

# Modelado de Superficies Deformables para Morfometría de la Corteza Cerebral

Andrea del Pilar Rueda, Eduardo Romero  
Grupo de Investigación Biolngenium  
Universidad Nacional de Colombia  
[adruedao,edromero]@unal.edu.co

## ABSTRACT

La deformación de superficies y volúmenes 3D se ha convertido en una herramienta muy valiosa para el diagnóstico médico, puesto que facilita los análisis morfométricos y funcionales de las estructuras anatómicas. En el presente trabajo se proponen algunos métodos para deformar superficies, llevándolas hacia una superficie más simple como una esfera.

## Keywords

Deformación de superficies, morfometría, modelo físico, modelo variacional, mapeo de superficies

## 1. INTRODUCCIÓN

La visualización y análisis de las características funcionales y anatómicas de algunas estructuras puede facilitarse mediante modelos tridimensionales obtenidos por segmentación a partir de imágenes de tomografía computarizada (*CT*, *Computer Tomography*) o resonancia magnética (*MR*, *Magnetic Resonance*). La determinación de longitudes y áreas en estas superficies se dificulta debido a la intrincada geometría de algunas estructuras anatómicas, como la corteza cerebral, órganos huecos como el colon, etc. Sin embargo, algunas de estas aplicaciones morfométricas pueden simplificarse si las mediciones se realizan sobre otra superficie más suave con una topología similar y que conserve las métricas lo más posible.

Por otro lado, las deformaciones de superficies tridimensionales y sus aplicaciones han sido tema de estudio en los últimos 20 años. Los modelos deformables se aplican actualmente en diferentes áreas, para automatizar procesos tales como segmentación, registro, medición, ajuste, y otros relativos a imágenes médicas.

Básicamente, se denominan modelos deformables a aquellos en los que un contorno bidimensional o una superficie tridimensional se hacen evolucionar hasta que toman la forma

de otro contorno o superficie objetivo. De acuerdo a lo presentado por Montagnat *et al.* en su revisión de los modelos deformables [15], los campos de acción en los cuales se aplican los modelos deformables cubren el reconocimiento de patrones, animación computarizada, simulación de cirugías, y la segmentación de imágenes, entre otras. También se utilizan diferentes representaciones para generar desde líneas 3D deformables hasta volúmenes deformables. Los modelos deformables fueron introducidos por Kass *et al.* en 2D [14] y extendidos al caso 3D por Terzopoulos *et al.* [16]. Algunos de los modelos deformables reseñados por Montagnat *et al.*, como *level sets*, *spring-mass*, y modelos de elementos finitos; son también incluidos aquí junto con algunas otras aproximaciones relacionadas, y combinaciones de éstas.

En este artículo se presentan principalmente las formulaciones de dos modelos para deformar superficies, junto con algunos experimentos aplicando estos modelos. La estructura del artículo es la siguiente: en la sección 2 se presentan las generalidades de los modelos de deformación, profundizando en un modelo particular de mapeo de superficies en la subsección 2.1. Las consideraciones y formulación del modelo basado en las características físicas del problema se presenta en la sección 3, mientras que el modelo basado en consideraciones variacionales se presenta en la sección 4. Para terminar, en la sección 5 se presentan algunos resultados obtenidos utilizando los métodos descritos; y con la sección 6 se concluye el artículo y se delinean las actividades futuras.

## 2. MODELOS DE DEFORMACIÓN DE SUPERFICIES

Las deformaciones de superficies 3D han sido exploradas en los últimos 20 años, en aplicaciones tales como la animación computarizada, el modelamiento de materiales y el análisis de estructuras anatómicas en imágenes médicas. La primera referencia a este tipo de problemas la constituye el obtener una representación plana de una superficie curva, como por ejemplo una esfera. Este problema fue estudiado por Gauss hacia 1828, quien mostró que, debido a la diferencia entre las curvaturas Gaussianas<sup>1</sup> de la superficie curvada y su repre-

---

<sup>1</sup>**Curvatura:** es básicamente la cantidad por la que un objeto geométrico se desvía de ser plano. En superficies, se encuentran las *curvaturas principales*,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , que indican la curvatura mínima y máxima en un punto de la superficie; la *curvatura media*, que es el promedio de las curvaturas principales y la *curvatura Gaussiana*, que es el producto de  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ .

sentación en el plano, no era posible solucionarlo de manera totalmente exacta. Sin embargo, hacia 1989, empezaron a publicarse las primeras soluciones aproximadas de este problema. La investigación en este campo continúa con aproximaciones planas cada vez más acertadas de las superficies 3D, y se han explorado además otras posibilidades, como suavizar la geometría de la superficie o obtener un mapeo entre los puntos de la superficie y otra más simple.

Los modelos para deformar superficies reseñados en la literatura más reciente pueden clasificarse en tres tipos primordiales: Modelos que aplanan una superficie, los cuales buscan obtener una representación en el plano euclidiano de la superficie 3D, insertando si es necesario líneas de corte que mejoren la proyección,; modelos que suavizan la geometría de la superficie, con los que se obtiene una representación alisada, que conserva la forma 3D pero elimina los picos y valles demasiado pronunciados; y métodos de mapeo de superficies, donde se busca proyectar los puntos de la superficie 3D en otra de geometría más simple y con una topología similar (como una esfera).

Los trabajos realizados por David Van Essen *et al.* ([1, 3–7, 12, 13]) y Bruce Fischl *et al.* ([2, 8–10]), son los más sobresalientes en el estudio de la corteza cerebral, y constituyen un buen ejemplo y referencia de los trabajos que se pueden realizar con los modelos de deformación basados en superficies. Sus artículos presentan desarrollos muy completos acerca de los tres tipos de modelos considerados anteriormente, y también han elaborado herramientas de *software*, como **SureFit**<sup>2</sup>, **Caret**<sup>3</sup> y **SuMS**<sup>4</sup>, reseñadas en [6], las cuales permiten al usuario realizar diversos análisis sobre superficies de la corteza cerebral y aplicar operaciones como suavizado, transformaciones geométricas, proyecciones, aplanado y otras deformaciones.

## 2.1 Mapeo de Superficies

Con la aplicación de los métodos de mapeo de superficies se busca proyectar todos los puntos de la superficie 3D en otra de geometría más simple y con las mismas características topológicas, la cual generalmente corresponde a una esfera o una elipsoide. La fundamentación primordial de estos métodos es la geometría de superficies de Riemann, que afirma que cualquier superficie sin hoyos o intersecciones consigo misma puede mapearse de forma conforme en una esfera, y cualquier porción de la superficie puede mapearse en un disco [11]. Se hace necesario determinar las características de la esfera de forma que el área de su superficie se aproxime lo más posible al área de la superficie 3D inicial. También es necesario determinar una estrategia para manejar la desigualdad en la concentración de los puntos, debido a los plegamientos que pueda tener la superficie inicial.

La aproximación más sencilla, presentada en el artículo [8], iterativamente actualiza la posición de cada uno de los vértices en la malla de triangulación de acuerdo a una fuerza de suavizado  $F_S$  y a una fuerza radial  $F_R$ :

$$x_k(t+1) = x_k(t) + F_S(t) + \lambda_R F_R(t) \quad (1)$$

<sup>2</sup><http://brainvis.wustl.edu/resources/surefitnew.html>

<sup>3</sup><http://brainmap.wustl.edu/resources/caretnew.html>

<sup>4</sup><http://sumsdb.wustl.edu:8081/sums/index.jsp>

donde  $x_k$  representa la posición del  $k$ -ésimo vértice en la iteración  $t$ .

La fuerza de suavizado está conformada por un componente local y uno global. El componente local mueve cada vértice en la dirección del centroide de sus vecinos, mientras que el componente global proyecta hacia afuera el promedio del movimiento hacia adentro que se crea sobre toda la superficie, éste es utilizado como un componente de corrección. La fuerza de suavizado está dada por:

$$F_S = \frac{1}{N_k} \sum_{j \in N_k} (x_j - x_k) - \frac{1}{V} \sum_i^V \sum_{j \in N_i} (\mathbf{n}_i \mathbf{n}'_i) \cdot (x_j - x_i) \quad (2)$$

donde  $N_k$  corresponde al conjunto de vértices vecinos al  $k$ -ésimo vértice,  $V$  es el número de vértices en la malla y  $\mathbf{n}_k$  y  $\mathbf{n}'_k$  representan el vector normal a la superficie en el vértice  $k$  y su transpuesto.

La fuerza radial conduce cada vértice hacia la superficie de una esfera de radio  $R$ :

$$F_R = (R_k - x_k) \quad (3)$$

utilizando  $R_k$  como la proyección radial de  $x_k$  en la esfera de radio  $R$ .

Aplicando esta aproximación, se obtiene la representación de la superficie 3D en una esfera, sin embargo, los autores consideran un segundo paso en el procesamiento, donde se evalúa el mapeo inverso (de la esfera hacia la superficie inicial) y en aquellos puntos en donde éste es multivaluado, se establece un nuevo y único mapeo.

## 3. MODELO FÍSICO DE DEFORMACIÓN

El modelo físico de deformación se formuló utilizando las ecuaciones que describen las tensiones de una membrana bajo escenarios de deformación, adaptándolas al caso particular.

Se considera una membrana delgada estirada sobre un marco horizontal. Esta membrana es sometida a ciertas deformaciones en sentido vertical, de forma que se presentan fuerzas de tensión en cada punto de la membrana. Si se considera únicamente una sección vertical de la membrana, aparecerá como una curva, tal como se muestra en la figura 1, donde  $u$  corresponde al desplazamiento vertical con respecto a la posición normal.

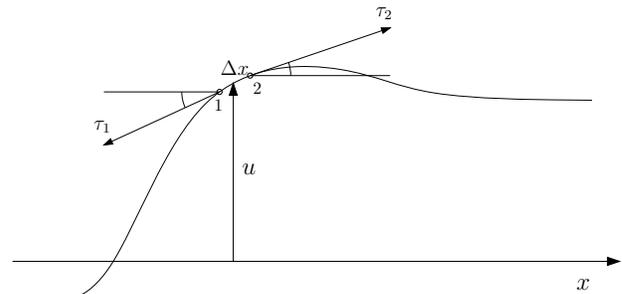


Figure 1: Sección transversal de la membrana deformada

Así, para un pedazo de la superficie de longitud  $\Delta x$  y ancho  $\Delta y$ , la fuerza a lo largo de la arista 1 es  $\tau_1 \Delta y$  con un ángulo  $\theta_1$ , y de manera similar para la arista 2. Así que la fuerza resultante es de la forma

$$\Delta F = \tau_2 \Delta y \sin \theta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \theta_1$$

La ecuación de fuerzas para el modelo de deformación, basado en lo anterior, es

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_R = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right) \right] \quad (4)$$

donde  $F_R$  corresponde a la fuerza radial a aplicar (ecuación 3), y  $\tau$  corresponde a la tensión superficial sobre cada punto. Esta tensión superficial se modelará, en este caso, en función de la curvatura, puesto que en aquellos puntos donde la curvatura es más alta, se genera una tensión mayor que los hace retornar a su posición original. La curvatura en cada punto de la superficie se calcula con la siguiente fórmula

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

Con este método se espera que aquellas métricas como áreas y longitudes se preserven en un alto grado en aquellos puntos donde la curvatura es mínima, debido a que la tensión depende directamente de la curvatura.

#### 4. MODELO VARIACIONAL DE DEFORMACIÓN

El modelo variacional considera las ecuaciones que describen la preservación local del área alrededor de cada punto de la superficie, y con ellas construye una expresión para el movimiento de evolución de estos puntos.

El objetivo es plantear las ecuaciones de evolución de los  $N_V$  vértices  $x_i$  de una triangulación de una superficie cerrada que, conservando (lo más aproximadamente posible) el área de la triangulación, la hagan evolucionar a una forma esférica. Para esto, se tienen las siguientes consideraciones:

$$S(\vec{x}) = \text{const}$$

$$\dot{S}(\vec{x}) = 0$$

donde  $S$  corresponde a la superficie a deformar. Se exigirá en particular que un  $x_i$  dado evolucione durante el movimiento de manera que

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0$$

Esto asegura una “conservación local” del área alrededor de  $x_i$ .

El área total se puede expresar como la suma

$$\sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) + S'(\vec{x}') = 0$$

donde  $s(x_i, x_j, x_{j+1})$  es el área de uno de los triángulos del abanico que tiene a  $x_i$  como vértice común y a los vecinos  $x_j, j = 1, \dots, N_i$  como vértices ordenados consecutivos.

Según esto, la derivada parcial de  $S$  respecto a  $x_i$  implica sólo derivar los sumandos  $s(x_i, x_j, x_{j+1})$ , de modo que la restricción para la constancia de la superficie se reduce a

$$\dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

$$\dot{x}_i \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) = 0$$

Esta condición indica que el vector  $\dot{x}_i$  debe ser perpendicular al vector

$$k_i = \sum_j \nabla_i s(x_i, x_j, x_{j+1}) \quad (5)$$

De este modo, si para llevar un punto  $x_i$  de la forma original a la superficie de una esfera se propone una velocidad  $v_i$  (que depende de la distancia a la superficie de la esfera y, posiblemente, de la “suavidad” de la superficie), se tendrá que la ecuación

$$\dot{x} = v_i$$

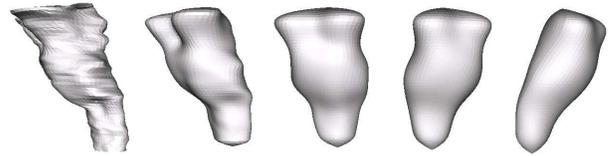
se debe modificar a

$$\dot{x} = v_i - \frac{v_i \cdot k_i}{|k_i|^2} k_i \quad (6)$$

para que se conserve el área. Para el caso particular, la velocidad que lleva los puntos hacia la superficie de la esfera es la misma fuerza radial definida por la ecuación 3.

#### 5. RESULTADOS

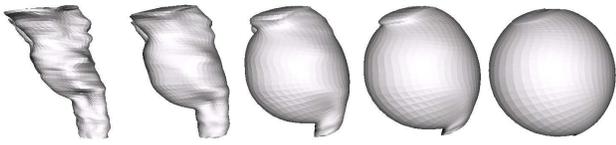
Inicialmente, se estudió el modelo de mapeo de superficies presentado en la subsección 2.1, y para analizar el efecto de las deformaciones en las métricas, se implementó este método utilizando la librería de visualización VTK, y una malla poligonal que representa un tallo cerebral. Actualizando iterativamente los puntos de la malla únicamente con la fuerza de suavizado (ecuación 2), la malla poligonal se deforma hasta tomar una forma lisa y alargada, como se muestra en la figura 2.



**Figure 2: Deformación aplicando únicamente una fuerza de suavizado**

Al aplicar conjuntamente la fuerza de suavizado (2) y la fuerza radial (3), además de suavizar poco a poco la superficie, en cada iteración los puntos de la malla son empujados hasta tomar una forma esférica, como se puede apreciar en la figura 3.

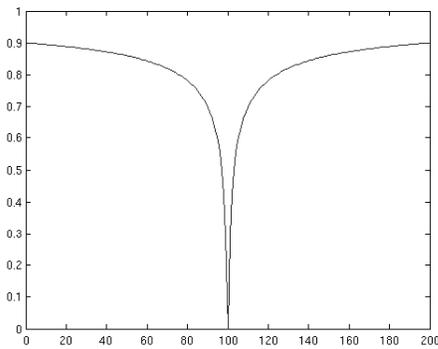
Indiscutiblemente, la aplicación de este método afecta de forma significativa las longitudes y las áreas sobre la superficie, dado que la única consideración para el radio de la



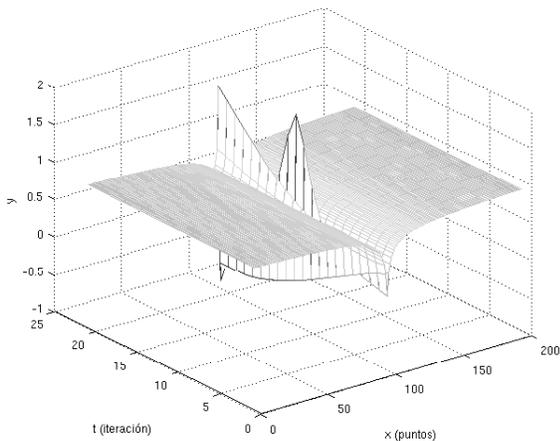
**Figure 3: Deformación aplicando fuerzas radiales y de suavizado**

esfera objetivo son las dimensiones (alto, ancho y largo) de la malla original. Para obtener una esfera de superficie total aproximada a la de la malla original, es necesario sumar las áreas individuales de los triángulos que componen la malla, y luego utilizar este valor para obtener un radio aproximado. Aún así, las áreas y longitudes no se preservan de forma satisfactoria para los análisis morfométricos.

El método basado en consideraciones físicas se analizó inicialmente utilizando una curva 2D, la cual se muestra en la figura 4. La ecuación de fuerzas (4) se simuló utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4, con un tamaño de paso de 0.1 y 20 iteraciones, y el resultado obtenido se muestra en la figura 5.

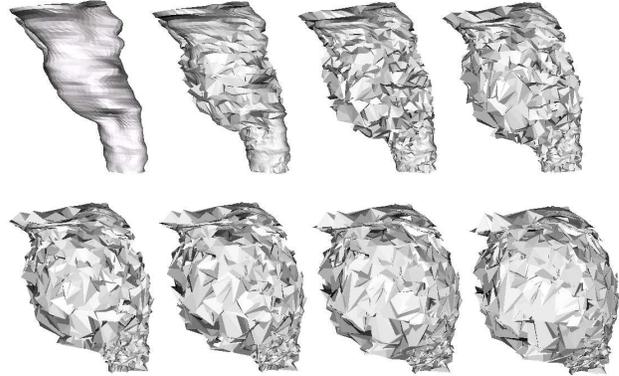


**Figure 4: Curva 2D de prueba para el método físico**



**Figure 5: Resultados de la simulación del método físico**

Por último, el método basado en consideraciones variacionales se implementó utilizando la librería de visualización VTK y la malla que representa un tallo cerebral. Cada punto de la malla se actualizó iterativamente utilizando la ecuación 6, donde  $v_i$  corresponde a la fuerza radial (3). Los resultados obtenidos en la evolución se presentan en la figura 6



**Figure 6: Deformación utilizando un método variacional**

## 6. DISCUSIÓN

La implementación de los diferentes métodos permitió evidenciar su comportamiento; aunque todavía no se dispone de una aplicación para validar la precisión de los modelos de acuerdo a la preservación de las métricas, es posible analizar los resultados con respecto al grado de simplificación de la superficie obtenida.

Con el método físico, se esperaba que la curva 2D se aplanara completamente, sin embargo, la ecuación tiende a oscilar, especialmente en el punto de inflexión, debido a que la derivada en ese punto no está definida. Esta situación requiere la implementación de un esquema *upwind*, con el cual es posible escoger la derivada por la izquierda o por la derecha de acuerdo al sentido en el que viaja la información de la ecuación.

Aplicando el método variacional, y utilizando como velocidad de aproximación la distancia a la superficie de la esfera, la evolución muestra el intento por llegar a una forma esférica, pero la restricción de preservación del área de los triángulos hace que éstos se sobrelapen intentando cumplir con esta restricción. Esta situación se presenta debido a que para calcular el radio de la esfera objetivo no se tiene en cuenta el área total de la superficie original, y al mismo tiempo que se está intentando conservar el área, también se intenta llevar los puntos a una superficie de un área mayor, de forma que el modelo no presenta los resultados esperados. Se requiere entonces un mayor trabajo en la formalización de una estrategia para la selección de un radio adecuado para la esfera objetivo, así como reformular la velocidad de aproximación para que dependa de factores tales como la curvatura total de la superficie.

En general, aún es necesario seguir ajustando los métodos y analizar si los comportamientos no deseados que presentan se deben únicamente a errores en el planteamiento de los

modelos o también a errores en la implementación. El trabajo futuro incluye, además de implementar las herramientas que mejoren el comportamiento de los modelos, validar directamente las superficies obtenidas, calculando el área inicial de los triángulos en la malla y el área final al terminar la evolución.

## 7. REFERENCES

- [1] G. Carman, H. Drury, and D. V. Essen. Computational methods for reconstructing and unfolding the cerebral cortex. *Cerebral Cortex*, 5:506–517, 1995.
- [2] A. M. Dale, B. Fischl, and M. I. Sereno. Cortical surface-based analysis I: Segmentation and surface reconstruction. *NeuroImage*, 9:179–194, 1999.
- [3] H. Drury, M. Corbetta, G. Shulman, and D. Van Essen. Mapping fMRI activation data onto a cortical atlas using surface-based deformation. *NeuroImage*, 7:S728, 1998.
- [4] H. Drury, D. Van Essen, C. Anderson, C. Lee, T. Coogan, and J. Lewis. Computerized mappings of the cerebral cortex: a multiresolution flattening method and a surface-based coordinate system. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 1:1–28, 1996.
- [5] D. C. V. Essen and H. A. Drury. Structural and functional analyses of human cerebral cortex using a surface-based atlas. *The Journal of Neuroscience*, 17:7079–7102, 1997.
- [6] D. C. V. Essen, H. A. Drury, J. Dickson, J. Harwell, D. Hanlon, and C. H. Anderson. An integrated software suite for surface-based analyses of cerebral cortex. *Journal of the American Medical Informatics Association*, 8:443–459, 2001.
- [7] D. C. V. Essen, H. A. Drury, S. Joshi, and M. I. Miller. Functional and structural mapping of human cerebral cortex: Solutions are in the surfaces. *Neuroimaging of Human Brain Function*, 95:788–795, 1998.
- [8] B. Fischl, A. Liu, and A. M. Dale. Automated manifold surgery: Constructing geometrically accurate and topologically correct models of the human cerebral cortex. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20:70–80, 2001.
- [9] B. Fischl, M. I. Sereno, and A. M. Dale. Cortical surface-based analysis II: Inflation, flattening, and a surface-based coordinate system. *NeuroImage*, 9:195–207, 1999.
- [10] B. Fischl, M. I. Sereno, R. B. Tootell, and A. M. Dale. High-resolution intersubject averaging and a coordinate system for the cortical surface. *Human Brain Mapping*, 8:272–284, 1999.
- [11] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis, G. Sapiro, and M. Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6:181–189, 2000.
- [12] J. Harwell, D. V. Essen, D. Hanlon, and J. Dickson. Integrated software for surface-based analyses of cerebral cortex. *NeuroImage*, 13:148, 2001.
- [13] M. Joshi, J. Cui, K. Doolittle, S. Joshi, D. V. Essen, L. Wang, and M. I. Miller. Brain segmentation and the generation of cortical surfaces. *NeuroImage*, 9:461–476, 1999.
- [14] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.
- [15] J. Montagnat, H. Delingette, and N. Ayache. A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation. *Image and Vision Computing*, 19:1023–1040, 2001.
- [16] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraints on deformable models: recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial Intelligence*, 36:91–123, 1988.