MÉTODO DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS

1.- DEFINICION.

Una terna asimétrica de vectores (f.e.m., tensiones, corrientes, impedancias) **A**,**B** y **C** puede descomponerse en tres ternas simétricas, llamadas “componentes simétricas” del sistema dado (Fortescue - 1918).

Los tres sistemas simétricos se distinguen entre si por la secuencia de los vectores, a saber : directa (positiva o 1), inversa (negativa o 2) y homopolar (tres vectores en fase - secuencia 0).

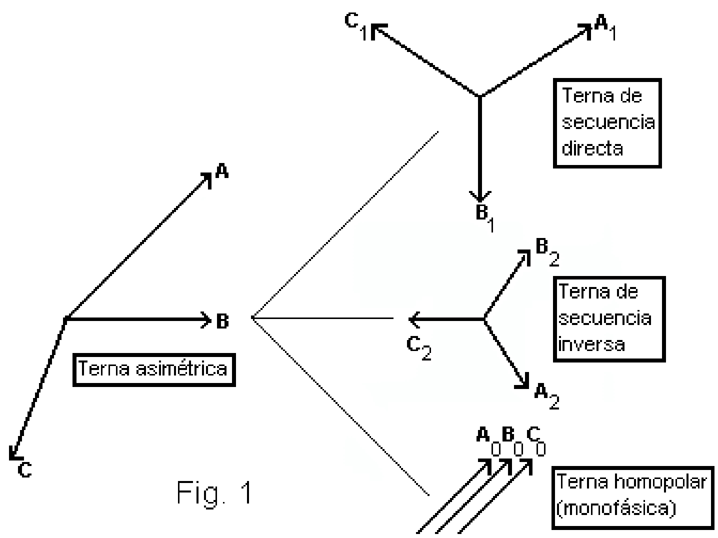

Fig. 1

De acuerdo con la definición :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_0} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \mathbf{B_0} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C_1} + \mathbf{C_2} + \mathbf{C_0} \end{aligned}}$$

Este método encuentra aplicación en el estudio de los regímenes asimétricos de los sistemas trifásicos. En muchos problemas relacionados con máquinas rotativas, fallas en líneas de transmisión y de interferencias causadas por líneas de transmisión de energía, es el único método de tratamiento riguroso.

2. CÁLCULO DE LOS VECTORES LLAVE. OPERADOR DE GIRO.

La descomposición propuesta en el apartado 1 da por resultado tres sistemas simétricos, siendo suficiente calcular a partir de los datos **A, B** y **C** los **vectores llave** correspondientes a la primera fase $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ y $\mathbf{A_0}$, ya que las restantes componentes simétricas poseen igual módulo y defasajes de 120° respecto de aquellos (0° en la terna homopolar). O sea que en un sistema asimétrico se trata de trabajar con una sola fase.

Designamos **operador de giro** (o factor de fase s/Zeveke-Ionkin, Principios de Electrotecnia) al versor $a = e^{j2\pi/3}$. Un vector multiplicado por a experimenta una rotación de 120° en sentido antihorario. El versor a posee las siguientes propiedades :

$$\boxed{\begin{array}{l} a = e^{j2\pi/3} = -0{,}5 + j0{,}866 \\ a^2 = e^{j4\pi/3} = -0{,}5 - j0{,}866 \\ a^3 = 1 \\ a^4 = a \\ 1 + a + a^2 = 0 \end{array}}$$

En el sistema de ecuaciones del apartado 1, planteado a partir de la definición, podemos reemplazar las componentes simétricas en función de las componentes llave, haciendo uso del operador a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} + \mathbf{A_0} \\ \mathbf{B} = a^2\mathbf{A_1} + a\,\mathbf{A_2} + \mathbf{A_0} \\ \mathbf{C} = a\,\mathbf{A_1} + a^2\,\mathbf{A_2} + \mathbf{A_0} \end{array}}$$

Sumando las tres ecuaciones y teniendo en cuenta las propiedades del operador a resulta :

$$\boxed{\mathbf{A_0} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})/3}$$

Multiplicando la segunda ecuación por a, la tercera por a^2 y sumando obtenemos :

$$\boxed{\mathbf{A_1 = (A + }a\mathbf{B + }a^2\mathbf{C)/}3}$$

De modo análogo se deduce :

$$\boxed{\mathbf{A_2 = (A + }a^2\mathbf{B + }a\mathbf{C)/}3}$$

Las tres fórmulas permiten el cálculo de los vectores llave.

3. SOLUCIÓN MATRICIAL.

El sistema de ecuaciones en los vectores llave puede plantearse en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \\ \vec{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_0 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de operadores de giro resulta :

$$[a]^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{DEMOSTRAR}}$

Premultiplicando m.a.m. el sistema de ecuaciones por $[a]^{-1}$ obtenemos :

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{A}_2 \\ \vec{A}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{A} \\ \vec{B} \\ \vec{C} \end{bmatrix}$$

Resultado que reproduce las fórmulas obtenidas en el apartado anterior.

Los resultados obtenidos son independientes de la forma de presentación de los datos. Si la terna asimétrica se expresara como vector fila, resultaría :

$$\left[\vec{A}_1 \quad \vec{A}_2 \quad \vec{A}_0\right] = \frac{1}{3}\left[\vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{C}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & a & 1 \end{bmatrix}$$

4. EJERCICIO.

Calcular las componentes simétricas de los sistemas de corrientes de una línea de transmisión en las siguientes situaciones : a) Cortocircuito bifásico, b) Cortocircuito de una fase a tierra. Efectuar el cálculo analítica y gráficamente.

5. GENERADOR ASIMÉTRICO QUE ALIMENTA UNA CARGA SIMÉTRICA. IMPEDANCIA DE SECUENCIA CERO.

Sea el sistema trifásico de la Fig. 2 :

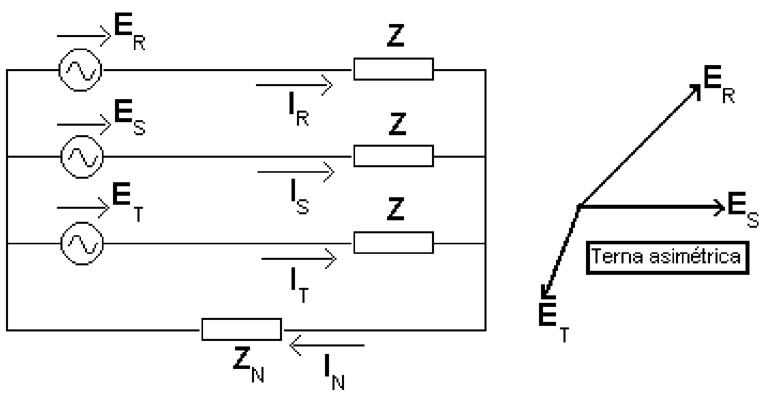

FIG. 2

Descomponiendo las f.e.m. del generador en sus componentes simétricas, el sistema puede representarse de acuerdo a la Fig. 3. Las corrientes pueden calcularse aplicando el principio de superposición. Para las f.e.m. de secuencia directa e inversa la carga es equilibrada y valen los circuitos monofásicos equivalentes (se trabaja con una fase).
Debe aclararse, y puede demostrarse experimentalmente que las impedancias de las líneas, impedancias de carga pasivas y transformadores, no son diferentes

para un sistema polifásico de f.e.m., cuando dos líneas se intercambian (secuencia contraria). De allí que las impedancias **Z** para secuencia directa y secuencia inversa tengan igual valor. Esta propiedad no es extensiva a máquinas rotativas.

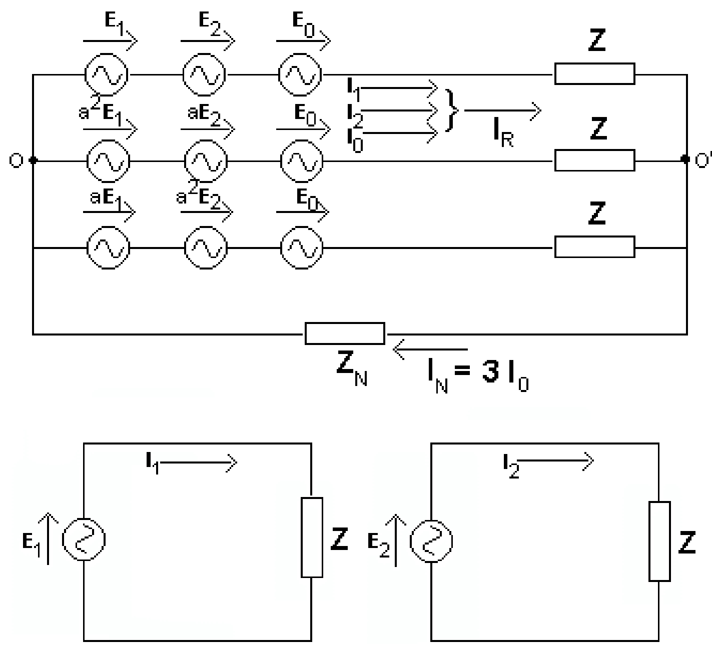

FIG. 3

Corriente de secuencia directa : $\mathbf{I}_1=\mathbf{E}_1/\mathbf{Z}$
Corriente de secuencia inversa : $\mathbf{I}_2=\mathbf{E}_2/\mathbf{Z}$

Para calcular la corriente de secuencia cero u homopolar dibujamos la red de la figura 4 . Siendo los tres generadores de secuencia cero idénticos (módulo y fase), resulta simple probar que las corrientes de secuencia cero también lo son, y en consecuencia la corriente del neutro es $\mathbf{I}_n=3\mathbf{I}_0$ y la tensión del neutro resulta $\mathbf{U}_{o'}=3\mathbf{Z}_n\mathbf{I}_0$. Entonces podemos calcular la impedancia de secuencia cero $\mathbf{Z}_0$:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{Z}\mathbf{I}_0 + 3\mathbf{Z}_n\mathbf{I}_0$$

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{E}_0/\mathbf{I}_0 = \mathbf{Z} + 3\mathbf{Z}_n$$

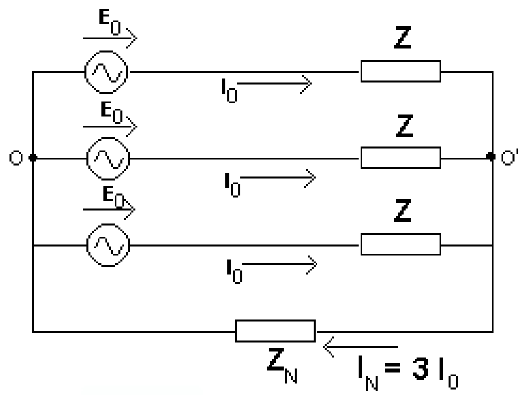

FIG. 4

Se notará que la corriente de retorno a tierra o neutro, es tres veces mayor que las componentes individuales de secuencia cero de las corrientes de línea. Cada conductor de la línea lleva una componente de corriente igual en magnitud y fase a las componentes similares de las otras dos líneas. Estas componentes de secuencia cero son llamadas componentes monofásicas y tienen una importante significación física con relación a la interferencia inductiva entre líneas de potencia trifásica y líneas de comunicaciones paralelas.
Cuando las corrientes de línea tienen componentes monofásicas, ninguna forma de trasposición de los conductores de la línea del sistema de potencia evitará que estas componentes establezcan interferencia inductiva en las líneas de comunicaciones paralelas y la razón es que los componentes monofásicos de los tres conductores de la línea establecerán interferencias magnéticas igualmente orientadas.

Las componentes de secuencia cero de las corrientes de línea de sistemas en estrella conectados a tierra o tetrafilares son también de importancia en el cálculo de las corrientes de cortocircuito en los sistemas de potencia. (Ver ejercicio 4).

KERCHNER Y CORCORAN.

COMPONENTES SIMÉTRICAS DE LAS TENSIONES DE FASE EN UNA CARGA DESEQUILIBRADA.

Se trata de determinar las componentes simétricas de las tensiones de fase $\mathbf{U}_R$, $\mathbf{U}_S$ y $\mathbf{U}_T$, Fig. 5.

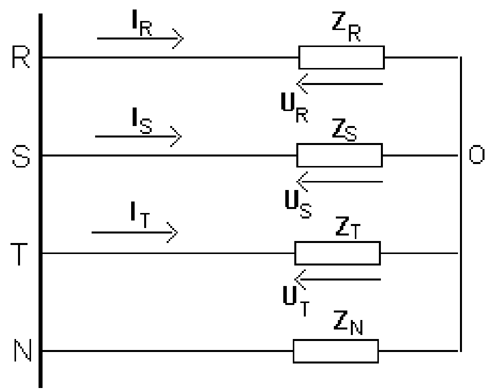

FIG. 5

La definición de componentes simétricas es aplicable a cualquier terna asimétrica de vectores, tal como la formada por las impedancias complejas $\mathbf{Z}_R$, $\mathbf{Z}_S$ y $\mathbf{Z}_T$, a partir de la cual pueden calcularse las componentes llave $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_0$. Resulta el circuito equivalente de la Fig. 6

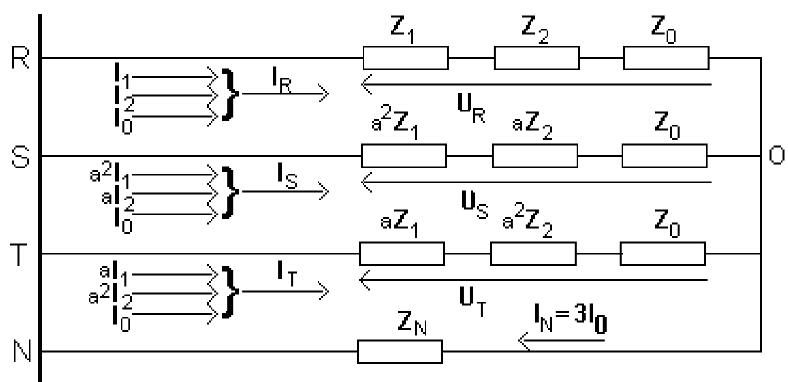

FIG. 6

Las tensiones de fase son iguales al producto de las impedancias por las corrientes respectivas. En función de las componentes simétricas de las impedancias y corrientes obtenemos :

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_R \\ \vec{U}_S \\ \vec{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_0).(\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_0) \\ (a^2\vec{Z}_1 + a\vec{Z}_2 + Z_0).(a^2\vec{I}_1 + a\vec{I}_2 + \vec{I}_0) \\ (a\vec{Z}_1 + a^2\vec{Z}_2 + \vec{Z}_0).(a\vec{I}_1 + a^2\vec{I}_2 + \vec{I}_0) \end{bmatrix}$$

Aplicamos los resultados del apartado 3 para obtener la ecuación matricial de los tensiones llave

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 + \vec{Z}_0).(\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_0) \\ (a^2\vec{Z}_1 + a\vec{Z}_2 + Z_0).(a^2\vec{I}_1 + a\vec{I}_2 + \vec{I}_0) \\ (a\vec{Z}_1 + a^2\vec{Z}_2 + \vec{Z}_0).(a\vec{I}_1 + a^2\vec{I}_2 + \vec{I}_0) \end{bmatrix}$$

Efectuando las operaciones de matrices y teniendo en cuenta las propiedades del operador de giro que permiten simplificar las expresiones intermedias se alcanza el siguiente resultado :

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_0\vec{I}_1 + \vec{Z}_2\vec{I}_2 + \vec{Z}_1\vec{I}_0 \\ \vec{Z}_1\vec{I}_1 + \vec{Z}_0\vec{I}_2 + \vec{Z}_2\vec{I}_0 \\ \vec{Z}_2\vec{I}_1 + \vec{Z}_1\vec{I}_2 + \vec{Z}_0\vec{I}_0 \end{bmatrix}$$

DEMOSTRAR

“El orden del sistema a que pertenece una caída de tensión ZI es igual a la suma de los órdenes a que pertenecen Z e I individualmente”.

7. ACOPLAMIENTO MAGNÉTICO ENTRE FASES. MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE SECUENCIA.

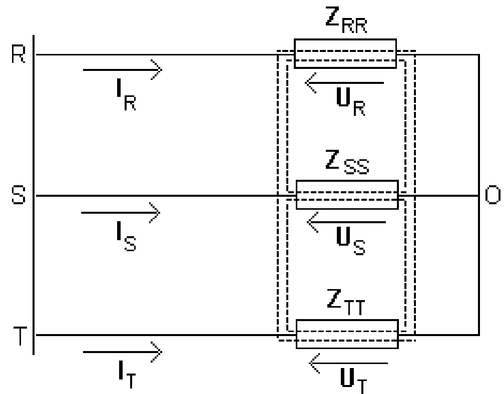

FIG. 7

Si las tres fases (incluyendo los conductores de línea) poseen un acoplamiento magnético, tal como se muestra en la Fig. 7, se obtiene para las tensiones de fase la siguiente ecuación matricial :

$$\begin{bmatrix} \vec{U}_R \\ \vec{U}_S \\ \vec{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_{RR} & \vec{Z}_{RS} & \vec{Z}_{RT} \\ \vec{Z}_{SR} & \vec{Z}_{SS} & \vec{Z}_{ST} \\ \vec{Z}_{TR} & \vec{Z}_{TS} & \vec{Z}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_R \\ \vec{I}_S \\ \vec{I}_T \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{Z}_{ii}$ = impedancia propia de la fase i

$\mathbf{Z}_{ij}$ = impedancia mutua entre fases i y j

La ecuación obtenida puede ser puesta en función de las componentes llave de las tensiones y corrientes de fase. Siendo [a] la matriz de operadores de giro del apartado 3, puede escribirse :

$$[a] \cdot \begin{bmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{U}_2 \\ \vec{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z}_{RR} & \vec{Z}_{RS} & \vec{Z}_{RT} \\ \vec{Z}_{SR} & \vec{Z}_{SS} & \vec{Z}_{ST} \\ \vec{Z}_{TR} & \vec{Z}_{TS} & \vec{Z}_{TT} \end{bmatrix} \cdot [a] \cdot \begin{bmatrix} \vec{I}_1 \\ \vec{I}_2 \\ \vec{I}_0 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando m.a.m. por $[a]^{-1}$

$$[a]^{-1}.[a].[\mathbf{U}_{1,2,0}] = [a]^{-1}.[\mathbf{Z}_{R,S,T}].[a].[\mathbf{I}_{1,2,0}]$$

Recordando que una matriz multiplicada por su inversa es igual a la matriz unidad y definiendo como **matriz de impedancias de secuencia** a :

$$\boxed{[\mathbf{Z}_{1,2,0}] = [a]^{-1}.[\mathbf{Z}_{R,S,T}].[a]}$$

resulta

$$\boxed{[\mathbf{U}_{1,2,0}] = [\mathbf{Z}_{1,2,0}].[\mathbf{I}_{1,2,0}]}$$

Para una matriz de impedancias de fase simétrica, es decir $\mathbf{Z}_{ij} = \mathbf{Z}_{ji} = \mathbf{Z}_m$ y con impedancias equilibradas $\mathbf{Z}_{ii} = \mathbf{Z}$, resulta

$$\begin{bmatrix} \vec{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \vec{Z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{Z} - \vec{Z}_m & 0 & 0 \\ 0 & \vec{Z} - \vec{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \vec{Z} + 2\vec{Z}_m \end{bmatrix}$$

expresión válida para elementos pasivos.

En el Apéndice se demuestra esta importante expresión haciendo uso del programa MATHEMATICA.

8. POTENCIA EN TÉRMINOS DE COMPONENTES SIMÉTRICAS.

La potencia compleja total es :

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{U}_R.\mathbf{I}_R^* + \mathbf{U}_S.\mathbf{I}_S^* + \mathbf{U}_T.\mathbf{I}_T^*}$$

donde los asteriscos indican magnitudes complejas conjugadas. Reemplazando tensiones y corrientes en función de sus componentes simétricas, desarrollando y teniendo en cuenta las propiedades del versor a, resulta :

$$\boxed{\mathbf{S} = 3.(\mathbf{U}_1.\mathbf{I}_1^* + \mathbf{U}_2.\mathbf{I}_2^* + \mathbf{U}_0.\mathbf{I}_0^*)}$$

Los productos de componentes simétricas de distinta secuencia no contribuyen a la potencia.

BIBLIOGRAFIA.

Principios de Electrotecnia. Zeveke - Ionkin. Tomo I.
Circuitos de Corriente Alterna. Kerchner y Corcoran. CECSA.
Circuitos Eléctricos. MIT. CECSA.
Introducción al Análisis de los Sistemas Eléctricos de Potencia. Enríquez Harper. LIMUSA.