Matemática Combinatória
Gabarito – Lista 1
Artur Barbalho de O. Souza

Questão 1

Base $n = 1$

$S_1 = \{1, 2\}$ ➔ 1 divide 2

Hipótese de Indução: Suponha que a propriedade vale para $n >= 1$

Passo: Queremos estabelecer a propriedade para $n + 1$.

$S_{n+1} = \{1, 2, ..., 2n - 1, 2n, 2n + 1, 2n + 2\}$

Selecione $E \subseteq S_{n+1}$, $|E| = (n + 1) + 1 = n + 2$

Caso 1: E contém no máximo um elemento de $\{2n + 1, 2n + 2\}$ (Escolhemos pelo menos $n + 1$ elementos em S_n)

Caso 2: $E = E' \cup \{2n + 1, 2n + 2\}$, $E' \subseteq S_n$, $|E'| = n$
Caso 2.1: $n + 1 \in E'$. Tome $x = n + 1$, $y = 2n + 2$
Caso 2.2: $n + 1 \notin E'$. Mas um divisor z de $n + 1 \in E'$. Tome $x = z$, $y = 2n + 2$
Caso 2.3: E' não contém divisor de $n + 1$. Chamo de $F = E' \cup \{n + 1\}$. A hipótese de indução diz que F contém x,y tais que x divide y. Como E' não contém divisores de $n + 1$, nem x, nem y podem ser iguais a $n + 1$ logo x,y estão na verdade em E', e em E, o conjunto original.

Questão 2

(i)
Base $a_1 = a_1$
Hipótese de indução: $a_n = a_1 + (n - 1) r$
Por passo de indução:
$$a_{n+1} = a_n + r$$
$$a_{n+1} = a_1 + (n - 1) r + r$$
$$a_{n+1} = a_1 + r (n -1 + 1)$$
$$a_{n+1} = a_1 + r n$$

(ii)
Base $a_1 = a_1$
Hipótese de indução: $a_n = a_1 q^{n-1}$
Por passo de indução:
$$a_{n+1} = a_n q$$
$$a_{n+1} = a_1 q^{n-1} q$$
$$a_{n+1} = a_1 q^n$$

(iii)
Base: $S_1 = a_1$
Hipótese de indução: $S_n = (a_1 + a_n) n/2$
Passo de indução:
$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$
$$S_{n+1} = [(a_1 + a_n) n/2] + a_1 + r n$$
$$2S_{n+1} = (a_1 + a_n) n + 2a_1 + 2r n$$
$$2S_{n+1} = n a_1 + n a_n + 2a_1 + 2r n$$
$$2S_{n+1} = (n + 1) a_1 + a_1 + n a_n + 2r n$$
$$2S_{n+1} = (n + 1) a_1 + a_{n+1} + n a_n + r n$$
$$2S_{n+1} = (n + 1) a_1 + a_{n+1} + n (a_n + r)$$

$2S_{n+1} = (n + 1)\ a_1 + a_{n+1} + n\ a_{n+1}$
$2S_{n+1} = (n + 1)\ a_1 + (n + 1)\ a_{n+1}$
$S_{n+1} = (a_1 + a_{n+1})\ (n + 1) / 2$

(iv)
Base: $S_1 = a_1$
Hipótese de indução: $S_n = (a_n\ q - a_1) / (q - 1)$
Passo de indução: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
$S_{n+1} = (a_n\ q - a_1) / (q - 1) + a_1\ q^n$
$(q - 1)S_{n+1} = a_n\ q - a_1 + a_1\ q^n (q - 1)$
$(q - 1)S_{n+1} = a_n\ q - a_1 + a_1\ q^{n+1} - a_1\ q^n$
$(q - 1)S_{n+1} = q\ (a_n + a_1\ q^n - a_1\ q^{n-1}) - a_1$
$(q - 1)S_{n+1} = q\ (a_n + a_1\ q^n - a_n) - a_1$
$(q - 1)S_{n+1} = q\ (a_1\ q^n) - a_1$
$(q - 1)S_{n+1} = q\ (a_{n+1}) - a_1$
$S_{n+1} = (a_{n+1}\ q - a_1) / (q - 1)$

(v) $a_n = n\ 2^{n-1}$

Quero mostrar que $S_n = (n-1)\ 2^n + 1$

Base: $S_1 = a_1$
Hipótese de indução: $S_n = (n-1)\ 2^n + 1$
Passo de indução: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$
$S_{n+1} = (n-1)\ 2^n + 1 + a_{n+1}$
$S_{n+1} = (n-1)\ 2^n + 1 + (n + 1)\ 2^n$
$S_{n+1} = 2^n\ (n - 1 + n + 1) + 1$
$S_{n+1} = 2^n\ 2n + 1$
$S_{n+1} = n\ 2^{n+1} + 1$

(vi) $a_n = 2n - 1$

Quero mostrar que $S_n = n^2$

Base: $S_1 = a_1$
Hipótese de indução: $S_n = n^2$
Passo de indução: $S_{n+1} = n^2 + a_{n+1}$
$S_{n+1} = n^2 + 2(n + 1) - 1$
$S_{n+1} = n^2 + 2n + 2 - 1$
$S_{n+1} = n^2 + 2n + 1$
$S_{n+1} = (n + 1)^2$

(vii) $a_n = n^3$

Quero mostrar que $a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 9k$, para n inteiro

Base: $n = 1$
$a_0 + a_1 + a_2 = 9k$
$0 + 1^3 + 2^3 = 9k$
$1 + 8 = 9k$
$9 = 9k$
$k = 1$
Hipótese de indução: $S_n = a_{n-1} + a_n + a_{n+1} = 9c$
Passo de indução: $S_{n+1} = S_n - a_{n-1} + a_{n+2} = 9k$

$S_{n+1} = 9c - (n - 1)^3 + (n + 2)^3 = 9k$
$S_{n+1} = 9c - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) = 9k$
$S_{n+1} = 9c - 9n^2 + 9n + 9 = 9k$
$S_{n+1} = 9(c - n^2 + n + 1) = 9k$
$k = c - n^2 + n + 1$

Note que isso prova que a soma também é válida para $n < 1$, pois k pode ser menor que c.

Questão 3

$n >= 10$ Quero mostrar que $2^n > n^3$

Base: $n = 10$
$2^{10} > 10^3$
$1024 > 1000$
Hipótese de indução: $2^n > n^3$
Passo de indução: $2^{n+1} > 2^n$

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 \cdot 2^n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot 2^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \cdot n^3 = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)n\right]^3 = \left(n+\frac{n}{n}\right)^3 = (n+1)^3$$

$$Logo: 2^{n+1} > (n+1)^3$$

Questão 4

(i)
Temos:
$S(n) = F(n)F(n +1)$
$a(j) = [F(j)]^2$
$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$

Base: $n = 1$
$S(1) = F(1)F(2) = [F(1)]^2$
$S(1) = (1) (1) = (1)^2$
$S(1) = 1 = 1$
Hipótese de indução: $S(n) = F(n)F(n + 1)$
Passo de indução: $S(n + 1) = S(n) + [F(n + 1)]^2$
$S(n + 1) = F(n)F(n + 1) + F(n + 1) F (n + 1)$
$S(n + 1) = F(n + 1) [F(n) + F(n + 1)]$
$S(n + 1) = F(n + 1) F(n + 2)$

(ii)
Temos:
$S(n) = F(2n)$
$a(j) = F(2j - 1)$

Base: $n = 1$
$S(1) = F(2) = F(2 - 1)$
$S(1) = F(2) = F(1)$
$S(1) = 1 = 1$
Hipótese de indução: $S(n) = F(2n)$
Passo de indução: $S(n + 1) = S(n) + F(2n + 2 - 1)$
$S(n + 1) = S(n) + F(2n + 1)$
$S(n + 1) = F(2n) + F(2n + 1)$
$S(n + 1) = F(2n + 2)$

(iii)
Temos:
$S(n) = F(2n + 1) - 1$
$a(j) = F(2j)$

Base: $n = 1$
$S(1) = F(3) - 1 = F(2)$
$S(1) = 2 - 1 = 1$
$S(1) = 1 = 1$

Hipótese de indução: $S(n) = F(2n + 1) - 1$
Passo de indução: $S(n + 1) = S(n) + a(n + 1)$
$S(n + 1) = F(2n + 1) - 1 + F(2n + 2)$
$S(n + 1) = F(2n + 3) - 1$

(iv)
Temos:
$F(n + 1) F(n - 1) - [F(n)]^2 = (-1)^n$

Base: $n = 2$
$F(3)F(1) - [F(2)]^2 = (-1)^2$
$2 - 1 = 1$
$1 = 1$

Hipótese de indução: $F(n + 1) F(n - 1) - [F(n)]^2 = (-1)^n = S(n)$
Passo de indução: $S(n + 1) = S(n) (-1)$
$S(n + 1) = - S(n)$
$S(n + 1) = - [F(n + 1) F(n - 1) - [F(n)]^2]$
$S(n + 1) = [F(n)]^2 - F(n + 1) F(n - 1)$
$S(n + 1) = [F(n)]^2 - F(n + 1) [F(n + 1) - F(n)]$
$S(n + 1) = [F(n)]^2 - F(n + 1) F(n + 1) + F(n + 1) F(n)$
$S(n + 1) = F(n) [F(n) + F(n + 1)] - [F(n + 1)]^2$
$S(n + 1) = F(n + 2) F(n) - [F(n + 1)]^2$

(v)
Temos:
$F(n + 1) F(n) - F(n - 1) F(n - 2) = F(2n - 1)$

Base: $n = 3$
$F(4)F(3) - F(2)F(1) = F(6 - 1) = F(5)$
$6 - 1 = F(5)$
$F(5) = 5$

Hipótese de indução: $F(n + 1) F(n) - F(n - 1) F(n - 2) = F(2n - 1)$
Utilizando a propriedade provada na questão 4.1:

$$F(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}[F(i)]^2 - \sum_{i=1}^{n-2}[F(i)]^2$$

Passo de indução: $F(2n - 1) + [F(n + 1)]^2 - [F(n - 1)]^2 = F(2n + 1)$

$$\sum_{i=1}^{n}[F(i)]^2 - \sum_{i=1}^{n-2}[F(i)]^2 + [F(n+1)]^2 - [F(n-1)]^2 = F(2n+1)$$

$[F(n - 1)]^2 + [F(n)]^2 + [F(n + 1)]^2 - [F(n - 1)]^2 = F(2n + 1)$
$F(n) F(n) + F(n + 1) F(n) + F(n + 1) F(n - 1) = F(2n + 1)$
$[F(n + 1) - F(n - 1)] [F(n) + F(n + 1)] + F(n + 1) F(n - 1) = F(2n + 1)$
$F(n + 1) [F(n) + F(n + 1)] - F(n) F(n - 1) = F(2n + 1)$
$F(n + 1) F(n + 2) - F(n) F(n - 1) = F(2n + 1)$

(vi)
Temos:
$A(j) = F(j)F(j + 1)$

Base: $n = 1$

$F(1)\ F(2) = [F(2\ .\ 1)]^2$
$1\ .\ 1 = 1$
$1 = 1$

Hipótese de indução: $S(2n - 1) = [F(2n)]^2$

Passo de indução:

$$\begin{aligned}
S(2n + 1) &= S(2n - 1) + F(2n + 1)\ F(2n + 2) + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= [F(2n)]^2 + F(2n + 1)\ F(2n + 2) + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= [F(2n)]^2 + [F(2n + 2) - F(2n)]\ F(2n + 2) + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= [F(2n)]^2 + [F(2n + 2)]^2 - F(2n)\ F(2n + 2) + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= F(2n)\ [F(2n) - F(2n + 2)] + [F(2n + 2)]^2 + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= - F(2n)\ F(2n + 1) + [F(2n + 2)]^2 + F(2n)\ F(2n + 1) \\
S(2n + 1) &= [F(2n + 2)]^2
\end{aligned}$$

(vii)
Temos:

$A(j) = F(j)\ F(j + 1)$

Base: $n = 1$

$F(1)\ F(2) + F(2)\ F(3) = [F(3)]^2 - 1$
$1 + 2 = 4 - 1$
$3 = 3$

Hipótese de indução: $S(2n) = [F(2n + 1)]^2 - 1$

Passo de indução:

$$\begin{aligned}
S(2n + 2) &= S(2n) + F(2n + 1)\ F(2n + 2) + F(2n + 2)\ F(2n + 3) \\
S(2n + 2) &= [F(2n + 1)]^2 + F(2n + 1)\ F(2n + 2) + F(2n + 2)\ F(2n + 3) - 1 \\
S(2n + 2) &= F(2n + 1)\ F(2n + 1) + F(2n + 1)\ F(2n + 2) + F(2n + 2)\ F(2n + 3) - 1 \\
S(2n + 2) &= F(2n + 1)\ [F(2n + 1) + F(2n + 2)] + F(2n + 2)\ F(2n + 3) - 1 \\
S(2n + 2) &= F(2n + 1)\ F(2n + 3) + F(2n + 2)\ F(2n + 3) - 1 \\
S(2n + 2) &= F(2n + 3)\ [F(2n + 1) + F(2n + 2)] - 1 \\
S(2n + 2) &= F(2n + 3)\ F(2n + 3) - 1 \\
S(2n + 2) &= [F(2n + 3)]^2 - 1
\end{aligned}$$

Questão 5

O argumento está errado, pois não é válido para n + 1 = 2, ou seja, n = 1.

- Inicialmente temos n = 1

  ●

  Como o enunciado diz, o conjunto unitário tem bolas de mesma cor.
- Agora adicionamos uma bola com cor diferente.

  ● ○

  Subconjunto 1 a n: ●

  Subconjunto 2 a n + 1: ○

Percebemos que os subconjuntos têm suas bolas de uma só cor. Mas as cores das bolas de um subconjunto diferem das do outro. Logo o conjunto 1 a n + 1 não possui bolas com mesma cor.