Estudo dirigido em aula

1 de novembro de 2005

1) *Um indivíduo estuda pelo menos uma hora por dia durante 5 semanas, mas nunca estuda mais do que 11 horas em 7 dias consecutivos. Mostre que, em algum período de dias sucessivos, ele estuda um total de exatamente 20 horas. (Admita que ele estude um número inteiro de horas por dia).*

Solução:

Seja d_i o número de horas que ele estudou no dia i. São 35 dias. Consideremos a seqüência

$$
\begin{aligned}
b_1 &= d_1 \\
b_2 &= d_1 + d_2 \\
b_3 &= d_1 + d_2 + d_3 \\
&\vdots \\
b_{21} &= d_1 + d_2 + \dots + d_{20} + d_{21}
\end{aligned}
$$

Por termos 21 números distintos, dois deles, pelo menos, estarão na mesma classe de congruência módulo 20 (pelo *Princípio das Gavetas*). Logo a diferença entre eles deve ser múltipla de 20. Como, num período de 21 dias, ele poderá ter estudado no máximo 33 horas (pela restrição do enunciado), esta diferença, não sendo nula, terá que ser exatamente igual a 20, o que conclui a demonstração.

2) *Considere o experimento de lançar uma moeda repetidamente até se obter duas caras seguidas. Obtenha e resolva uma relação de recorrência para a_n, o número de experimentos para os quais duas cartas sucessivas são obtidas até o n-ésimo lançamento.*

Solução:

Particionamos os experimentos em dois subconjuntos: os que têm uma cara na primeira posição e os que têm uma coroa. O primeiro subconjunto é particionado aplicando o mesmo critério para a segunda posição. Temos, então, três subconjuntos:

(i) os que têm "**cara, cara**" nas duas primeiras posições;
(ii) os que têm "**cara, coroa**";
(iii) os que têm "**coroa**" na primeira posição.

Contando o número de experimentos em cada subconjunto obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$a_n = 1 + a_{n-2} + a_{n-1}\,, \quad n \geq 3 \quad , \quad a_1 = 0\,,\ a_2 = 1$$

A solução para esta relação é:

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\,,\ n \geq 1$$

3) *Um **torneio** é um grafo direcionado onde para qualquer par de vértices **a,b** exatamente uma das arestas (a,b) ou (b,a) existe. Um **caminho hamiltoniano** em um grafo direcionado é um caminho direcionado que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez. Prove que todo torneio tem um caminho hamiltoniano.*

Solução:

Sejam as seguintes definições:

(1) T_k é uma família de torneios com k nós.
(2) (a,b) tem orientação positiva se a aresta for direcionada para b, e negativa se for direcionada para a.

Por indução:

Base: **n** = **2**

$a \rightarrow b$ e $a \leftarrow b$ têm um caminho hamiltoniano.

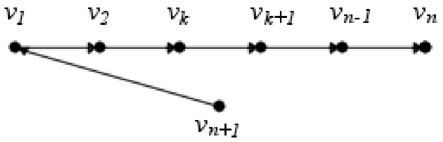
Hipótese de indução: existe um caminho hamiltoniano $v_1\ v_2 \ldots v_n$ em G.

Passo: é adicionado um vértice v_{n+1} a um torneio $G \in T_n$ formando um novo torneio G', $G' \in T_{n+1}$.

Para que exista um caminho hamiltoniano em *G'* uma das seguintes restrições deve ser atendida:

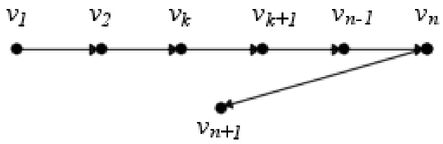
(1) A nova aresta (v_1, v_{n+1}) deve ter orientação negativa.

Neste caso o caminho será $v_{n+1}\ v_1\ v_2 \ldots v_n$.



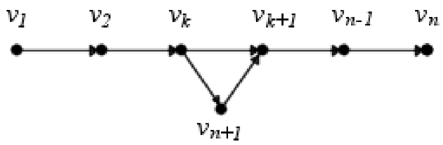
(2) A nova aresta (v_n, v_{n+1}) deve ter orientação positiva.

Neste caso o caminho será $v_1\ v_2 \ldots v_n\ v_{n+1}$.



(3) As arestas (v_k, v_{n+1}) e (v_{k+1}, v_{n+1}) devem ter orientação positiva e negativa, respectivamente, para algum $0 \leq k \leq n$.

Neste caso o caminho será $v_1\ v_2 \ldots\ v_k\ v_{n+1}\ v_{k+1} \ldots v_n$.



É importante perceber que é impossível deixar de atender a uma das restrições. Se (3) não for atendida, podemos dividir em dois casos:

- todas as arestas que partem de v_{n+1} terão orientação igual. Mas isso implica em atender (1) caso todas as orientações sejam positivas, e em atender (2) caso contrário;
- há apenas <u>uma</u> transição de orientação entre as arestas (v_k, v_{n+1}) e (v_{k+1}, v_{n+1}): de negativa para positiva. Mas isso implica em (v_1, v_{n+1}) ter orientação negativa, o que atende (1).

Logo G' também terá um caminho hamiltoniano, assim concluindo a prova.