Matemática Combinatória

Gabarito – Lista 7

Artur Souza, Bruno Leite e Marcos Castro

Questão 1

Sejam as *pessoas* representadas por *nós* e as *relações de amizade* por *arestas*.

Utilizando o *Princípio das Gavetas*:

Para um grafo com n nós, o grau máximo que cada nó pode ter é $n - 1$. No entanto, caso um nó $n_{\text{máx}}$ deste grafo tenha grau máximo, não haverá nós com grau zero, pois todos os nós deverão ser adjacentes a $n_{\text{máx}}$, por definição. Analogamente, não haverá nós com grau máximo caso exista um nó n_{zero} com grau zero. Logo, pelo *Princípio das Gavetas*, existirão n nós para no máximo n-1 gavetas, ou seja, pelo menos dois nós terão o mesmo grau. Traduzindo, pelo menos duas pessoas terão o mesmo número de amigos.

Questão 2

Sejam as seguintes definições:

- as *pessoas* são representadas por *nós;*
- se duas pessoas se conhecem, serão ligadas por *arestas contínuas;*
- se não, serão ligadas por *arestas pontilhadas.*

Como as duas possibilidades de relação entre os nós estão sendo representadas como arestas, este grafo será completo (é só perceber que duas pessoas só podem se relacionar de duas maneiras: ou se conhecem ou não).

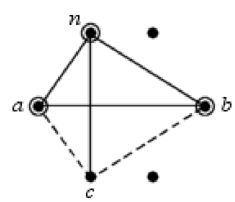
Queremos demonstrar que todo grafo $G(N,A)$, com $|N| = 6$, contém um K_3 formado somente por arestas contínuas ou somente por arestas pontilhadas.

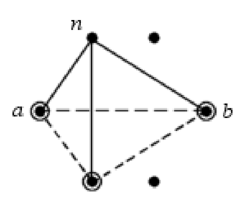
Analisando um determinado nó n (de grau 5, pois G é completo), podemos dividir a demonstração nos seguintes casos (fundamentada pelo *Princípio das Gavetas*):

(1) Das 5 arestas que partem de *n, 3* são *contínuas*;

(2) Das 5 arestas que partem de *n, 3* são *pontilhadas*.

Provaremos apenas (1), pois o raciocínio para provar (2) é análogo.





Sejam a, b e c nós adjacentes a n.

Como o grafo é completo, devemos ligar todos os nós dois a dois. Em relação a a, b e c, isto pode ser feito de duas maneiras:

- alguma das arestas ab, bc ou ac é contínua. Logo um K_3 será formado com n. Por exemplo, se ab for contínua, o K_3 formado será abn.
- nenhuma das três arestas é contínua. Logo abc formará um K_3 de arestas pontilhadas.

Com isso G sempre conterá um K_3, concluindo a demonstração.

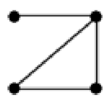
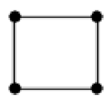
Questão 3

Sejam $G_1(N_1, A_1)$ e $G_2(N_2, A_2)$. G_1 e G_2 serão isomorfos se existir uma função $f: N_1 \rightarrow N_2$ bijetiva tal que $(v,w) \in A_1 \Leftrightarrow (f(v), f(w)) \in A_2$.

Esta bijeção f define uma bijeção $g: A_1 \rightarrow A_2$, onde $g((v,w)) = (f(v), f(w))$. Como f e g são bijeções os conjuntos A_1 e A_2 terão a mesma cardinalidade.

Com isso o número de arestas de G_1 e G_2 é igual. Como f é bijetiva, cada $v \in N_1$ se relacionará unicamente com cada $f(v) \in N_2$. Logo o número de nós de G_1 e G_2 é igual.

A recíproca não é verdadeira. Como contra-exemplo, temos:

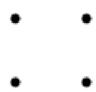

e


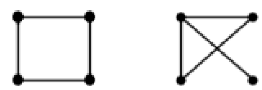
O nó superior esquerdo do grafo à esquerda possui grau 1, enquanto o análogo do grafo à direita possui grau 2. Logo estes grafos não são isomorfos, apesar de terem o mesmo número de nós e arestas.

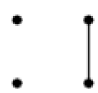
Questão 4

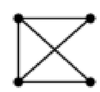
Listando os 11 grafos:

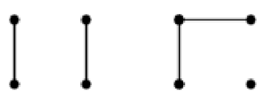
Obs.: dois grafos <u>não</u> são isomorfos se tiverem m distintos ou vértices com graus distintos.

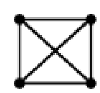
$m = 0$


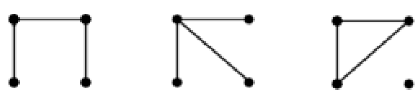
$m = 4$


$m = 1$


$m = 5$


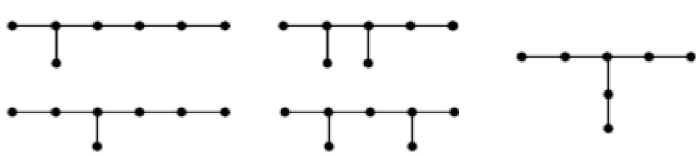
$m = 2$


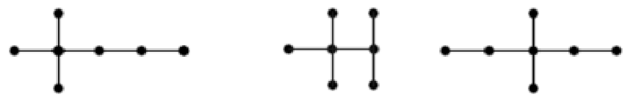
$m = 6$


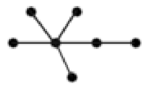
$m = 3$


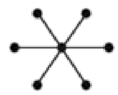
Toda árvore com 7 vértices tem 6 arestas. Dividiremos então por grau máximo (Δ) de cada árvore.

$\Delta = 2$

$\Delta = 3$


$\Delta = 4$ 

$\Delta = 5$ 

$\Delta = 6$ 

Obs.: para $\Delta = 4$ e $\Delta = 5$, foi necessário usar um critério adicional: *número de folhas ligadas ao(s) nó(s) de maior grau.*

<u>Questão 5</u>
Se o grafo é completo, então cada um dos nós de uma partição se liga a todos os nós da outra partição. Assim se uma partição possui m nós e a outra possui n nós, teremos um total de $m \,.\, n$ arestas.

Se o grafo bipartido G possui n nós, então o número de arestas A de arestas será:
A = $(n-x).\, x$, onde se tem $(n-x)$ nós em uma partição e x nós em outra.

Desenvolvendo A:
A = $nx - x^2$
Assim A é uma função de x. Como queremos um valor máximo para A basta calcularmos a derivada em relação a x e igualarmos a zero.

$$\frac{dA}{dx} = -2x + n \longrightarrow -2x + n = 0 \longrightarrow x = \frac{n}{2}.$$

Substituindo em A:

$$A = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

<u>Questão 6</u>
(i) Obtemos um subgrafo induzido ao retirarmos um nó do grafo original. Ao retirarmos um nó de um grafo completo, apenas as arestas adjacentes àquele nó são retiradas de forma que os nós que restaram no grafo induzido continuam interligados todos entre si.

(ii) O complemento de um grafo bipartido terá sempre dois subgrafos induzidos completos. Se retirarmos algumas arestas do grafo bipartido original, estas passarão a existir no complementar não afetando a existência dos dois subgrafos completos. Ao retirarmos alguns nós, estes nós também serão retirados do complementar. Mas como provado no item (i), se estes nós pertencerem a algum subgrafo completo, sua retirada originará outro subgrafo completo. Com isso sempre teremos dois subgrafos induzidos completos no complementar do grafo que permitem a construção de um grafo bipartido.

Solução alternativa: um grafo é bipartido se e somente se não tem como subgrafo um ciclo ímpar. Se o grafo original é bipartido (não possui ciclos ímpares), qualquer subgrafo que criarmos também será, pois não formará ciclos ímpares. Já que para termos o subgrafo tiraríamos algum(s) nó(s) e/ou aresta(s) seria impossível a formação de ciclos ímpares utilizando somente estas operações.

Questão 7

Se o grafo é conexo, deve existir pelo menos um caminho que liga quaisquer dois nós. Tomando, então, um nó de cada partição, deverá haver um caminho entre eles, de forma que haverá uma aresta entre as partições.
Agora suponha que G não é conexo.
Seja:

V_1 = vértices numa componente conexa de V.

$V_2 = V - V_1$

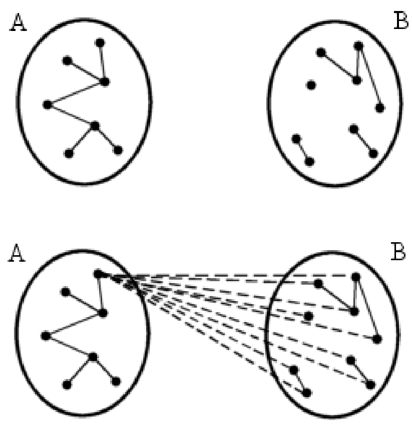
A partição de V em V_1 e V_2 é tal que não existe aresta do tipo xy com $x \in V_1$ e $y \in V_2$.

Questão 8

Assumiremos que G não é conexo e, como conseqüência disto, $\overline{G}$ terá de ser conexo.

Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$, $k > 1$, as componentes conexas de G.

Obs.: um grafo é conexo se existe um caminho para quaisquer vértices x,y deste grafo.



(*Separando por C_1*)
Coloque os vértices de C_1 em A, e coloque os demais vértices em B, conforme mostra a 1ª figura. Fazendo isto para $\overline{G}$, o que acontecerá é que todo vértice de A será adjacente a todo vértice de B (linhas pontilhadas da 2ª figura). Ou seja, existe, em $\overline{G}$, entre qualquer vértice de A um caminho para qualquer vértice de B.
Para mostrar completamente que os dois conjuntos formam um grafo conexo em $\overline{G}$, é necessário verificar que de cada vértice de A (analogamente B) é possível também chegar a outro vértice do mesmo conjunto em $\overline{G}$.

Seja x e y vértices de A. Como os caminhos xz e yz existem (z pertencente a B), existirá também um caminho xy, para todo $x,y \in A$. Logo $\overline{G}$ é conexo.

Questão 9

Provemos por indução:

Seja a matriz de adjacência $A = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$, provaremos por indução em k.

Percebemos que a base (k = 1) é trivial, pois a definição já prova o resultado.

Agora defina a k-ésima potência de A:

$A^k = \left[b_{ij}\right]_{nxn}$

Agora, vamos calcular a (k+1)-ésima potência de A:

$$A^{k+1} = [c_{ij}]_{nxn}, c_{ij} = \sum_{z=1}^{n} b_{iz} a_{zj}$$

Note que para cada termo "c" da nova matriz, temos um somatório. Em que o termo "b" representa o número de passeios de tamanho k de i à z e "a" representa o número de passeios de z até j de tamanho 1, logo esse somatório representa o número total de passeios de tamanho (k+1) de i até j.

Questão 10

(i) G conexo -> L(G) conexo

Para todo v e u em G $\exists$ caminho de v a u. => dadas arestas (v, u) e (v', u') $\exists$ caminho C (V,E) em G entre v e v', ou bem u e u' $\in$ C ou C' – C (V $\cup$ {v,u}, E $\cup$ {(v,u),(v',u')}) é um caminho em G, Logo L(C') também é um caminho, pois arestas adjacentes em G viram vértices adjacentes em L(G), portanto $\exists$ caminho entre quaisquer 2 vértices de L(G).

(ii) m(L(G)) = m'

Para v' representado por (x,y) em E(G):

d(v') = d(x) + d(y) – 2

2m' = $\sum_{(x,y)\in E}$ d(x) + d(y) – 2

Como cada vértice x pertence a d(x) arestas distintas em E.

2m' = $\sum_{v\in V} d^2(v) - 2m$

m' = $\sum_{v\in V} \frac{d(v)(d(v)-1)}{2}$

m' = $\sum_{v\in V} \binom{d(v)}{2}$

Questão 11

A soma dos graus dos nós de um grafo é sempre par (já que é igual ao dobro do número de arcos). Podemos fazer:

A = soma dos graus dos nós de um grafo

B = soma dos graus dos nós de grau par do grafo

C = soma dos graus dos nós de grau ímpar do grafo.

Assim $A = B + C$.

Como A e B são sempre pares, é preciso que C também seja par. Para que C seja par é preciso que ele tenha um número par de parcelas.

Questão 12

$|A| = 20$

Soma dos graus = 2 . $|A|$ = 40

Como todos os vértices devem ter grau 4, n = 40/4 = **10 vértices**.

Questão 13

Seja m_1 o número de arestas de um grafo de n nós e m_2 o número de arestas do grafo complementar.

Consideremos agora o grafo completo em n nós G(N,A) onde $|N| = n$ e $|A| = p$.

Desse modo temos $p = C_2^n = \dfrac{n.(n-1)}{2}$.

Para o grafo ser autocomplementar é preciso que:
$m_1 = m_2$,
$m_1 + m_2 = p$

Com isso temos:
$2m_1 = \dfrac{n.(n-1)}{2}$
$4m_1 = n.(n-1)$

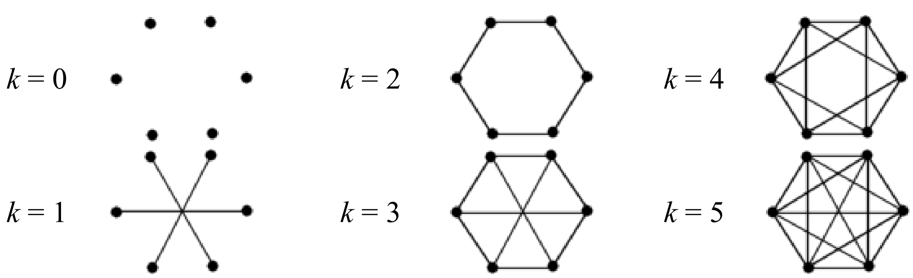
Para que isso ocorra é preciso que n seja um múltiplo de 4 (ou seja, $n = 4k$) ou n-1 seja um múltiplo de 4 (ou seja, $n = 4k+1$).

<u>Questão 14</u>

Se tivermos um d par podemos fazer o seguinte: escrevemos d na forma $d = 2k$ e ordenamos os n vértices em uma forma circular. Agora fazemos cada vértice v_i ficar adjacente aos k vértices anteriores e aos k vértices posteriores em relação à ordem circular.

Se tivermos um d ímpar, n terá que ser par para respeitar a condição dn par.
Podemos escrever $d = 2k+1$. Seguindo a estratégia anterior, além dos k vértices anteriores e posteriores, fazemos cada vértice v_i adjacente ao vértice oposto já que n é par e admite um vértice oposto.

Exemplo: $n = 6$



<u>Questão 15</u>

A = soma dos graus dos nós de X
B = soma dos graus dos nós de Y

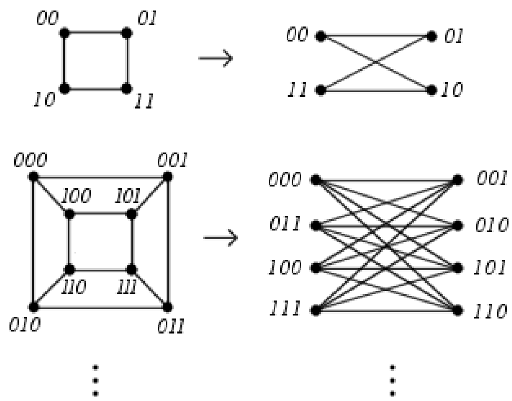
Como o grafo é bipartido, só há arestas entre nós de X e Y. Desta forma, a soma dos graus dos nós de X é igual à soma dos graus de Y. Como os graus de todos os nós são iguais, cada nó tem grau $\dfrac{A}{|X|}$ se o nó pertence a X ou $\dfrac{B}{|Y|}$ se o nó pertence a Y.

Logo: $\dfrac{A}{|X|} = \dfrac{B}{|Y|}$.

Como A = B, $\boldsymbol{|X| = |Y|}$.

<u>Questão 16</u>

Como temos 2^k k-uplas binárias, $n = 2^k$.
Temos:
2m = somatório de d(v) = somatório de k = 2^k.k.
Logo m = 2^{k-1}.k.



Para mostrar que um k-cubo é bipartido precisamos dar a "receita" para a bipartição:
V = número de vértices
V_1 = {vértices com k-upla com número par de zeros}
$V_2 = V \setminus V_1$

Precisamos mostrar que dois vértices num mesmo V_i não são adjacentes (por exemplo, k-uplas de dois vértices num mesmo V_i diferem de mais de uma posição). Mas isso é conquistado pela forma de construção do grafo, onde todos os vértices adjacentes a um outro vértice em questão possuem k-uplas com apenas uma coordenada diferente ao vértice em questão.

<u>Questão 17</u>

Sejam as seguintes definições:
(1) T_k é uma família de torneios com k nós.
(2) (a,b) tem orientação positiva se a aresta for direcionada para b, e negativa se for direcionada para a.

Por indução:

Base: **n** = **2**

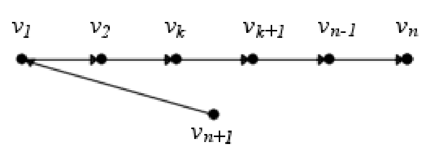
$a \bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet b$ e $a \bullet\!\!\longleftarrow\!\!\bullet b$ têm um caminho hamiltoniano.

Hipótese de indução: existe um caminho hamiltoniano $v_1\ v_2 \ldots v_n$ em G.

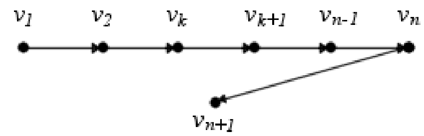
Passo: é adicionado um vértice v_{n+1} a um torneio $G \in T_n$ formando um novo torneio G', $G' \in T_{n+1}$.

Para que exista um caminho hamiltoniano em G' uma das seguintes restrições deve ser atendida:

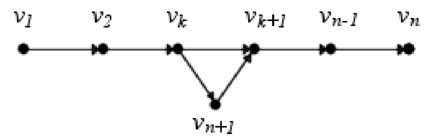
(1) A nova aresta (v_1, v_{n+1}) deve ter orientação negativa.
Neste caso o caminho será $v_{n+1}\ v_1\ v_2 \ldots v_n$.



(2) A nova aresta (v_n, v_{n+1}) deve ter orientação positiva.
Neste caso o caminho será $v_1\ v_2 \ldots v_n\ v_{n+1}$.



(3) As arestas ($v_{k,}$ v_{n+1}) e ($v_{k+1,}$ v_{n+1}) devem ter orientação positiva e negativa, respectivamente, para algum $0 \leq k \leq n$.
Neste caso o caminho será $v_1\ v_2 \ldots\ v_k\ v_{n+1}\ v_{k+1} \ldots v_n$.



É importante perceber que é impossível deixar de atender a uma das restrições. Se (3) não for atendida, podemos dividir em dois casos:

- todas as arestas que partem de v_{n+1} terão orientação igual. Mas isso implica em atender (1) caso todas as orientações sejam positivas, e em atender (2) caso contrário;

- há apenas <u>uma</u> transição de orientação entre as arestas ($v_{k,}$ v_{n+1}) e ($v_{k+1,}$ v_{n+1}): de negativa para positiva. Mas isso implica em ($v_{1,}$ v_{n+1}) ter orientação negativa, o que atende (1).

Logo *G*' também terá um caminho hamiltoniano, assim concluindo a prova.

<u>Questão 18</u>

Seja G o grafo G (V,E)
Inicialmente temos todos os vértices v $\in$ V têm cor 0.
Seja N(v) o conjunto de vizinhos de v $\in$ V.
Seja o(v) o grau de satisfação (nº de vizinhos com cor diferente) do vértice v $\in$ V. Note que inicialmente:

$$S(G) = \sum_{v \in V} o(v) = 0$$

O algoritmo consistem em trocar as cores de todo v $\in$ V em que $o(v) < \frac{|N(v)|}{2}$.

Para cada vértice v $\in$ V que a condição acima é verdadeira:
    Para todo x $\in$ N(v)
        Se cor(v) = cor(x)
            Incrementa o(x)
        Senão
            Decrementa o(x)
    Troca cor de v

Note que o soma S(G) aumenta gradativamente, nenhum o(v), v $\in$ V, satisfaz a condição acima e o algoritmo pára.

<u>Questão 19</u>

Seja T uma árvore T(V,E)

(i) Seja F o conjunto de folhas de T e P(F) o conjunto de pais imediatos de F. Note que, na árvore, |F| >= |P(F)|

O Algoritmo consiste em convidar todas as folhas F e "barrar" todos os pais imediatos P(F). Remova esses vértices e repita o processo até que |V| = 0.

(ii) Indução

Hipótese de Indução: Para toda |T| < n é possível convidar o máximo de pessoas chamando todas as folhas.

Base: n=1 (ok)

Passo: Convidamos todas as folhas (atribuimos 1) e barramos seus pais na árvore (observemos que um chefe pode ser filho de um funcionário menor), excluiremos esses vértices do grafo, o grafo que sobra tem menos que n vértices e é constituído de pelo menos uma componente conexa, nenhum vértice do grafo restate é adjacente a um convidado, logo podemos convidar qualquer um de seus vértices, pela hip. De indução podemos convidar o máximo de vértices das componentes conexas

Logo, juntando o máximo das componentes com os vértices que já determinamos teremos o máximo de convites na árvore original.