Estudo Dirigido em Aula

6 de setembro de 2005

1) Prove (por indução) que um número em sua representação decimal (base 10) é divisível por 3 se e somente se a soma dos seus dígitos também é.

Fonte: http://www-di.inf.puc-rio.br/~poggi/ed051-l1.html

Solução 1

Seja x = $(x_n, x_{n-1}, \ldots , x_1)_{10}$ a representação de x na base 10

Por exemplo: x = 1024
$y = (x_n, x_{n-1}, \ldots x_2)_{10} = 102$
$z = x_1 = 4$

Observe que com esta escoha de y e z temos x = 10y + z

Queremos provar: $x \overset{3}{\equiv} 0 \Leftrightarrow x_n + x_{n-1} + \ldots + x_1 \overset{3}{\equiv} 0$

Vamos provar:

Hipótese de Indução

<u>Teorema</u> $x \overset{3}{\equiv} x_n + x_{n-1} + \ldots + x_1$

<u>Prova</u> $x = 10y + z = 9y + y + z \overset{3}{\equiv} y + z \overset{3}{\equiv} x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + z = x_n + x_{n-1} + \ldots + x_2 + x_1$

Observe que neste caso provamos algo mais geral para conseguirmos o objetivo inicial.
Assim, dado qualquer número, múltiplo de 3 ou não, o resto desse número na divisão por 3 é igual ao resto da soma de seus algarismos.

$104 \overset{3}{\equiv} 2$ $1 + 0 + 4 = 5 \overset{3}{\equiv} 2$ i.e. $104 \overset{3}{\equiv} 1 + 0 + 4$

Solução 2

Seja *num* um número divisível por 3 representado na base 10
num = $a_0 + a_1\, 10^1 + \ldots + a_n\, 10^n$
Como *num* é divisível por 3, logo *num* mod 3 = 0
Ou seja, o resto da divisão de *num* por 3 é zero.
num mod 3 = 0 = $(a_0 + a_1\, 10^1 + \ldots + a_n\, 10^n)$ mod 3
Queremos mostrar que:
$(a_0 + a_1\, 10^1 + \ldots + a_n\, 10^n) \bmod 3 = 0 \Rightarrow (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \bmod 3 = 0$
Em geral, podemos mostrar que $(a_0 + a_1\, 10^1 + \ldots + a_n\, 10^n) \bmod 3 = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \bmod 3 = r$
Note que isso só é verdade se 10 mod 3 = 1 e em geral 10^n mod 3 = 1
Logo, precisamos apenas provar que 10^n mod 3 = 10 mod 3 = 1 para todo n >= 1 (inteiro)

Seja a função r(n) = 10^n mod 3
Base: n = 1
r(1) = 10^1 mod 3 = 10 mod 3 = 1
Hipótese de indução: r(n) = 1
Passo de indução: r(n+1) = 10 r(n)
r(n+1) = 10 10^n mod 3 = 10 1 mod 3 = 10 mod 3 = 1

Agora, provamos que $(a_0 + a_1\, 10^1 + \ldots + a_n\, 10^n) \bmod 3 = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \bmod 3 = r$ e em particular r = 0 quando *num* é divisível por 3.

2) Seja a um número positivo qualquer. Afirmo que para todo inteiro positivo n tem-se:

$$a^{n-1} = 1.$$

Eis a prova (por indução): Se n = 1 então $a^{n-1} = a^0 = 1$ e portanto a afirmação está correta nesse caso. Agora suponha, por indução, que a afirmação está correta para 1, 2, 3, . . . , n. Temos então $a^{(n+1)-1} = a^n = a^{n-1}\, (a^{n-1} / a^{n-2}) = 1\, (1/1) = 1$.
Portanto, a afirmação está correta para todo n, como queríamos provar. Onde está o erro da prova?

Fonte: http://www.ime.usp.br/~pf/mac5770-2005/preliminares/prelim2.pdf

O erro está na hipótese, o correto seria a a^{n-1} = a 1 = a. Logo a afirmação está incorreta.

3) Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode escolher cinco pastéis?

Fonte: http://www.terra.com.br/matematica/arq3-16.htm

Seja x, y e z a quantidade de pastéis de carne, queijo e palmito respectivamente. Como ele deve comprar 5 pastéis, temos que:

x + y + z = 5 x,y,z >= 0

Utilizando o teorema:

O número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1 + ... + x_r = m$ (para m > 0) é dado por: C_{m+r-1}^{r-1}

Neste caso temos r = 3 e m = 5, portanto:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!{\cdot}5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2!{\cdot}5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

4) Para se tornar competitiva, a pastelaria resolveu vender novos sabores lançados no norte da Lituânia: kiwi, morango e pêssego. De quantas formas uma pessoa pode escolher cinco pastéis tal que ele compre pelo menos um pastel de cada um dos três novos sabores?

Seja a, b, c, x, y, z : quantidade de pastéis de kiwi, morango, pêssego, carne, queijo e palmito respectivamente.

a + b + c + x + y + z = 5

Como a,b,c > 1. Definimos k +1 = a, m + 1 = b e p + 1 = c
Substituindo nas equações, obtemos:
k+1 + m +1 + p +1 + x + y + z = 5
k + m + p + x + y + z = 5 - 3
k + m + p + x + y + z = 2 k,m,p,x,y,z >= 0
Usando o mesmo teorema da questão 3 para r = 6 e m = 2, obtemos:

$$C_7^5 = \frac{7!}{2!{\cdot}5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 5!} = 21$$

5) Calcule m, sabendo que:

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} = 254$$

Fonte: Livro texto – pág.86 – exercício 9

Pelo teorema das linhas, temos:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m \rightarrow \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-1} = 2^m - \binom{m}{0} - \binom{m}{m} = 2^m - 2$$

Logo: $254 = 2^m – 2$
$2^m = 256$
m = 8

6) Quantos inteiros existem entre 1 e 33000, inclusive, que não são divisíveis nem por 3, nem por 5, nem por 11?
Fonte: http://www.dcc.ufrj.br/~collier/lista6.pdf (Lista 6 do curso de Matemática Finita)

Divisíveis por 3:	11000
Divisíveis por 5:	6600
Divisíveis por 11:	3000
Divisíveis por 3 e 5:	2200
Divisíveis por 3 e 11:	1000
Divisíveis por 5 e 11:	600
Divisíveis por 3, 5 e 11:	200

Total de números divisíveis por 3, 5 ou 11 = 11000+6600+3000 – 2200 – 1000 – 600 + 200 = 17000

Resposta: 33000 – 17000 = 16000