**Lista 4 de Matemática Combinatória (Princípio de Inclusão e Exclusão) – Gabarito**

**1)**
**i)**
Se temos n conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, o número de elementos da união deles, denotado por $\#(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$ é dado por:

$$\#(A1 \cup A2 \cup ... \cup An) = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i) - \sum_{1\le i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... + (-1)^{n-1} . \#(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

**ii)**
Precisamos mostrar que um elemento que pertença a um número p de conjuntos $A_i$'s, para p = 1, 2 ,..., n, é contado pela fórmula do item acima exatamente uma vez. Pertencendo a p dos conjuntos $A_i$'s ele será contado p vezes em

$$\sum_{i=1}^{n} \#(A_i).$$

Em

$$\sum_{1\le i<j} \#(A_i \cap A_j)$$

será contado $C_p^2$, em

$$\sum_{1\le i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$C_p^3$, e assim sucessivamente até o termo $\#(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_r)$ que nos dará uma contribuição igual a 1. É claro que a interseção de mais do que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento, em questão, pertence a exatamente p dos conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., An.

Somando todas essas contribuições teremos:
$C_p^1 - C_p^2 + C_p^3 - C_p^4 + ... + (-1)^{p-1}C_p^p$

Sabemos que:
$C_p^0 - C_p^1 + C_p^2 - C_p^3 + ... + (-1)^pC_p^p = 0$

e que $C_p^0 = 1$.

Logo a soma das contribuições tem que ser igual a 1.

**2)**
**a)**
De acordo com o matemático francês Camille Jordan temos como resposta:

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k . C_{p+k}^k . S_{p+k}$$

Demonstração:

Como é óbvio que, se um elemento de A pertence a menos do que p dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, ele não é contado na soma $a_p$, o que devemos provar é que se um elemento de A pertence a exatamente p dos conjuntos então ele é contado uma vez na soma $a_p$ e que se um elemento pertence a mais do que p dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ então ele não é contado na soma $a_p$.

Ora, a soma $a_p$ é:

$$C_p^0 . S_p - C_{p+1}^1 . S_{p+1} + C_{p+2}^2 . S_{p+2} - ... + (-1)^{n-p} . C_n^{n-p} . S_n$$

Um elemento de A que pertence a exatamente p dos subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$, é contado uma vez em $S_p$ e não é contado em $S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_n$. Logo ele é contado $C_p^0 . 1 = 1$ vez.

Um elemento de A que pertence a exatamente p+j ($j>0$, $p+j \leq n$) dos conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ é contado em $C_{p+j}^p$ das parcelas de $S_p$, em $C_{p+j}^{p+1}$ das parcelas de $S_{p+1}$ etc...

$$C_p^0 . C_{p+j}^p - C_{p+1}^1 . C_{p+j}^{p+1} + ... + (-1)^{n-p} . C_n^{n-p} . C_{p+j}^n$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k . C_{p+k}^k . C_{p+j}^{p+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \frac{(p+k)! . (p+j)!}{k!p!(p+k)!(j-k)!}$$

$$= \frac{(p+j)!}{p!} . \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{1}{k!(j-k)!}.$$

$$= \frac{(p+j)!}{p!j!} . \sum_{k=0}^{j} (-1)^k . C_j^k$$

$$= C_{p+j}^p . (1-1)^j = 0$$

**b)**
Queremos achar $b_p$. Mas:

$b_p = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + ... + a_{n-1} + a_n$, que através de muita manipulação algébrica chega-se ao resultado:

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k . C_{p+k-1}^k . S_{p+k}$$

Para o acompanhamento passo a passo da manipulação algébrica consulte o livro do Morgado, Apêndice 1.

**c)**
Esse caso nada mais é do que $b_1$:

$$b_1 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot C_k^{\,k} \cdot S_{k+1}$$

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = b_1 = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot S_n$$

**3)**
A = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000.
B = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 2.
C = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3.
D = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 7.
E = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 10.

$S_0 = \#(A) = 1000$
$S_1 = \#(B) + \#(C) + \#(D) + \#(E)$
$= \lfloor 1000/2 \rfloor + \lfloor 1000/3 \rfloor + \lfloor 1000/7 \rfloor + \lfloor 1000/10 \rfloor = 1075$

$S_2 = \#(B \cap C) + \#(B \cap D) + \#(B \cap E) + \#(C \cap D) + \#(C \cap E) + \#(D \cap E)$
$= \lfloor 1000/6 \rfloor + \lfloor 1000/14 \rfloor + \lfloor 1000/10 \rfloor + \lfloor 1000/21 \rfloor + \lfloor 1000/30 \rfloor + \lfloor 1000/70 \rfloor$
$= 431$
$S_3 = \#(B \cap C \cap D) + \#(B \cap C \cap E) + \#(B \cap D \cap E) + \#(C \cap D \cap E)$
$= \lfloor 1000/42 \rfloor + \lfloor 1000/30 \rfloor + \lfloor 1000/70 \rfloor + \lfloor 1000/210 \rfloor = 74$

$S_4 = \#(B \cap C \cap D \cap E)$
$= \lfloor 1000/210 \rfloor = 4$

--- exatamente dois:
Pelo exercício 2(a) temos que:

$$a_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k}^{\,k} \cdot S_{p+k}$$

$$a_2 = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{2+k}^{\,k} \cdot S_{2+k} = (-1)^0 \cdot C_2^{\,0} \cdot S_2 + (-1)^1 \cdot C_3^{\,1} \cdot S_3 + (-1)^2 \cdot C_4^{\,2} \cdot S_4$$

$$= S_2 - 3 \cdot S_3 + 6 \cdot S_4 = 431 - 3 \cdot 74 + 6 \cdot 4 = 233$$

--- pelo menos dois:
Pelo exercício 2(b) temos que:

$$b_p = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{p+k-1}^{\,k} \cdot S_{p+k}$$

$$b_2 = \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \cdot C_{2+k-1}^{\,k} \cdot S_{2+k} = (-1)^0 \cdot C_1^{\,0} \cdot S_2 + (-1)^1 \cdot C_2^{\,1} \cdot S_3 + (-1)^2 \cdot C_3^{\,2} \cdot S_4$$

$= S_2 - 2 \cdot S_3 + 3 \cdot S_4 = 431 – 2 \cdot 74 + 3 \cdot 4 = 287$

**4)**
A = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3.
B = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 7.

Queremos achar #(A U B), o número de inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3 e por 7.

Pelo PIE: $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

$S_0 = \#(A) + \#(B) = \lfloor 1000/3 \rfloor + \lfloor 1000/7 \rfloor = 333 + 142$

$S_1 = \#(A \cap B) = \lfloor 1000/(3 \cdot 7) \rfloor = 47$

Resposta: $\#(A \cup B) = S_0 – S_1 = 333 + 142 – 47 = 428$

**5)**
A = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000.
B = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 2.
C = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 3.
D = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 5.
E = conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 divisíveis por 7.

Primeiro calculo #(B U C U D U E), o número de inteiros divisíveis por 2, 3, 5 e 7 e depois retiro este número do total de números do conjunto A.

$\#(B \cup C \cup D \cup E) = \#(B) + \#(C) + \#(D) + \#(E) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(B \cap E) - \#(C \cap D) - \#(C \cap E) - \#(D \cap E) + \#(B \cap C \cap D) + \#(B \cap D \cap E) + \#(B \cap C \cap E) + \#(C \cap D \cap E) - \#(B \cap C \cap D \cap E)$

$$= \lfloor 1000/2 \rfloor + \lfloor 1000/3 \rfloor + \lfloor 1000/5 \rfloor + \lfloor 1000/7 \rfloor - \lfloor 1000/6 \rfloor$$
$$- \lfloor 1000/10 \rfloor - \lfloor 1000/14 \rfloor - \lfloor 1000/15 \rfloor - \lfloor 1000/21 \rfloor - \lfloor 1000/35 \rfloor$$
$$+ \lfloor 1000/30 \rfloor + \lfloor 1000/70 \rfloor + \lfloor 1000/42 \rfloor + \lfloor 1000/105 \rfloor + \lfloor 1000/210 \rfloor$$
$$= 772.$$

Resposta: $\#(A) - \#(B \cup C \cup D \cup E) = 1000 – 772 = 228$

**6)**
Consideramos os pares de inimigos $P_i$’s, para i = 1, 2, ..., n e definimos os seguintes conjuntos:

$A_i$ = conjunto das permutações circulares das 2n pessoas onde os componentes do $i^{\underline{\text{ésimo}}}$ par de inimigos estão juntos, para i = 1, 2, 3, ..., n.

Estamos procurando o complementar da união desses n conjuntos.

$\#(A_i)$ = permutação circular de (2n -1) (um par de inimigos considerado junto) . permutação dos inimigos = (2n - 2)! . 2

$\#(A_i \cap A_j)$ = permutação circular de (2n-2) (dois pares de inimigos considerados juntos) . permutação do primeiro par . permutação do segundo par = (2n-3)! . 2 . 2 = (2n-3)! . 4

$\#(A_i \cap A_j \cap A_k)$ = permutação circular de (2n-3) (três pares de inimigos considerados juntos) . permutação do primeiro par . permutação do segundo par . permutação do terceiro par = (2n-4)! . 2 . 2 . 2 = (2n – 4)! . 8

... e assim sucessivamente até...

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)$ = permutação circular de (2n – n)(todos os pares de inimigos considerados juntos) . permutação de cada um desses pares = $(2n – n – 1)! . 2^n$

O número total de permutações circulares com as 2n pessoas é (2n – 1)! . Logo pelo princípio da inclusão e exclusão temos:

$(2n – 1)! – ((2n – 2)! . 2) . C_n^1 + ((2n – 3)! . 4) . C_n^2 – ((2n – 4)! . 8) . C_n^3 . ... . ((2n - n -1)! . 2^n) . C_n^n$

O que equivale a:

$$(2n – 1)! + \sum_{i=1}^{n} (C_n^i) . (-1)^i . 2^i . (2n-1-i)!$$

**7)**

N = total de pares (X,Y) de subconjuntos de U.

Seja $A_i$ = par (X,Y) tal que X e Y contem o elemento $a_i$.

$S_1 = \#(A_1) + \#(A_2) + ... + \#(A_n)$

$S_2 = \#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + ... + \#(A_{n-1} \cap A_n)$

...e assim sucessivamente até...

$S_n = \#(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$

Pelo Princípio de Inclusão e Exclusão temos que o número $N_0$ procurado é:

$$N_0 = N – S_1 + S_2 – ... + (-1)^n S_n$$

$$N_0 = N + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i S_i$$

**8)**

$k = 4 \rightarrow$ todos recebem seus guarda-chuvas – 1 possibilidade

Probabilidade = 1 / 4!

$k = 3 \rightarrow$ 0 possibilidades pois se três estão com seus guarda-chuvas, o quarto também terá que estar com o seu.

Probabilidade = 0

$k = 2 \rightarrow$ Temos $C_4^2$ modos de selecionar os guarda-chuvas corretos. Para cada um desses modos só há uma maneira de distribuir errado os outros dois guarda-chuvas. Logo temos 6 possibilidades

Probabilidade = 6 / 4!

$k = 1 \rightarrow$ Temos $C_4^1$ modos de selecionar o guarda-chuva correto. Para cada um desses modos temos a permutação caótica $D_3$ dos outros 3 guarda-chuvas.

$D_3 = 3! \cdot (1 - 1/1! + 1/2! - 1/3!) = 2$.

Logo, temos $C_4^1 \cdot 2 = 8$ possibilidades

Probabilidade = 8 / 4!

$k = 0 \rightarrow$ Temos permutações caóticas dos 4 guarda-chuvas.

$D_4 = 4! \cdot (1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4!) = 9$ possibilidades.

Probabilidade = 9 / 4!

**9)**

A = anagramas com <u>c</u> em primeiro lugar
B = anagramas com <u>a</u> em segundo lugar
C = anagramas com <u>p</u> em terceiro lugar
D = anagramas com <u>i</u> em quarto lugar

Procura-se $\#(A \cup B \cup C \cup D)$.

$\#(A) = \#(B) = \#(C) = \#(D) = 7!$ (permutação das outras letras não fixadas)
$\#(A \cap B) = \#(A \cap C) = ... = 6!$ (permutação das outras letras não fixadas)
$\#(A \cap B \cap C) = \#(A \cap B \cap D) = ... = 5!$ (permutação das outras letras não fixadas)
$\#(A \cap B \cap C \cap D) = 4!$ (permutação das outras letras não fixadas)

$\#(A \cup B \cup C \cup D) = C_4^1 \cdot 7! - C_4^2 \cdot 6! + C_4^3 \cdot 5! - C_4^4 \cdot 4! = 16296$

**10)**

Estamos interessados em demonstrar a função $\Phi$ de Euler.

Podemos fazer: $n = (p_1)^{\alpha 1} \cdot (p_2)^{\alpha 2} \cdot ... \cdot (p_r)^{\alpha r}$
Onde $p_1, p_2, ..., p_r$, são os divisores primos de n.

Consideremos agora os seguintes conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, ..., n\}$
$A_1 = \{x \in A \mid x \text{ é múltiplo de } p_1\}$
$A_2 = \{x \in A \mid x \text{ é múltiplo de } p_2\}$

...e assim sucessivamente até...

$A_r = \{x \in A \mid x \text{ é múltiplo de } p_r\}$

Como o valor $\Phi(n)$ é o número de elementos no complementar da união dos $A_i$'s em A, temos:

$\Phi(n) = \#(A) - \#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)$

$$= \#(A) - \sum_{i} \#(A_i) + \sum_{1 \leq i < j} \#(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i < j < k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^r . \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r)$$

Como:

$\#(A) = n;$
$\#(A_i) = n / p_i;$
$\#(A_i \cap A_j) = n / (p_i . p_j);$
...e assim sucessivamente até...
$\#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) = n / (p_1 . p_2 . \ldots . p_r)$

Temos:

$$\Phi(n) = n - \sum_{i} n / p_i + \sum_{1 \leq i < j} n / (p_i . p_j) - \sum_{1 \leq i < j < k} n / (p_i . p_j . p_k) + \ldots + (-1)^r . n / (p_1 . p_2 . \ldots . p_r)$$

$$= n . \left( 1 - \sum_{i} 1 / p_i + \sum_{1 \leq i < j} 1 / (p_i . p_j) - \sum_{1 \leq i < j < k} 1 / (p_i . p_j . p_k) + \ldots + (-1)^r . 1 / (p_1 . p_2 . \ldots . p_r) \right)$$

$$= n . ( 1 - 1 / p_1) . ( 1 - 1/p_2) . \ldots . ( 1 - 1 / p_r)$$

**11)**
**i)**
A posição mais à esquerda do número não pode ser 0. Logo para ela temos 9 possibilidades. A posição adjacente a esta não poderá conter o algarismo escolhido anteriormente. Logo também teremos 9 possibilidades para esta posição. E isso se estende até a última posição <u>n</u> do número.

Logo teremos um total de $9 . 9 . \ldots . 9 = 9^n$ números

**ii)**
Para usar o Principio de Inclusão e Exclusão, temos que encontrar propriedades que definam conjuntos, de modo que o que queremos contar seja o complementar da união desses conjuntos.

Defina n-1 conjuntos assim:
Numere as n posições dos n algarismos da esquerda para a direita como $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
$A_1 = \{\text{números com } d_2 = d_1\}$
$A_2 = \{\text{números com } d_3 = d_2\}$
...
$A_{n-1} = \{\text{números com } d_n = d_{(n-1)}\}$

O que queremos contar, os números que não tem dois algarismos iguais, é exatamente os números que não estão em $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

Como:
- o total de números com n algarismos é $9 . 10^{n-1}$;
- $\#(A_i) = 9 . 10^{n-2}$;
- $\#(A_i \cap A_j) = 9 . 10^{n-3}$

...e assim sucessivamente

Usando a formula do PIE o que queremos contar é igual a:

$$9 . \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} . (-1)^{r} . 10^{n-1-r}$$

Pelo teorema binomial, esta soma é:
$9 . (10 - 1)^{n-1} = 9 . 9^{n-1} = 9^{n}$ , o mesmo resultado obtido em (i).

**12)**
Primeira distribuição → n livros para n crianças – n! possibilidades
Segunda distribuição → permutação caótica dos n livros

$$D_n = n!(1 - 1/1! + 1/2! - ... + (-1)^{n} . 1/n!)$$

No total as distribuições podem ser feitas de $n! . D_n$ modos.

Monitor: Bruno Mayerle Leite
e-mail: brleite@gmail.com