Lista 4 de Matemática Combinatória (Princípio de Inclusão e Exclusão)

1
(i) Enuncie o princípio de inclusão e exclusão.
(ii) Demonstre o princípio de inclusão e exclusão.

2 Sejam $\mathcal{A}$ um conjunto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de $\mathcal{A}$ e

$$\begin{aligned} S_0 &= \#\mathcal{A}; \\ S_1 &= \sum_{i=1}^{n} \#(A_i); \\ S_2 &= \sum_{1\le i<j\le n} \#(A_i \cap A_j); \\ S_3 &= \sum_{1\le i<j<k\le n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k); \\ &\vdots \end{aligned}$$

Então:
a) O número de elementos de $\mathcal{A}$ que pertencem a exatamente p dos subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é ...
b) O número de elementos de $\mathcal{A}$ que pertencem a pelo menos p dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é ...
c) O número de elmentos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ é ...

3 Quantos são os inteiros, compreendidos entre 1 e 1000 inclusive, que são divisíveis por *exatamente* dois dos números 2, 3, 7 e 10? E por pelo menos dois?

4 Quantos inteiros entre 1 e 1000 são divisíveis por 3 ou por 7?

5 Quantos inteiros entre 1 e 1000 não são divisíveis por 2, 3, 5 ou 7?

6 Para um jantar numa mesa redonda são convidados n pares de inimigos, $n \ge 2$. Deve-se acomodá-los de modo a separar os pares de inimigos. De quantos modos um mordomo pode acomodá-los?

7 Seja U um conjunto com n elementos, $n \ge 3$. Quantos pares (X, Y) de subconjuntos do conjunto U satisfazem $X \cap Y = \emptyset$?

8 Quatro homens entregam seus guarda-chuvas ao porteiro. Qual a probabilidade de k homens receberem seus próprios guarda-chuvas de volta, $0 \le k \le 4$?

9 Quantos são os anagramas da palavra **capítulo** que têm **c** em primeiro lugar, ou **a** em segundo lugar, ou **p** em terceiro lugar, ou **i** em quarto lugar?

10 Dado um número inteiro positivo n, use o *Princípio de Inclusão e Exclusão* para encontrar uma expressão em função de n para o número de inteiros positivos entre 1 e n que são primos com n.

11 Considere os inteiros na base decimal com n algarismos, $n \ge 2$. Por exemplo, com $n = 3$ temos 100 até 999. Expresse como função de n a quantidade de números que não têm dois algarismos adjacentes iguais. Observe que, permitimos 747, mas não 344.
(i) Usando um argumento combinatório.
(ii) Usando o princípio de inclusão e exclusão.

12 Distribuimos n livros para n crianças, sendo um livro para cada criança. Em seguida recolhemos os livros e os redistribuimos para as n crianças, de novo um livro para cada criança. De quantos modos estas duas distribuições podem ser feitas tal que nenhuma criança receba o mesmo livro duas vezes?