

## Lista 5 de Matemática Combinatória (Princípio da Gavetas)

- 1 Prove que, dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos 2 pessoas aniversariam no mesmo mês.
- 2 Escolha 101 números ao acaso dentre os elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, 200\}$ . Prove que, entre os números escolhidos, existem dois números tais que um deles divide o outro. Compare a sua solução com a solução que você apresentou na Lista 1, primeiro exercício.
- 3 Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor que ou igual a  $\sqrt{2}$ .
- 4 Assuma que "conhecer" é uma relação simétrica. Mostre que em um conjunto de  $n \geq 2$  pessoas existem sempre duas pessoas que conhecem o mesmo número de pessoas do conjunto.
- 5 É dado um conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  de  $m$  números inteiros ( $m > 1$ ). Mostre que existem naturais  $r$  e  $l$ , com  $1 \leq r \leq l \leq m$ , tais que  $a_r + a_{r+1} + \dots + a_l$  é múltiplo de  $m$ .
- 6 Prove que, dado um conjunto de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.
- 7 São dados dois discos  $A$  e  $B$ , cada um deles dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de branco ou de preto. No disco  $A$  existem 100 setores brancos e 100 setores pretos, em ordem desconhecida. No disco  $B$  não sabemos quantos setores são brancos. Coloquemos o disco  $A$  sobre o disco  $B$ , de modo que os setores de  $A$  fiquem exatamente sobre os setores de  $B$ . Prove que é possível, rodando o disco  $A$ , obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de  $A$  tenham a mesma cor que os correspondentes de  $B$ .
- 8 Em uma gaveta existem 12 meias brancas e 12 meias pretas. Quantas meias devemos retirar ao acaso para termos certeza de obter um par de meias de mesma cor?
- 9 É realizada uma prova de vestibular. Comparecem 63127 candidatos. A prova consiste de 25 questões de múltipla-escolha com 5 alternativas por questão.
  - (i) Considere a afirmação: pelo menos 2 candidatos responderam de modo idêntico as  $k$  primeiras questões da prova. Qual é o maior valor de  $k$  para o qual podemos garantir que a afirmação acima é verdadeira?
  - (ii) Refaça o ítem anterior para a afirmação: pelo menos 4 candidatos responderam de modo idêntico as  $k$  primeiras questões da prova.
- 10 Um ponto  $(x, y, z)$  de coordenadas reais é dito inteiro se todas as suas coordenadas são inteiras.
  - (i) Considere um conjunto de 9 pontos inteiros. Mostre que o ponto médio de algum dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.
  - (ii) Dê um exemplo de um conjunto de 8 pontos inteiros tais que nenhum dos pontos médios dos segmentos que ligam esses pontos é inteiro.
- 11 Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?
- 12 Mostre que em todo  $(n + 1)$ -subconjunto de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  existem dois elementos tais que um deles divide o outro.