Matemática Combinatória

Gabarito – Lista 5

Marcos Castro C. T. de Azevedo

Questão 1

Sejam as gavetas definidas pelos 12 meses do ano. Como são 13 pessoas para 12 gavetas, pelo *Princípio das Gavetas* pelo menos uma gaveta deverá conter 2 ou mais pessoas, ou seja, pelo menos 2 pessoas aniversariam no mesmo mês.

Questão 2

Sejam as 100 gavetas definidas pelos números da forma $2^k. m$, onde m é um número ímpar do conjunto {1, 3, 5, ..., 199}. Sendo 101 números escolhidos para 100 gavetas, pelo *Princípio das Gavetas* existirão pelo menos dois números pertencentes à mesma gaveta, ou seja, com o mesmo valor de m.

Sejam $a = 2^p . m$ e $b = 2^q . m$ dois números em uma mesma gaveta. Para $p > q$, a divide b. Para $q < p$, b divide a. Logo um dos números divide o outro em ambos os casos, o que torna a afirmação verdadeira.

Questão 3

Tomando o quadrado Q abaixo:

Q_1	Q_2
Q_3	Q_4

Seja P um ponto qualquer em Q. Logo, P deverá fazer parte de pelo menos um dos quadrados menores (Q_1, ... ,Q_4), de lado 1. Para que dois pontos distem mais de $\sqrt{2}$ eles não podem estar no mesmo quadrado, já que a distância maior entre dois pontos em um mesmo quadrado é a sua diagonal, que vale justamente $\sqrt{2}$.

Consideremos as gavetas da seguinte forma:

Q_1 Q_2 Q_3 Q_4

Como são 5 pontos escolhidos, para 4 gavetas, pelo *Princípio das Gavetas* haverá pelo menos dois pontos que fazem parte de um mesmo quadrado, ou seja, no mínimo haverá um segmento, determinado por estes pontos na mesma gaveta, de comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Questão 4

Sejam as gavetas abaixo:

0 1 ... n-1

Uma pessoa pertence à gaveta m ($0 \leq m \leq n$-1) se ela conhece exatamente m pessoas.

No entanto, como conhecer é uma relação simétrica, caso uma das pessoas não conheça ninguém, não poderá haver pessoas que conheçam a todos, e vice-versa. Logo, uma das duas gavetas (0 ou n-1) deverá ser descartada. Assim, sobram n-1 gavetas para n pessoas e, pelo *Princípio das Gavetas*, pelo menos 2 elementos farão parte da mesma gaveta, ou seja, pelo menos duas pessoas conhecem o mesmo número de pessoas do conjunto.

Questão 5

Sejam os números da forma $mk + r$, onde r é o resto da sua divisão por m. Assim, as m gavetas serão:

mk *mk +1* ... *mk+(m-1)*

Considerando as somas abaixo:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$$

Caso S_j $(1 \le j \le m)$ seja da forma mk, o problema está resolvido (no caso r =1 e $l = j$).

Caso não seja, a gaveta mk poderá ser retirada, restando apenas m-1 gavetas. Só que como são m somas da forma S_j para m-1 gavetas, haverá ao menos duas somas que pertençam à mesma gaveta.

Assim, caso S_a e S_b , com a < b, sejam da mesma gaveta, $S_b - S_a$ será da forma mk. Tomando $a = r$ -1 e $b = l$, o resultado será igual a $a_r + a_{r+1} + \ldots + a_l$; logo existirão r e l para os quais a soma acima seja da forma mk.

Questão 6

Sejam as 12 gavetas abaixo:

Áries *Touro* ... *Aquário* *Peixes*

Pela generalização do *Princípio das Gavetas*, se n gavetas são ocupadas por nk + 1 pessoas, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos k + 1 pessoas.

Seja k = 3 e n = 12. Como 40 > 12 . 3 + 1 = 36, a suposição é verdadeira (pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo dentre um grupo de 40).

Questão 7

Achando o número total de coincidências (T) após girar o disco A ao longo dos 360° graus:

Escolha um setor do disco B. Não importa sua cor, ao longo da rotação de A ele coincidirá 100 vezes com um setor de mesma cor, já que existem 100 pretos e 100 brancos em A (torna-se mais fácil a visualização ao pensar no disco B girando). Para todos os setores de B a lógica permanece. Assim $T =$ **200 . 100 = 20000**.

Também podemos achar o valor de T da seguinte maneira:

Seja a_1 o número total de coincidências em uma posição qualquer do disco. Rodando o disco A em um ângulo de $\frac{360°}{200}$, ou seja, passando para o próximo setor, obtemos agora um total denominado a_2. Aplicando isto para as 200 rotações, teremos que $a_1 + a_2 + ... + a_{200} = T$.

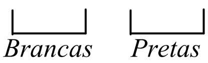
Sabemos que $T = 200.\ 100$, logo:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{200}}{200} = 100$$

Como a média aritmética dos 200 termos é 100, haverá pelo menos um termo que será igual ou maior do que 100. Com isso provamos que é possível obter uma posição na qual pelo menos 100 setores de A tenham a mesma cor que os correspondentes de B.

Questão 8

Sejam as gavetas abaixo:



Pelo *Princípio das Gavetas*, o número mínimo de meias retiradas para que se obtenha com certeza um par de meias de mesma cor é $2\ .\ 1 + 1 =$ **3**.

Questão 9

(i) Pela generalização do *Princípio das Gavetas*:

Total de pessoas: **63127**

Total de gavetas: $\mathbf{5^k}$

Número garantido de pessoas em pelo menos uma das gavetas: **2**

Logo,

$$63127 \geq 5^k + 1 \longrightarrow 63126 \geq 5^k \longrightarrow k \leq \log_5 31563 \cong \mathbf{6}{,}87.$$

O resultado obtido nos diz que o valor máximo de k para que $5^k + 1 \leq 63127$ é **6**.

(ii) Analogamente,

$$63127 \geq 3.5^k + 1 \longrightarrow 21042 \geq 5^k \longrightarrow k \leq \log_5 21042 \leq \mathbf{6}{,}19.$$

O resultado obtido nos diz que o valor máximo de k para que $3.5^k + 1 \leq 63127$ é **6**.

Questão 10

(i) Podemos dividir os pontos (x,y,z) da seguinte maneira (p e i significam *par* e *ímpar*, respectivamente):

(p,p,p) *(p,p,i)* *(p,i,p)* *(p,i,i)* *(i,p,p)* *(i,p,i)* *(i,i,p)* *(i,i,i)*

Para que o ponto médio de 2 pontos quaisquer seja inteiro, é necessário que a média aritmética de cada coordenada seja também inteira. Isso quer dizer que para que o ponto médio de P(a,b,c) e Q(d,e,f) seja inteiro a seguinte restrição tem que ser verdadeira:

$$\frac{a+d}{2},\ \frac{b+e}{2} \text{ e } \frac{c+f}{2} \in \text{Z, onde Z é o conjunto dos inteiros.}$$

Para satisfazer a restrição, os numeradores devem possuir a mesma paridade, ou seja, a e d têm que ser ambos pares ou ímpares (respectivamente, b e e, c e f). Isto nada mais significa que P e Q têm que pertencer à mesma gaveta, já que obedecerão à mesma configuração (*i,p,i,* por exemplo).

Como são 9 pontos escolhidos para 8 gavetas possíveis, pelo *Princípio das Gavetas* haverá pelo menos dois pontos em uma mesma gaveta, ou seja, haverá um ponto médio entre estes 9 pontos que será inteiro.

(ii) (0,0,0) , (0,0,1) , (0,1,0) , (0,1,1) , (1,0,0) , (1,0,1) , (1,1,0) , (1,1,1).

Questão 11

Pela generalização do *Princípio das Gavetas*:

N° de gavetas (n): **12**
Número garantido de pessoas em pelo menos uma das gavetas (k+1): **5**

$nk + 1 = 12.\ 4 + 1 =$ **49** pessoas.

Questão 12

Esta é uma generalização da questão 2 desta lista.

Sejam as n gavetas definidas pelos números da forma $2^k.\ m$, onde m é um número ímpar do conjunto $\{1, 3, 5,..., 2n - 1\}$. Sendo $n + 1$ números escolhidos para n gavetas, existirão pelo menos dois números pertencentes à mesma gaveta, ou seja, com o mesmo valor de m.

Sejam $a = 2^p .\ m$ e $b = 2^q.\ m$ dois números em uma mesma gaveta. Para $p > q$, a divide b. Para $q < p$, b divide a. Logo um dos números divide o outro em ambos os casos, o que torna a afirmação verdadeira.