

Matemática Combinatória
Gabarito – Teste 4

Questão 1

Seja $F(n-3)$ a quantidade de números divisíveis por 3 entre 1 e $n-3$. Assim, faltam considerar os seguintes números para a solução de $F(n)$:

$n-2$ $n-1$ n

Considerando apenas os números acima, temos:

Caso 1: $n \bmod 3 = 0$ Somente n é divisível por 3.

Caso 2: $n \bmod 3 = 1$ Somente $n-1$ é divisível por 3.

Caso 3: $n \bmod 3 = 2$ Somente $n-2$ é divisível por 3.

Assim, temos garantia de que no intervalo $[n-2, n]$ temos sempre um e somente um número divisível por 3, qualquer que seja $n \geq 3$

Logo: $F(n) = \text{“Quantidade de números divisíveis por 3 entre 1 e } n-3\text{”} + \text{“Quantidade de números divisíveis por 3 entre } n-2 \text{ e } n\text{”}$

$$F(n) = F(n-3) + 1 \text{ para } n \geq 4$$

$$F(3) = 1$$

$$F(2) = 0$$

$$F(1) = 0$$

Questão 2

Seja $F(n)$ a quantidade de casais de coelhos no n -ésimo mês. Como não há migrações nem mortes, temos:

$$F(n) = \text{“casais anteriores”} + \text{“casais novos”}$$

Seja $F(n-1)$ a quantidade de casais de coelhos no $(n-1)$ -ésimo mês. Logo:

$$F(n) = F(n-1) + \text{“casais novos”}$$

De acordo com o problema, casais com 2 meses de idade geram 2 casais novos e casais com 3 ou mais meses de idade geram apenas 1 casal novo.

Assim temos:

$$F(n) = F(n-1) + \text{“filhotes de casais com 2 meses”} + \text{“filhotes de casais com 3 ou mais meses”}$$

$$\text{“casais com 2 meses”} = \text{“casais com 2 ou mais meses”} - \text{“casais com 3 ou mais meses”}$$

$$\text{“casais com 2 meses”} = F(n-2) - F(n-3)$$

$$\text{Portanto: “filhotes de casais com 2 meses”} = 2[F(n-2) - F(n-3)]$$

“casais com 3 ou mais meses” = $F(n-3)$

Portanto: “filhotes de casais com 3 ou mais meses” = $F(n-3)$

Substituindo ambas equações na solução, obtemos:

$$F(n) = F(n-1) + 2[F(n-2) - F(n-3)] + F(n-3)$$

$$F(n) = F(n-1) + 2F(n-2) - F(n-3) \text{ para } n \geq 3$$

$$F(2) = 3$$

$$F(1) = 1$$

$$F(0) = 1$$