

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace permite convertir las ecuaciones que describen un circuito en el dominio del tiempo, al dominio de la frecuencia compleja p , realizar el análisis y por último transformar la solución del problema de nuevo al dominio del tiempo. La **transformada de Laplace** se define como sigue:

$$F[p] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f[t] dt$$

Definida una función $f[t]$ e invocando la función anterior, el programa calculará la integral.

1. LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Por ser una integral, la Transformada de Laplace posee las siguientes propiedades:

Si $L[f[t]] = F[p] \Rightarrow L[k f[t]] = k F[p]$ y $L[f_1[t] + f_2[t]] = F_1[p] + F_2[p]$

2. CÁLCULO DE PARES DE TRANSFORMADAS

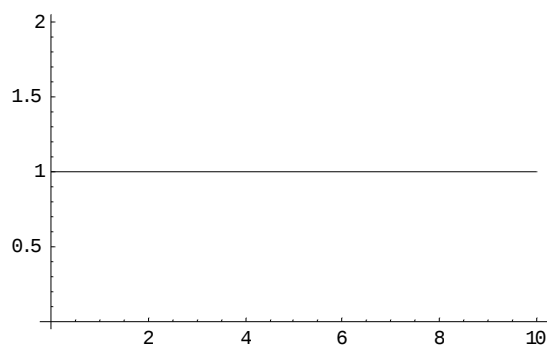
A partir de la definición pueden calcularse algunos pares de transformadas usuales en Electrotecnia.

2.1. FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Simula la aplicación de una f.e.m. unitaria constante al cerrarse un interruptor:

$f[t] = \text{UnitStep}[t]$

$\text{Plot}[f[t], \{t, 0, 10\}]$



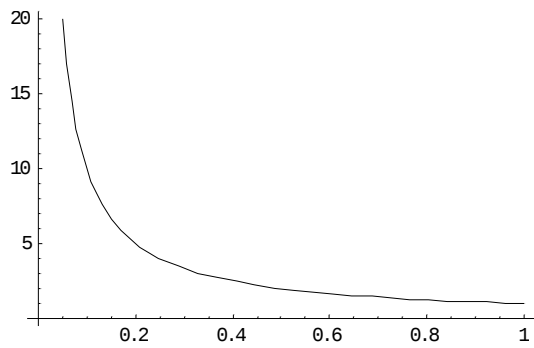
Su Transformada de Laplace es:

$$F[p]$$

$$\frac{1}{p}$$

$$p$$

$$\text{Plot}[F[p], \{p, 0.05, 1\}]$$



$F[p]$ posee un polo en el origen.

2.2. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La hemos reconocido como respuesta en los circuitos RL y RC

$$f[t_]=e^{-\alpha t}\text{UnitStep}[t]$$

Su Transformada de Laplace es:

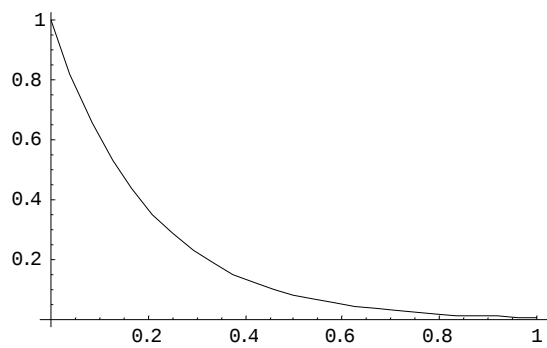
$$F[p]$$

$$\frac{1}{p + \alpha}$$

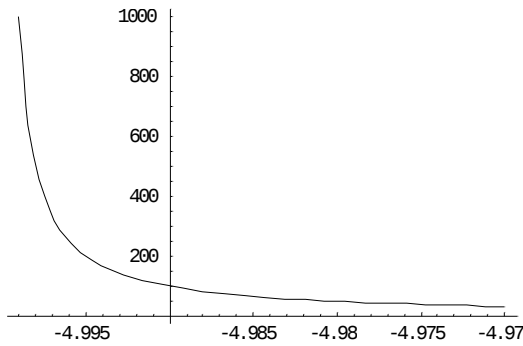
$$p + \alpha$$

$$\alpha = 5$$

$$\text{Plot}[f[t], \{t, 0, 1\}]$$



$\text{Plot}[F[p], \{p, -4.999, -4.97\}]$



$F[p]$ posee un polo en $p = -\alpha$

2.3. FUNCIÓN EXPONENCIAL - EXPONENTE IMAGINARIO

De acuerdo con la igualdad de Euler es una combinación lineal de senos y cosenos:

$$e^{j\omega t} = \cos[\omega t] + j\sin[\omega t]$$

Sea

$$f[t] = e^{j\omega t} \text{UnitStep}[t]$$

Su Transformada de Laplace es:

$$\frac{F[p]}{p - j\omega}$$

Compruebe el resultado aplicando la transformada 2.

2.4. FUNCIONES SENO Y COSENO

$$f[t] = \cos[\omega t] \text{UnitStep}[t]$$

Su Transformada de Laplace es:

$$\frac{F[p]}{p^2 + \omega^2}$$

$F[p]$ posee polos imaginarios conjugados en $p = \pm j\omega$

Consideremos a continuación el $\text{Sin}[\omega t]$:

$$f[t_]=\text{Sin}[\omega t]\text{UnitStep}[t]$$

Su Transformada de Laplace es:

$$F[p] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$F[p]$ posee polos imaginarios conjugados en $p = \pm i \omega$

Compruebe los resultados obtenidos aplicando 1.3. y la linealidad de la Transformada de Laplace:

2.5. FUNCIONES SENO Y COSENO AMORTIGUADOS

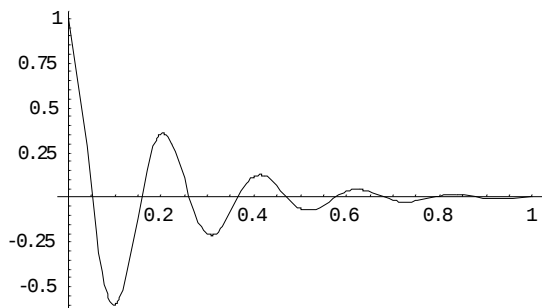
En el método clásico las encontrábamos como respuesta de los circuitos oscilatorios amortiguados.

COSENO AMORTIGUADO

$$f[t_]=e^{-\alpha t}\text{Cos}[\omega t]\text{UnitStep}[t]$$

$$\omega = 30; \alpha = 5;$$

$$\text{Plot}[f[t],\{t,0,1\},\text{PlotRange}\rightarrow\text{All}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p] = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$$

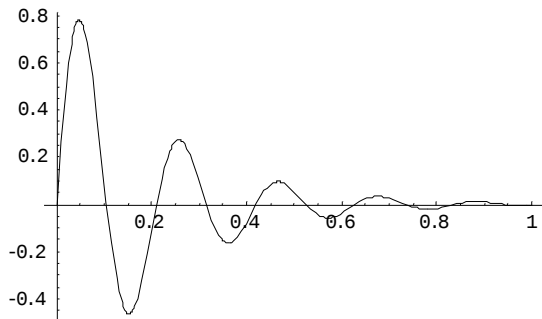
$F[p]$ posee polos complejos conjugados en $p = -\alpha \pm i \omega$

SENO AMORTIGUADO

$$f[t_]=e^{-\alpha t}\text{Sin}[\omega t]\text{UnitStep}[t]$$

$$\omega = 30; \alpha = 5;$$

$$\text{Plot}[f[t],\{t,0,1\},\text{PlotRange}\rightarrow\text{All}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p]$$

$$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

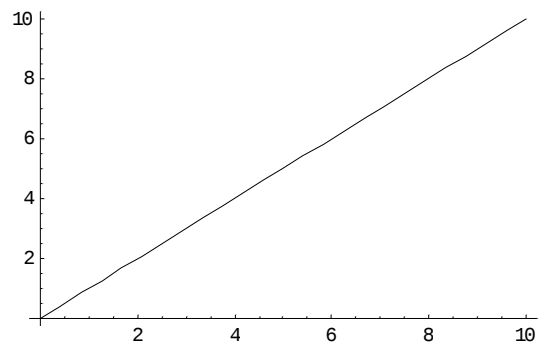
$F[p]$ posee polos complejos conjugados en $p = -\alpha \pm i \omega$

2.6. FUNCIÓN RAMPA

Puede representar la señal de salida de un transductor de posición que varía linealmente con el tiempo.

$$f[t_]=t\text{UnitStep}[t]$$

$$\text{Plot}[f[t],\{t,0,10\}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p] = \frac{1}{p^2}$$

$F[p]$ posee un polo doble en el origen.

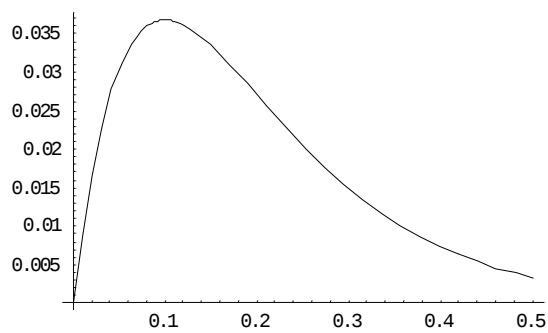
2.7. FUNCIÓN RAMPA AMORTIGUADA

La conocemos como respuesta crítica de los circuitos RLC.

$$f[t] = te^{-\alpha t} \text{UnitStep}[t]$$

$$\alpha = 10;$$

$$\text{Plot}[f[t], \{t, 0, \frac{5}{\alpha}\}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p] = \frac{1}{(p + \alpha)^2}$$

$F[p]$ posee un polo doble en $p = -\alpha$

2.7. FUNCIÓN IMPULSO

Es importante para el estudio de la respuesta libre de sistemas y el comportamiento de éstos ante distintas excitaciones (integral de convolución).

$$f[t] = \text{DiracDelta}[t]$$

Su Transformada de Laplace es:

$$F[p]$$

$$1$$

2.8. TABLA DE PARES DE TRANSFORMADAS

LE RECOMENDAMOS MEMORIZAR ESTA TABLA. LE FACILITARÁ EL PROCESAMIENTO MANUAL DE TRANSFORMADAS Y SUS INVERSAS.

TABLA DE PARES DE TRANSFORMADAS	
f [t]	F [p]
$\text{UnitStep}[t]$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t} \text{UnitStep}[t]$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$e^{j\omega t} \text{UnitStep}[t]$	$\frac{1}{p + j\omega}$
$\text{Cos}[\omega t] \text{UnitStep}[t]$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\text{Sin}[\omega t] \text{UnitStep}[t]$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\text{Cos}[\alpha t] e^{-\alpha t} \text{UnitStep}[t]$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\text{Sin}[\alpha t] e^{-\alpha t} \text{UnitStep}[t]$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$t \text{UnitStep}[t]$	$\frac{1}{p^2}$
$te^{-\alpha t} \text{UnitStep}[t]$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$

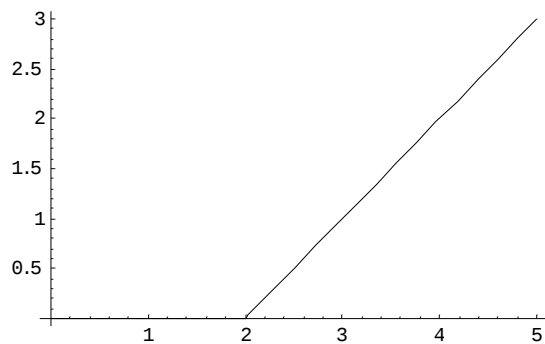
3. DESPLAZAMIENTO REAL (EN EL TIEMPO).

Consideremos una función que presenta un retardo el tiempo. La conclusión que seguirá es general.

$$f[t_]= (t-a)UnitStep[t-a]$$

$$a = 2 :$$

$$Plot[f[t],\{t,0,5\}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p]$$

$$\frac{e^{-ap}}{p^2}$$

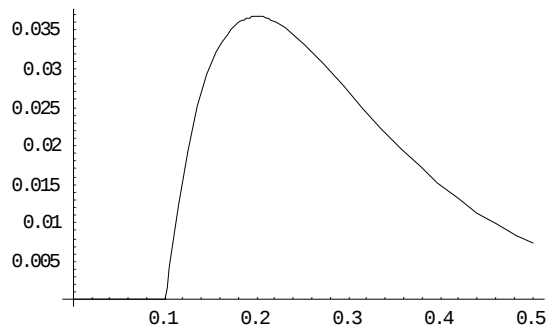
Comprobamos que la Transformada de Laplace de la función desplazada a segundos es igual a la transformada de la original multiplicada por e^{-ap} . El retardo de tiempo origina una exponencial en el dominio de p .

Apliquemos a un ejemplo:

$$f[t_]= (t-a)e^{-\alpha(t-a)}\text{Unitstep}[t]$$

$$\alpha = 10; a = 0.1;$$

$$\text{Plot}[f[t],\{t,0,0.5\},\text{PlotRange}\rightarrow \text{All}]$$



Su Transformada de Laplace es:

$$F[p]$$

$$\frac{e^{-ap}}{(p+\alpha)^2}$$

Compare con 1.6.

4. DESPLAZAMIENTO EN EL PLANO COMPLEJO.

Calculemos la transformada inversa en el siguiente ejemplo:

$$\text{InverseLaplaceTransform}[\frac{1}{p^2}, p, t]$$

$$t$$

Repitamos, con un desplazamiento α en la variable p :

$$\text{InverseLaplaceTransform}[\frac{1}{(p+\alpha)^2}, p, t]$$

$$te^{-\alpha t}$$

El desplazamiento en el plano complejo se traduce en un amortiguamiento de la función del tiempo.

5. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Sea, a modo de ejemplo la función:

$$f[t] = \cos[\omega t + 30^\circ]$$

Calculamos su Transformada de Laplace $F_1[p]$:

$$F_1[p] = \text{LaplaceTransform}[f[t], t, p]$$

$$\frac{\sqrt{3}p - \omega}{2(p^2 + \omega^2)}$$

Transformamos a continuación la derivada de la función obteniendo $F_2[p]$:

$$F_2[p] = \text{LaplaceTransform}[f'[t], t, p]$$

$$\frac{\omega(p + \sqrt{3}\omega)}{2(p^2 + \omega^2)}$$

Un teorema matemático permite demostrar que si

$$L[f[t]] = F[p] \Rightarrow L[f'[t]] = p F[p] - f[0]$$

Comprobemos:

$$F_2[p] = \text{Simplify}[pF_1[p] - f[0]]$$

$$\frac{\omega(p + \sqrt{3}\omega)}{2(p^2 + \omega^2)}$$

resultado que demuestra la propiedad enunciada.

6. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN

Sea la función

$$f[t] = te^{-\alpha t} \text{Unitstep}[t]$$

cuya transformada de Laplace resultó

$$F[p]$$

$$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$$

Calcularemos a continuación la transformada de Laplace de la integral de la función del tiempo:

$$f1[t_] = \int_0^t f[t]dt$$

$$\frac{e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} - \alpha t - 1)UnitStep[t]}{\alpha^2}$$

$$f[t_] = f1[t]$$

su transformada de Laplace es:

$$\frac{F[p]}{p(p + \alpha)^2}$$

que es la transformada de la función original, dividida por p.

Si

$$L[f[t]] = F[p] \rightarrow L\left[\int_0^t f[t]dt\right] = \frac{F[p]}{p}$$

7. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE CIRCUITOS LINEALES Y DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

Las funciones de transferencia de circuitos lineales son cocientes de polinomios en p. Las Transformadas de Laplace de las funciones de excitación usuales, que podemos observar en la tabla 1.8., son también cocientes de polinomios. En consecuencia, el problema será hallar la transformada inversa de funciones de la forma

$$F[p] = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}$$

cuyo denominador puede factorizarse en sus raíces, como en el siguiente ejemplo:

La función **Apart** nos permite la expansión en fracciones simples:

Ahora podemos hallar la transformada inversa, mediante cálculo manual o continuar con auxilio del programa:

Las funciones del tiempo resultan combinaciones lineales de exponenciales de la forma:

$$f[t] = \sum_n A_k e^{p_k t}$$

donde p_k son las raíces del denominador de $F[p]$.