Lista 2 de Matemática Combinatória (Combinações e Permutações) – Gabarito

Monitor: Bruno Mayerle Leite

1)

Cores possíveis: Azul, Branco e Cinza.

Para colorirmos uma primeira listra temos 3 possibilidades (as 3 cores possíveis). Para colorirmos qualquer outra listra adjacente temos 2 possibilidades (cores possíveis - cor da listra adjacente). O que leva a:

$\underline{3} . \underline{2} . \underline{2} . \underline{2} = 24$

2)

Algarismos = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} = 10 possibilidades

(i) O número possui o seguinte formato**:** __ __ __

1ªpos. 2ªpos. 3ªpos.

1ª posição – Algarismos - {0} = 9 possibilidades

2ª posição – Algarismos - número escolhido para 1ª posição = 9 possibilidades

3ª posição – Algarismos - números escolhidos para 1ª e 2ª posições = 8 possibilidades

Resposta: 9 . 9 . 8 = 648

(ii) O número possui o seguinte formato**:** __ __ __

1ªpos. 2ªpos. 3ªpos.

-Números pares terminados em 2, 4, 6 ou 8:

3ª posição – 4 possibilidades

1ª posição – Algarismos - {0} - número escolhido para 3ª posição (2,4,6 ou 8) = 8 possibilidades

2ª posição – Algarismos - número escolhido para 3ª posição (2,4,6 ou 8) - número escolhido para 1ª posição = 8 possibilidades

Total1 = 8 . 8 . 4 = 256

-Números pares terminados em 0:

3ª posição – 1 possibilidade

1ª posição – Algarismos - {0} = 9 possibilidades

2ª posição – Algarismos - {0} - número escolhido para 1ª posição = 8 possibilidades

Total2 = 8 . 9 . 1 = 72

Resposta = Total1 + Total2 = 328

(iii) O número possui o seguinte formato: __ __ __

1ªpos. 2ªpos. 3ªpos.

3ª posição – {1,3,5,7,9} = 5 possibilidades

1ª posição – Algarismos - {0} - número escolhido para 3ª posição = 8 possibilidades

2ª posição – Algarismos - números escolhidos para 1ª e 3ª posições = 8 possibilidades

Resposta = 8 . 8 . 5 = 320

3)
(i) prático
vogais = 3
possibilidades = p

$$\underset{3p}{\_\_\_}\ \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}_{P_5}\ \underset{2p}{\_\_\_}$$

Resposta = $P_5 . 3 . 2 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 . 3 . 2 = 720$

(ii) uruguai

$$.\ \underline{\ u\ }\ \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}$$

P_6^2 (Permutação de 6 caracteres com 2 u's repetidos)

$$.\ \underline{\ a\ }\ \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}$$

P_6^3 Permutação de 6 caracteres com 3 u's repetidos)

$$.\ \underline{\ i\ }\ \underbrace{\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_}$$

P_6^3 (Permutação de 6 caracteres com 3 u's repetidos)

Resposta = $P_6^2 + P_6^3 + P_6^3 = \dfrac{6.5.4.3.2.1}{2.1} + \dfrac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} + \dfrac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1} = 600$

(iii) piracicaba
A palavra possui 7 letras diferentes de a. As vogais a podem se encaixar em qualquer posição entre essas letras da seguinte forma:

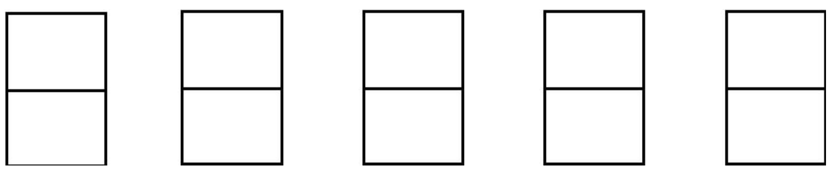
___ (1) ___ (2) ___ (3) ___ (4) ___ (5) ___ (6) ___ (7) ___

Os números entre parênteses representam as letras diferentes de a. As demais posições representam as possíveis posições para a.

Então temos C_8^3 formas de organizar os a's e $P_7^{2,2}$ formas de organizar as demais letras.
$P_7^{2,2}$ = permutação das 7 letras diferentes de a com repetição de dois i's e dois c's

Resposta = $P_7^{2,2} . C_8^3 = \dfrac{7!}{2!.2!} . \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = 1260 . 56 = 70560$

4) Os bancos podem ser imaginados da seguinte forma (cada um com dois lugares):



Banco 1 **Banco 2** **Banco 3** **Banco 4** **Banco 5**

Escolhemos primeiro onde as moças irão se sentar:
moça 1 = 10 possibilidades   moça 4 = 4 possibilidades
moça 2 = 8 possibilidades   moça 5 = 2 possibilidades
moça 3 = 6 possibilidades
Para os rapazes sobram 5 lugares:
Rapaz 1 = 5 possibilidades   Rapaz 4 = 2 possibilidades
Rapaz 2 = 4 possibilidades   Rapaz 5 = 1 possibilidade
Rapaz 3 = 3 possibilidades

Resposta = 10.8.6.4.2.5.4.3.2.1 = 460800

5)
(i) Permutação circular de 5 crianças: (PC)5 = (5-1)! = 4! = 24
(ii)
Total = $(PC)_7 = (7-1)! = 720$
Para calcularmos o número de possibilidades com duas crianças juntas na roda fazemos o seguinte: consideramos duas crianças juntas como se representassem apenas uma. Para isso temos:

$(PC)_6 = (6-1)! = 5! = 120$

Como temos duas crianças diferentes juntas temos que considerar a permutação delas. O que provoca:
120.2! = 240 = número de organizações com 2 crianças juntas.

Resposta = 720 – 240 = 480

6)
--Triângulos com base em R:
- Escolhendo os 2 vértices da base: $C_5^2 = 10$
- Escolhendo o vértice em R1 = $C_8^1 = 8$

T = triângulos com base em R = 10.8 = 80

--Triângulos com base em R1:
-Escolhendo os 2 vértices da base: $C_8^2 = 28$
-Escolhendo o vértice em R: $C_5^1 = 5$

T1 = triângulos com base em R1 = 28.5 = 140

Resposta: T + T1 = 80 + 140 = 220.

7)
(i)
Se fizermos $C_8^4 . C_4^4$ poderá acontecer do primeiro grupo ser igual ao segundo grupo. Para retirar este excesso da contagem basta dividir pela permutação dos dois grupos. Desse modo temos: $C_8^4 . C_4^4 / 2! = 35$

(ii)
O grupo deve ter pelo menos 2 mulheres. Para isso contamos o total de possibilidades e retiramos aquelas com menos de 2 mulheres.
Total de combinações é $C_{11}^{6} = 462$.
Possibilidades com exatamente uma mulher: $C_4^{1} . C_7^{5} = 84$
Possibilidades com exatamente nenhuma mulher: $C_7^{6} = 7$

Resposta: 462 – 84 – 7 = 371

8)
$CR_7^{4} = C_{7+4-1}^{4} = 210$

9)
(i) $CR_2^{5} = C_{3+5-1}^{5} = 21$
(ii) $x + y + z \leq 5$
$x + y + z = 5 \rightarrow CR_3^{5} = C_{3+5-1}^{5} = 21$
$x + y + z = 4 \rightarrow CR_3^{4} = C_{3+4-1}^{4} = 15$
$x + y + z = 3 \rightarrow CR_3^{3} = C_{3+3-1}^{3} = 10$
$x + y + z = 2 \rightarrow CR_3^{2} = C_{3+2-1}^{2} = 6$
$x + y + z = 1 \rightarrow CR_3^{1} = C_{3+1-1}^{1} = 3$
$x + y + z = 0 \rightarrow CR_3^{0} = \underline{C}_{3+0-1}^{0} = 1$

Resposta = 21 + 15 +10 + 6 + 3 + 1 = 56

(iii)
$x = a + 2 \qquad y = b + 2 \qquad z = c + 2$
$x + y + z = 20$
$a + 2 + b + 2 + c + 2 = 20$
$a + b + c = 14$
Para calcular basta fazer: $CR_3^{14} = C_{3+14-1}^{14} = C_{16}^{14} = 120$

10)
-- Para que $f : A \rightarrow B$ represente uma função é preciso que cada elemento de A se associe a um único elemento de B. Como existem 4 elementos em A, cada um deles poderá se associar a qualquer elemento de B. Desse modo temos:
$\underline{\ 7\ } . \underline{\ 7\ } . \underline{\ 7\ } . \underline{\ 7\ } = 2401$ funções

-- $f : A \rightarrow B$ é injetora se, e somente se, 2 elementos distintos quaisquer de A têm imagens distintas. Com isso o primeiro elemento teria 7 possibilidades, o segundo teria 6 (já que não pode ter a imagem do elemento anterior), o terceiro teria 5 (já que não pode ter a imagem dos elementos anteriores), e assim sucessivamente. Desse modo temos:
$\underline{\ 7\ } . \underline{\ 6\ } . \underline{\ 5\ } . \underline{\ 4\ } = 840$ funções injetoras

11)
Só podemos subir um ou dois degraus de cada vez. Então para alcançarmos o fim de uma escada de n degraus, podemos ter subido o último degrau desta escada sozinho ou ter subido os dois últimos degraus de uma só vez.

Subindo o último degrau da escada sozinho: podemos alcançar a posição de um degrau abaixo do fim da escada de A_{n-1} maneiras e depois o subir para alcançar o fim da escada.

Subindo os dois últimos degraus da escada de uma só vez: podemos alcançar a posição de dois degraus abaixo do fim da escada de A_{n-2} maneiras e depois os subir de uma só vez.

Com isso podemos subir uma escada de n degraus de $A_{n-1} + A_{n-2}$ maneiras. Logo:
$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$

12)
(i) Como as 5 cartas são tiradas simultaneamente, não estamos nos importando com a ordem de sacada delas. Com isso podemos fazer: $C_{52}^5 = 2598960$ extrações

(ii) Primeiramente escolhemos a carta do *four of a kind* (que aparece nos 4 naipes). Então temos 13 possibilidades. Depois escolhemos a outra carta. Esta carta pode ser qualquer uma das 48 cartas restantes. Com isso temos:

$13 \cdot 48 = 624$ extrações *four of a kind*

- Solução alternativa:
Escolhemos a carta cujo valor só aparece uma vez. Para isso temos 52 possibilidades. Agora escolhemos a carta do *four of a kind*. Esta tem que ser diferente do valor da primeira carta escolhida. Para isso temos (13 – 1) possibilidades. Desse modo temos:

$52 \cdot 12 = 624$ extrações *four of a kind*

(iii)
Escolhemos a carta do *three of a kind* – 13 possibilidades
Escolhemos os 3 naipes do *three of a kind* – C_4^3 possibilidades
Escolhemos a carta do *two of a kind* – 12 possibilidades
Escolhemos os 2 naipes do *two of a kind* – C_4^2 possibilidades

Com isso temos:
$13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2 = 3744$ extrações *full house*

(iv)
Escolhemos a carta do 1º par – 13 possibilidades
Escolhemos o naipe do 1º par – C_4^2 possibilidades
Escolhemos a carta do 2º par – 12 possibilidades
Escolhemos o naipe do 2º par – C_4^2 possibilidades
Escolhemos a outra carta – 11 possibilidades
Escolhemos o naipe dessa carta – C_4^1

Com isso temos:

$13 \cdot C_4^2 \cdot 12 \cdot C_4^2 \cdot 11 \cdot C_4^1 = 247104$

(v)
Se fizermos 52 . 48 . 44 . 40 . 36 estamos calculando todas as organizações sem nenhum par levando em consideração a ordem de retirada das cartas. Para retirar este excesso na contagem, basta dividirmos este número pela permutação dessas 5 cartas. Desse modo temos:

$$\frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{5!} = 1317888$$ extrações sem nenhum par