Matemática Combinatória

Gabarito – Lista 3

Marcos Castro C. T. de Azevedo

Questão 1

(i) - *Da esquina A até C*: $C^3_5 \,.\, C^2_2 = \dfrac{5.4.3}{3!} \,.\, 1 = 10$

- *Da esquina C até D*: $C^1_1 = 1$

- *Da esquina D até B*: $C^2_3 \,.\, C^1_1 = \dfrac{3.2}{2!} \,.\, 1 = 3$

Logo o n° de caminhos mínimos de A até B sob as condições acima é:

$$\mathbf{C_{(\,i\,)}} = 10 \,.\, 1 \,.\, 3 = 30$$

(ii) Pontos que passam por C: $\mathbf{P_C} = (C^3_5 \,.\, C^2_2) \,.\, (C^1_4 \,.\, C^3_3) = 40$

Pontos que passam por D: $\mathbf{P_D} = (C^3_6 \,.\, C^3_3) \,.\, (C^2_3 \,.\, C^1_1) = 60$

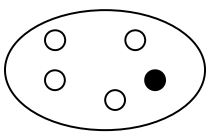
Total de caminhos: $\mathbf{T} = C^4_9 = \dfrac{9.8.7.6}{4!} - 70 = 126 - 79 = 56$

Pontos que não passam nem por C nem por D:

$$\mathbf{T - (P_C + P_D) + C_{(\,i\,)} = 126 - (40 + 60) + 30 = 56}$$

Questão 2

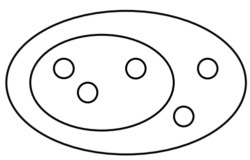
Seja $C^p_n = \dbinom{n}{p}$ o número de maneiras de agrupar n elementos distintos em conjuntos de p elementos. Podemos calcular C^{p+1}_{n+1} da seguinte maneira:



Inserimos um elemento novo no conjunto. Assim o conjunto agora tem $n + 1$ elementos. Agrupamos primeiro os n elementos que já estavam em conjuntos de p+1 elementos, dando um total de C^{p+1}_n maneiras.

Para inserir o novo elemento na contagem, é necessário agrupá-lo com os elementos antigos. Isto pode ser feito de C^p_n maneiras. Com isso todas as possibilidades foram analisadas e pode-se dizer que $C^p_n + C^{p+1}_n = C^{p+1}_{n+1}$, o que representa a *Relação de Stifel*.

Questão 3



Contar o número de maneiras de agrupar n elementos distintos em conjuntos de p elementos é o mesmo que fazer a mesma contagem para n elementos em conjuntos de n-p elementos.

Assim como a imagem acima mostra, contar os p elementos que estão dentro do subconjunto é o mesmo que contar os n-p elementos que estão fora.

Com isso podemos enunciar a *Relação das Combinações Complementares*, denotado por $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Questão 4

Dado um conjunto de *n* elementos, o número de subconjuntos (de 0 a *n* elementos) pode ser escrito de duas maneiras:

1ª maneira:

N° de conjuntos com nenhum elemento + n° de conjuntos de 1 elemento + ... + n° de conjuntos com *n* elementos $= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n}$.

2ª maneira:

Cada um dos *n* elementos pode ser descrito de duas maneiras: ou ele faz parte do subconjunto ou não.

Isto pode ser denotado por 2 . 2 . 2 . ... . 2 = $\mathbf{2^n}$.

Logo, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$, o que representa o *Teorema das Linhas*.

Questão 5

$$S = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + ... + n\binom{n}{n}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} i \frac{n!}{i(i-1)!(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\sum_{i=1}^{n} C^{i-1}_{n-1} = \boldsymbol{n.\ 2^{n-1}}$$

Questão 6

$$\text{Seja } P_n = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + ... + \binom{p+n}{p}$$

Provando por indução:

Base: **n = 0** $\longrightarrow$ $P_0 = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+0+1}{p+0}$

Passo de indução:

$P_n + \binom{p+n+1}{p} = P_{n+1} \longrightarrow \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} = P_{n+1}$ *(hipótese de indução)*

Mas, $\binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} = \binom{p+n+2}{p+1}$ *(relação de Stifel)*

Logo: $P_{n+1} = \binom{p+n+2}{p+1}$, e está provado o teorema.

Solução alternativa:

$$\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$$

$$\binom{p+1}{p} = \binom{p+2}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} \quad \textit{(Relação de Stifel)}$$

$$\binom{p+2}{p} = \binom{p+3}{p+1} - \binom{p+2}{p+1}$$

$$\vdots$$

$$\binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1} - \binom{p+n}{p+1}$$

Somando as equações acima temos que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.

<u>Questão 7</u>

Seja $N_p = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+p}{p}$

Provando por indução:

Base: **p = 0** $\longrightarrow N_0 = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+0+1}{0}$

Passo de indução:

$N_p + \binom{n+p+1}{p+1} = N_{p+1} \longrightarrow \binom{n+p+1}{p} + \binom{n+p+1}{p+1} = N_{p+1}$ *(hipótese de indução)*

Mas, $\binom{n+p+1}{p} + \binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$ *(relação de Stifel)*

Logo: $N_{p+1} = \binom{n+p+2}{p+1}$, e está provado o teorema.

<u>Questão 8</u>

(i) Forma recursiva: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

(ii) Forma fechada: $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Questão 9

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m+1} =$$
$$= \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-2}{m+1} = ... = \binom{n}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m} + ... + \binom{0}{m}$$

Questão 10

$$(2x^3 + x^{-1})^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (2x^3)^k \,.\, (x^{-1})^{20 - k}$$

Determinando k :

$$(x^3)^k\,(x^{-1})^{20 - k} = x^{3k} \,.\, x^{k - 20} = x^8 \longrightarrow x^{4k - 20} = x^8 \longrightarrow 4k - 20 = 8 \longrightarrow k = 7$$

Determinando o termo cuja potência de x é 8 (sendo $k = 7$):

$$T_7 = \binom{20}{7} (2x^3)^7 \,.\, (x^{-1})^{20-7} = \binom{20}{7} 2^7 x^{21} \,.\, x^{-13} = \binom{20}{7} 2^7 x^8$$

Isolando o coeficiente:

$$\binom{20}{7} 2^7 = \frac{20!}{7!.13!} \,.\, 2^7 = 77520 \,.\, 128 = \mathbf{9922560}$$

Questão 11

A resolução deve ser dividida em duas partes: para ***n*** **par** e ***n*** **ímpar**.

Para *n* par:

- *1° passo*: tomando $0 \leq r \leq \dfrac{n}{2}$

Suponha que $\binom{n}{r} > \binom{n}{r-1}$. Então, $\dfrac{n!}{r!(n-r)!} > \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} > \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \longrightarrow \frac{1}{r(r-1)!(n-r)!} > \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{n-r+1} \longrightarrow r < n-r+1 \longrightarrow r < \frac{n+1}{2}$$

Isto torna a suposição verdadeira, pois $r < \dfrac{n+1}{2}$ satisfaz $0 \leq r \leq \dfrac{n}{2}$.

- *2° passo*: tomando $\dfrac{n}{2} \leq r \leq n$

Suponha que $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$. Então, $\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} < \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Analogamente à resolução anterior, $r > \frac{n-1}{2}$.

Isto também torna a suposição verdadeira, pois $r > \frac{n-1}{2}$ satisfaz $\frac{n}{2} \leq r \leq n$.

Assim, para $0 \leq r \leq \frac{n}{2}$ o valor de r para que $\binom{n}{r}$ seja máximo é $\frac{n}{2}$ (*o raciocínio apenas implica em escolher o maior valor deste intervalo, por causa da suposição inicial*). Para $\frac{n}{2} < r \leq n$ o valor de r para que $\binom{n}{r}$ seja máximo também é $\frac{n}{2}$. Ou seja, para n par, o valor de r desejado é $\frac{n}{2}$.

Para *n* ímpar:

- *1° passo*: tomando $0 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$

Suponha que $\binom{n}{r} > \binom{n}{r-1}$. Então, $\frac{n!}{r!(n-r)!} > \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$.

Tal como para n par, $r < \frac{n+1}{2}$.

Isto torna a suposição verdadeira, pois $r < \frac{n+1}{2}$ satisfaz $0 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$.

- *2° passo*: tomando $\frac{n+1}{2} \leq r \leq n$

Suponha que $\binom{n}{r+1} < \binom{n}{r}$. Então, $\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} < \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Analogamente à resolução anterior, $r > \frac{n-1}{2}$.

Isto também torna a suposição verdadeira, pois $r > \frac{n-1}{2}$ satisfaz $\frac{n+1}{2} \leq r \leq n$.

Assim, para $0 \leq r \leq \frac{n-1}{2}$ o valor de r para que $\binom{n}{r}$ seja máximo é $\frac{n-1}{2}$. Para $\frac{n+1}{2} \leq r \leq n$ o valor de r para que $\binom{n}{r}$ seja máximo é $\frac{n+1}{2}$.

Basta agora comparar $\binom{n}{n-1/2}$ e $\binom{n}{n+1/2}$ para saber qual deles assume maior valor. No entanto, pela *Relação das Combinações Complementares*, sabemos que

$\binom{n}{n-1/2} = \binom{n}{n+1/2}$. Logo, para n ímpar, os valores de r para que $\binom{n}{r}$ seja máximo são $\frac{n-1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$.

Questão 12

$$11^4 = (10 + 1)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}10^k . 1^{4-k} = \binom{4}{0}10^0 . 1^4 + \binom{4}{1}10 . 1^3 + \binom{4}{2}10^2 . 1^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}10^3 . 1^1 + \binom{4}{4}10^4 . 1^0 = 1 + 4.10 + 6.100 + 4.1000 + 10000 = \mathbf{14641}$$

Questão 13

Para *n* ímpar:

Queremos provar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n}$.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-2k} = \binom{n}{n} + ... + \binom{n}{3} + \binom{n}{1} =$$

$= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n}$, e assim está provada a igualdade.

Para *n* par:

Queremos provar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}$.

Tomemos $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}$ por N.

A partir desta equação, temos que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = N \longrightarrow 2^n - \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1}\right) = N$$

$$2^n - N = N \longrightarrow 2^n = 2N \longrightarrow 2^{n-1} = N \longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = N$$

Verifica-se, com bastante atenção, que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-1}{n-1} =$$

$$= \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}\right) + ... + \left(\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right).$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\left(\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}\right)$$

Assim, $\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\left(\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{2k+1}$ *(Relação de Stifel)*

$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{2k+1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n-1} = N$, e assim está provada a igualdade.

Solução alternativa (trivial):

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\, a^i \,.\, b^{n-i}$

Tomando $a = -1$ e $b = 1$:

$0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\,(-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + (-1)^n\binom{n}{n}$, e assim está provada a igualdade.

Questão 14

(i) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1).i.(i-1)!}{(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)!}{(i-1)!} = \sum_{i=1}^{n} 2!.\frac{(i+1)!}{(i-1)!.2!}$

$= \sum_{i=1}^{n} 2!.\binom{i+1}{i-1} = \sum_{i=1}^{n} 2!.\binom{i+1}{2}$

Pelo Teorema das Colunas:

$\sum_{i=1}^{n} 2!.\binom{i+1}{2} = 2!.\binom{n+2}{3} = 2!.\frac{n(n+1).(n+2)}{3.2!} = \frac{n(n+1).(n+2)}{3}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + i - i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1).(n+2)}{3} - \frac{(1+n).n}{2} =$

$= \frac{2n(n+1).(n+2)}{6} - \frac{3.(n^2+n)}{6} = \frac{(n+1).[2n.(n+2)-3n]}{6} = \frac{(n+1).[n.(2n+4-3)]}{6} =$

$= \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

Questão 15

$S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{50}\frac{(k+2)(k+1)k(k-1)!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{50}\frac{(k+2)!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{50} 3!.\frac{(k+2)!}{(k-1)!.3!} =$

$\sum_{k=1}^{50} 3!.\binom{k+2}{k-1} = 3!.\sum_{k=1}^{50}\binom{k+2}{3}$

Pelo Teorema das Colunas:

$$3!.\sum_{k=1}^{50}\binom{k+2}{3} = 3!.\binom{53}{4} = 3!.\frac{53!}{4!.49!} = \frac{53.52.51.50}{4} = \mathbf{1756950}$$