

RESOLUCION DE PROBLEMAS ESTATICOS Y VALORES DE FRONTERA (CONDICIONES DE CONTORNO). ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE.

INDICE

1. ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE.

Los postulados fundamentales de la electrostática son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V$$

y si el medio es homogéneo e isotropo

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho_v \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho_v$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \Rightarrow \text{Ecuación de Poisson}$$

Operador laplaciano = divergencia del gradiente

En coordenadas cartesianas el laplaciano es

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

y la ecuación de **Poisson** resulta :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Existen desarrollos similares en coordenadas cilíndricas o esféricas.

Si no hay cargas libres se obtiene la ecuación de **Laplace** :

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Se resolverán en el curso ejemplos simples. Para el estudio de casos más complejos por los métodos de separación de variables y transformación conforme se remite al lector a **Complementos de Teoría de los Campos con Mathematica**®.

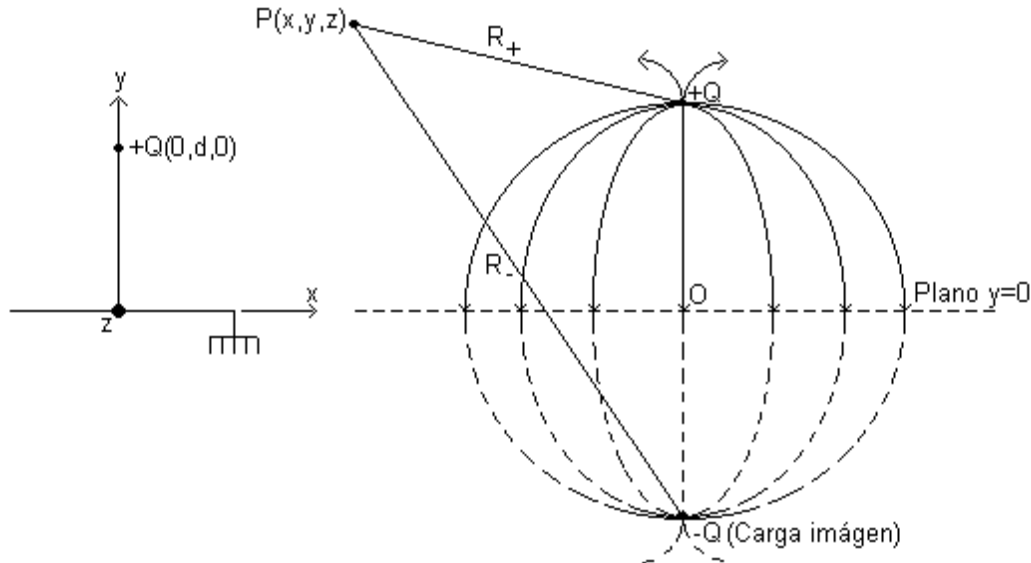
[INDICE](#)

2. MÉTODO DE LAS IMAGENES.

Una solución de la ecuación de Poisson que satisface un conjunto de condiciones de contorno es una solución única (teorema de unicidad), sin importar el método por el cual se obtiene la solución.

Hay problemas en los que las condiciones de frontera sobre las superficies limitantes pueden establecerse por “cargas imagen” apropiadas, en lugar de intentar una solución formal de la ecuación de Poisson o de Laplace⇒Método de las imágenes.

Ejemplo. Una carga $+Q$ está situada a una distancia d sobre un gran plano conductor conectado a tierra (potencial cero). Calcular : a) el potencial en un punto arbitrario $P(x,y,z)$ de la región $y>0$ y b) la distribución de carga inducida sobre la superficie del plano conductor.



Si eliminamos el plano conductor y lo sustituimos por una carga puntual imagen $-Q$ en $y=-d$, como se muestra en la figura, no cambiarán la situación en $y>0$ ni las condiciones de frontera. El potencial en un punto $P(x,y,z)$ debido a las dos cargas resulta :

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+d)^2 + z^2}} \right)$$

$y \geq 0$

y $V(x,y,z) = 0$ con $y \leq 0$

Puesto que se satisfacen las condiciones de frontera, la ecuación del potencial es la solución correcta. Calculamos el campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\tilde{a}_x x + \tilde{a}_y (y-d) + \tilde{a}_z z}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\tilde{a}_x x + \tilde{a}_y (y+d) + \tilde{a}_z z}{(x^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$y \geq 0$

La densidad superficial de carga en el plano conductor resulta:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_y|_{y=0} = - \frac{Qd}{2\pi(x^2 + d^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

El método de las imágenes únicamente puede usarse para determinar los campos en la región donde no se encuentran las cargas imágenes. En el ejemplo no podemos usar +Q y -Q para calcular V o **E** en la región y<0. De hecho, tanto V como **E** son nulos en dicha región.

INDICE

3. LINEA DE TRANSMISION INFINITA DE DOS ALAMBRES.

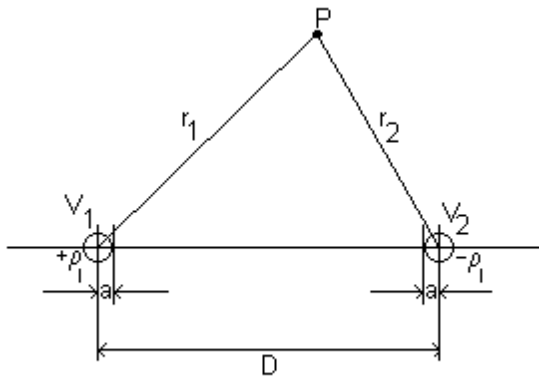
El potencial eléctrico a la distancia r de una línea de carga de longitud ∞ , con densidad ρ_l puede determinarse integrando la intensidad de campo **E**, obtenida anteriormente aplicando el Teorema de Gauss .

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{V/m})$$

$$V = - \int_{r_0}^r E_r dr = - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

El punto de referencia de potencial cero , a distancia r_0 de la línea , no puede en este caso estar en ∞ , ya que si asignamos $r_0 = \infty$, V sería ∞ en todos los demás puntos.

Sean dos líneas infinitas de carga separadas por una distancia D y sea a el radio de los conductores con $D \gg a$.



El potencial de un punto P resulta por superposición:

$$V_P = V_+ + V_- = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right) - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Considerando P sobre las líneas de carga

$$V_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D-a}{a}\right) \approx \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{D}{a}$$

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{D-a}\right) \approx \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{a}{D}$$

La d.d.p. entre los conductores de la línea resulta :

$$V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{D}{a} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{a}{D} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln\left[\left(\frac{D}{a}\right)^2\right]$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln\frac{D}{a}$$

y la capacidad por unidad de longitud de la línea, admitiendo la condición de $D \gg a$:

$$C = \frac{\rho_l}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}$$

Problema. Una línea larga de transmisión de energía de 2 cm de radio es paralela a la tierra y está situada a 10m sobre ésta. Suponiendo que la tierra es un plano conductor ∞ , encontrar la capacidad por metro de línea con respecto a la tierra (método de las imágenes).

[INDICE](#)