INRIA - Sophia Antipolis , Equipe : PRISME, November 2002.
- [44] Gabriel Peyré and Laurent Cohen. Geodesic computations for fast and accurate surface flattening. In *Eurographics*, pages 1–10, 2004.
- [45] Jean-Philippe Pons, Renaud Keriven, and Olivier Faugeras. Area preserving cortex unfolding. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention MICCAI 2004: 7th International Conference, Saint-Malo, France, September 26-29, 2004. Proceedings, Part I*, pages 376–383, 2004.
- [46] Mahesh Ramasubramanian and Anurag Mittal. Three-dimensional metamorphosis using multiplanar representation. In *IEEE*, pages 270–275, 1999.
- [47] E. L. Schwartz, A. Shaw, and E. Wolfson. A numerical solution to the generalized mapmaker’s problem: Flattening nonconvex polyhedral surfaces. *IEEE Transactions in Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:1005–1008, 1989.
- [48] A. Sheffer and E. de Sturler. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening. *Engineering with Computers*, 17:326–337, 2001.
- [49] G. Stylianou and G. Farin. Crest lines for surface segmentation and flattening. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 10:536–544, 2004.
- [50] Tolga Tasdizen, Ross Whitaker, Paul Burchard, and Stanley Osher. Geometric surface smoothing via anisotropic diffusion of normals. In *13th IEEE Visualization 2002 (VIS'02)*, 2002.
- [51] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 36:91–123, 1988.
- [52] G.M. Treece, R.W. Prager, and A.H. Gee. Volume-based three-dimensional metamorphosis using region correspondence. *Visual Computer*, 17:397–414, 2001.
- [53] Brian A. Wandell, Suelika Chial, and Benjamin T. Backus. Visualization and measurement of the cortical surface. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 12:739–752, 2000.
- [54] C.C.L. Wang, K. Tang, and B.M.L. Yeung. Freeform surface flattening based on fitting a woven mesh model. *CAD Computer Aided Design*, 37:799–814, 2005.

- [55] Charlie C.L. Wang, Shana S-F. Smith, and Matthew M.F. Yuen. Surface flattening based on energy model. *Computer-Aided Design*, 34:823–833, 2002.
- [56] Charlie C.L. Wang, Yu Wang, Kai Tang, and Matthew M.F. Yuen. Reduce the stretch in surface flattening by finding cutting paths to the surface boundary. *Computer-Aided Design*, 36:665–677, 2004.
- [57] M.-T. Wang. Deforming area preserving diffeomorphism of surfaces by mean curvature flow. *Mathematical Research Letters*, 8:651–661, 2001.
- [58] Yalin Wang, Xianfeng Gu, Tony F. Chan, Paul M. Thompson, and Shing-Tung Yau. Intrinsic brain surface conformal mapping using a variational method. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 5370:241–252, 2004.
- [59] G. Windreich, N. Kiryati, and G. Lohmann. Voxel-based surface area estimation: From theory to practice. *Pattern Recognition*, 36:2531–2541, 2003.
- [60] E. Wolfson and E.L. Schwartz. Computing minimal distances on polyhedral surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11:1001–1005, 1989.
- [61] Collan Y. Morphometry in pathology: another look at diagnostic histopathology. *Pathol Res Pract.*, 179(2):189–92, 1984.
- [62] Lei Zhu, Steven Haker, and Allen Tannenbaum. Area-preserving mappings for the visualization of medical structures. In *MICCAI 2003*, pages 277–284, 2003.
- [63] Malte Zockler, Detlev Stalling, and Hans-Christian Hege. Fast and intuitive generation of geometric shape transitions. *Visual Computer*, 16:241–253, 2000.