Lista 1 de Matemática Combinatória (Indução)

1 Dado um conjunto E com $n+1$ números escolhidos dentre os $2n$ primeiros números naturais, prove que existem dois números x, y no conjunto E tais que x divide y.

2 Prove usando indução matemática:
(i) Que o termo geral da progressão aritmética é: $a_n = a_1 + (n-1)r$.
(ii) Que o termo geral da progressão geométrica é: $a_n = a_1 q^{n-1}$.
(iii) Que a fórmula para a soma dos termos de uma progressão aritmética é: $S_n = (a_1 + a_n)n/2$.
(iv) Que a fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica é: $S_n = (a_n q - a_1)/(q-1)$.
(v) $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 8 + \ldots + n \times 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$.
(vi) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
(vii) A soma dos cubos de três inteiros consecutivos é um multiplo de 9.

3 Prove usando indução matemática: se $n \geq 10$, então $2^n > n^3$.

4 Os números de Fibonacci são definidos recursivamente como: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, e, para $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Prove por indução que para todo inteiro positivo n:
(i) $\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$.
(ii) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j-1} = F_{2n}$.
(iii) $\sum_{j=1}^{n} F_{2j} = F_{2n+1} - 1$.
(iv) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
(v) $F_{n+1}F_n - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}$.
(vi) $\sum_{j=1}^{2n-1} F_j F_{j+1} = F_{2n}^2$.
(vii) $\sum_{j=1}^{2n} F_j F_{j+1} = F_{2n+1}^2 - 1$.

5 Explique porque o seguinte argumento por indução está errado.
Problema: Provar que um conjunto de bolas tem bolas de apenas uma cor.
Prova: Por indução no tamanho do conjunto de bolas.
O passo inicial diz que cada conjunto unitário tem bolas da mesma cor.
A hipótese de indução supõe que todo conjunto com n bolas tem apenas bolas de uma mesma cor.
Considere então um conjunto com $n+1$ bolas e as numere $1, 2, \ldots, n+1$.
Considere os subconjuntos respectivamente com as bolas de número 1 até n e com as bolas de número 2 até $n+1$.
Por hipótese de indução, cada um desses subconjuntos tem bolas de uma só cor.
Agora, considerando o subconjunto com as bolas de número 2 até n, obtemos que todas as $n+1$ bolas têm a mesma cor.