Lista 7 de Matemática Combinatória (Teoria dos Grafos)

1 Mostre que num grupo de pelo menos duas pessoas sempre existem duas com exatamente o mesmo número de amigos dentro do grupo.

2 Prove que, numa reunião com seis pessoas, existem três pessoas que se conhecem mutuamente ou existem três pessoas que não se conhecem mutuamente.

3 Prove que se dois grafos são isomorfos, então eles tem o mesmo número de vértices e o mesmo número de arestas. A recíproca é verdadeira?

4 Mostre que existem 11 grafos não isomorfos com quatro vértices. E quantas são as árvores não isomorfas com 7 vértices?

5 Mostre que o grafo bipartido completo $K_{m,n}$ tem mn arestas. Mostre que se G é bipartido, então G tem no máximo $n^2/4$ arestas.

6 Mostre que
(i) Todo subgrafo induzido de um grafo completo é completo.
(ii) Todo subgrafo de um grafo bipartido é bipartido.

7 Prove que G é conexo se e somente se, para toda partição de V em dois conjuntos não vazios V_1 e V_2, existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e uma extremidade em V_2.

8 Prove que um grafo e o seu complemento não podem ser ambos não conexos.

9 A *matriz de adjacências* de um grafo com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é definida como $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é adjacente a } v_j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que A^k, a k-ésima potência da matriz A, tem como entrada a_{ij} o número de passeios de tamanho k do vértice i ao vértice j.

10 O *grafo de linha* $L(G)$, associado ao grafo G, é definido como o grafo com conjunto de vértices o conjunto de arestas de G e dois vértices são adjacentes em $L(G)$ caso as arestas correspondentes tenham um extremo comum em G. Prove que se G é conexo, então $L(G)$ é conexo. Encontre uma expressão para o número de arestas de $L(G)$ em termos dos graus dos vértices de G.

11 Mostre que o número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.

12 Suponha que queremos construir um grafo G com 20 arestas e que todos os vértices tem grau 4. Quantos vértices tem o grafo?

13 O complemento de um grafo é um grafo com o mesmo conjunto de vértices que o grafo original e como conjunto de arestas, precisamente as arestas que não pertencem ao grafo original. Um grafo é auto-complementar se ele e o seu complemento são isomorfos. Prove que um grafo auto-complementar tem $4k$ ou $4k+1$ vértices, para k um inteiro não negativo.

14 Um grafo é d-regular se todos os seus vértices possuem grau igual a d. Sejam d e n inteiros tais que dn é par e $0 \leq d \leq n-1$. Construa um grafo d-regular com n vértices.

15 Seja G um grafo bipartido com partição do conjunto de vértices em X e Y e d-regular, onde $d \geq 1$. Prove que $|X| = |Y|$.

16 Um *k-cubo* é um grafo cujos vértices são todas as k-uplas ordenadas de 0's e 1's, de tal modo que dois vértices são adjacentes se e somente se suas k-uplas diferem por uma coordenada, no máximo. Mostre que um k-cubo é um grafo bipartido com $n = 2^k$ e $m = k2^{k-1}$.

17 Um **torneio** é um grafo direcionado onde para qualquer par de vértices a, b exatamente uma das arestas direcionadas (a, b) ou (b, a) existe. Um **caminho hamiltoniano** num grafo direcionado é um caminho direcionado que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez. Prove que todo torneio tem um caminho hamiltoniano.

18 Dado um grafo G, prove que é possível pintar os vértices de G com duas cores 0 e 1, de modo que, para cada vértice colorido com cor x, pelo menos metade dos seus vizinhos são pintados com a cor $1 - x$.

19 Deseja-se organizar uma festa numa empresa. A empresa é organizada hierarquicamente em uma árvore enraizada. Queremos convidar o número máximo de pessoas possível à festa, satisfazendo a condição de que nunca convidamos um funcionário e seu chefe imediato. Descreva um algoritmo que resolve este problema. Mostre que sempre é possível organizar uma festa ótima e democrática, i.e., uma festa com número máximo de pessoas satisfazendo a restrição de nunca convidarmos um funcionário e seu chefe imediato, e com todas as folhas convidadas.