Matemática Combinatória
Gabarito – Lista 6
Artur Barbalho de O. Souza

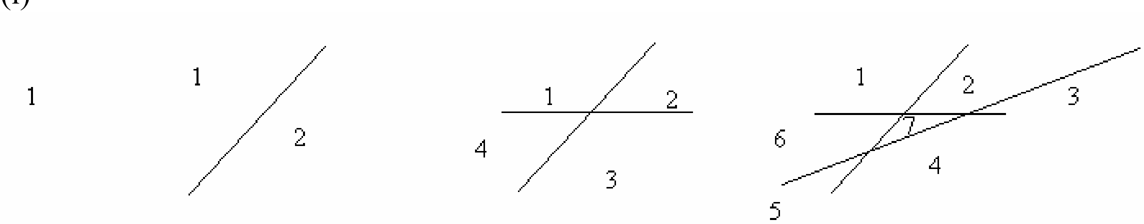
Questão 1

Seja a(n) o número de formas diferentes de subir n degraus. Como podemos subir um degrau ou dois por vez, temos que podemos pular do degrau n-2 direto para n, ou de n-1 para n. Mas não contamos o caso que pulamos de n-2 para n-1 e depois n, pois esse caso já é tratado no caso de n-1 para n. Logo, o número de maneiras de subirmos ao degrau n é o número de vezes que subimos até n-1 e em seguida mais um degrau, e ainda o número de vezes de subir até n-2 e em seguida dois degraus consecutivos.

a(n) = a(n-2) + a(n-1) a(0) = 0 a(1) = 1

Questão 2

(i)



Como nenhuma das retas são paralelas, qualquer nova reta inserida irá interceptar uma única vez cada uma das retas já existentes. Como três retas não se interceptam num mesmo ponto, teremos o número de novas interseções igual ao número de retas existentes anteriormente. Escolhendo um sentido qualquer para a nova reta inserida. Iniciamos percorrendo numa posição tal que a nova reta não tenha nenhuma interseção anterior. O segmento de reta a partir desse ponto até a primeira interseção encontrada divide um espaço anterior em dois (um a mais que antes). A partir de agora, a nova reta divide um outro espaço em dois até encontrar a próxima interseção. Repita o processo até a última interseção, a partir de agora, a reta não intercepta nenhuma outra e divide esse último espaço também em dois. Logo, para n-1 retas, ao acrescentarmos a n-ésima reta, teremos n-1 interseções e subitamente n-1 novos planos, mas depois da última interseção temos inda uma nova divisão, logo temos n-1 + 1 = n novos planos.

a(n) = a(n-1) + n a(0) = 1

(ii)
a(n) = a(n-1) + n
a(n) = a(n-2) + n-1 + n
a(n) = a(n-2) + n-2 + n-1 + n
a(n) = a(0) + 1 + 2 + ... + n

$$a(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$a(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Questão 3

n	a(n)
0	1
1	3
2	9
3	26

Para um conjunto de seqüências de n-1 dígitos e sem subseqüências 012, temos que obtemos um conjunto de n dígitos se concatenamos 0,1 ou 2. Porém, remova as novas seqüências que aparecem com n dígitos que são as seqüências de n-3 dígitos concatenados com 012. Logo:

a(n) = 3 a(n-1) – a(n-3)   a(0) = 1   a(1) = 3   a(2) = 9

Questão 4

(i)

n	a(n)
1	3
2	10
3	36
4	136

Para um conjunto com a solução de n-1, podemos obter a solução para n se concatenarmos 1, 2 ou 3. Mas ainda temos que achar as soluções concatenando zero. Como 4^{n-1} – a(n-1) é o conjunto solução com n-1 dígitos contendo uma quantidade ímpar de zeros, logo são a quantidade de seqüência que com n dígitos temos uma qtd par adicionando um 0.

a(n) = 3 a(n-1) + 4^{n-1} – a(n-1), logo: a(n) = 2 a(n-1) + 4^{n-1} a(1) = 3

(ii)

$$a(n) = 2a(n-1) + \frac{4^n}{4}$$
$$\alpha^n = 2\alpha^{n-1} \leftarrow \textit{Equação Característica}$$
$$\alpha = 2 \leftarrow 4 \ \textit{não é raiz.}$$

$$p(n) = A4^n$$
$$A4^n = 2A4^{n-1} + 4^{n-1}$$
$$4A = 2A + 1$$
$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$a(n) + p(n) = B2^n + \frac{1}{2}4^n \xrightarrow{n=1} 3 = B2 + \frac{4}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$
$$a(n) = \frac{1}{2}\left(2^n + 4^n\right)$$

Questão 5

Uma relação de recorrência válida é a *Relação de Stifel*.

Vide Lista 3 (*Coeficiente Binomiais*) – Questão 2

Questão 6

(i)

$$a(n) - 7a(n-1) + 12a(n-1) = 0$$
$$a(0) = 2$$
$$a(1) = 7$$

$$q(\alpha) = \alpha^n - 7\alpha^{n-1} + 12\alpha^{n-2}$$
$$q(\alpha) = \alpha^2 - 7\alpha + 12$$
$$\alpha_1 = 4$$
$$\alpha_2 = 3$$

$$\begin{cases} 2 = A4^0 + B3^0 \\ 7 = A4 + B3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = A + B \\ 7 = A4 + B3 \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A = 1 \\ B = 1 \end{matrix}$$

$$Logo : a(n) = 4^n + 3^n$$

(ii)

$$a(n) + 9a(n-2) = 0$$
$$a(0) = 2$$
$$a(1) = 0$$

$$q(\alpha) = \alpha^n + 9\alpha^{n-2}$$
$$q(\alpha) = \alpha^2 + 9 \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} \alpha_1 = 3i \\ \alpha_2 = -3i \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2 = A(3i)^0 + B(-3i)^0 \\ 0 = A(3i) + B(-3i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = A + B \\ 0 = A(3i) + B(-3i) \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A = 1 \\ B = 1 \end{matrix}$$

$$Logo : a(n) = (3i)^n + (-3i)^n$$

(iii)

$$a(n) = 4a(n-2) \Rightarrow a(n) - 4a(n-2) = 0$$
$$a(0) = 0$$
$$a(1) = 1$$

$$q(\alpha) = \alpha^n - 4\alpha^{n-2}$$
$$q(\alpha) = \alpha^2 - 4 = 0 \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 0 = A2^0 + B(-2)^0 \\ 1 = 2A - 2B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = 2A - 2B \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$Logo : a(n) = \frac{1}{4}\left[2^n - (-2)^n\right]$$

(iv)

$$a(n) = 3a(n-2) - 2a(n-3) \Rightarrow a(n) - 3a(n-2) + 2a(n-3) = 0$$
$$a(0) = 1$$
$$a(1) = 0$$
$$a(2) = 0$$

$$q(\alpha) = \alpha^n - 3\alpha^{n-2} + 2\alpha^{n-3}$$

$$q(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 2 \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = 1 \end{matrix}$$

$$Soluções : \{(-2)^n, 1^n, n(1)^n\}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B + C = 0 \\ 4A + B + 2C = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A = \dfrac{1}{9} \\ B = \dfrac{8}{9} \\ C = -\dfrac{6}{9} \end{matrix}$$

$$Logo : a(n) = \frac{1}{9}\left[(-2)^n + 8 - 6n\right]$$

(v)

$$a(n) = 3a(n-1) + n + 2$$
$$a(0) = 1$$

$$Eq.Característica : a(n) = 3a(n-1) \Rightarrow \alpha^n = 3\alpha^{n-1} \Rightarrow \alpha = 3$$

$$g(n) = n^1 \xrightarrow{\log o} l = 1$$
$$p(n) = A_0 n^0 + A_1 n^1 = A_0 + A_1 n$$

$$g_2(n) = 2n^0 \xrightarrow{\log o} l = 0$$
$$p_2(n) = B_0$$

$$a(n) = B3^n + A_0 + A_1 n + B_0$$

Após calcular a(1) e a(2), chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 = B + A_0 + B_0 \\ 6 = 3B + A_0 + A_1 + B_0 \\ 22 = 9B + A_0 + 2A_1 + B_0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A_0 + B_0 = C = -\dfrac{7}{4} \\ B = \dfrac{11}{4} \\ A_1 = -\dfrac{1}{2} \end{matrix}$$

$$Logo : a(n) = \frac{1}{4}\left(11(3)^n - 2n - 7\right)$$

(vi)

$a(n) = 2a(n-1) - a(n-2) + 2^n$

$a(0) = 2$

$a(1) = 1$

$Eq.Característica : \alpha^n = 2\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \alpha = 1$

$Soluções : \{1^n, n1^n\}$

$g(n) = 2^n \xrightarrow{\log o} \beta = 2$

$p(n) = A2^n$

$a(n) = A2^n + B + Cn$

Após calcularmos o valor para a(2), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ 1 = 2A + B + C \\ 4 = 4A + B + 2C \end{cases} \xrightarrow{\text{Re}\,solvendo} \begin{matrix} A = 4 \\ B = -2 \\ C = -5 \end{matrix}$$

$Logo : a(n) = 4(2)^n - 2 - 5n$