

## Introdução

A Mecânica Quântica foi construída na década de 20 para lidar com o átomo, os físicos consideravam-na como um instrumento provisório destinado ao fracasso fora dos domínios do átomo, entretanto a mecânica quântica prosperou e ultrapassou os mais fantásticos sonhos de seus inventores. Atualmente, devido a aceitação dos Postulados Quânticos e suas extensivas aplicações em Centros Científicos, vem proporcionando maior divulgação de experimento clássicos da Mecânica Quântica, bem como seus inventores. A internet, onde é um meio de informação de mais alto padrão, nos favorece diversas fontes de trabalhos diretos ou correlacionados à Mecânica Quântica, sendo estes: revistas, fascículos e até mesmo jornais científicos.

## Conceitos Preliminares

Para explicar a mecânica dos átomos e dos sistemas nucleares, foram desenvolvidas, a partir de 1900, diversas teorias. Estas teorias foram se enquadrando a uma denominação comum: “Mecânica Quântica”(MQ).

Assim, MQ é um conjunto de teoria dos sistemas atômicos e nucleares. Este conjunto não é unitário, mas sim uma sucessão de diversas teorias, umas complementares das outras. Estas teorias surgiram e desenvolveram-se da Física Clássica, particularmente da mecânica newtoniana e da teoria eletromagnética de Maxwell.

Demonstrando-se que os conceitos clássico e eletromagnético eram suficientes para explicação do mundo macroscópico, mas, incapazes para uma explicação adequada e coerente do mundo microscópico, i.e., atômico-nuclear e também molecular, nasceram à chamada “Antiga teoria dos quanta” ou Mecânica Quântica Antiga. Esta mecânica compreende as teorias de Planck (1900), Einstein (1905), Bohr (1913) e De Broglie (1924).

A antiga MQ embora explicasse muitos fenômenos até então incompreendidos, falhava em sua base lógica para outros fenômenos. E assim Heisenberg (1925), desenvolveu a “Mecânica das Matrizes”, que não implica em nenhum modelo atômico, pois é um edifício puramente matemático. Quase simultaneamente, Schrödinger (1926) baseando-se nas idéias de De Broglie, desenvolveu a “Mecânica ondulatória”. Esta mecânica tem um aspecto mais físico, embora algo impreciso. Esta imprecisão foi desaparecendo com a aplicação das teorias de Pauli (1924) e Dirac (1926). As teorias de Heisenberg até Dirac, são conhecidas como “Mecânica Quântica Moderna”. Esquemáticamente, temos:

<b>MQ</b>	<b>MQA</b>	teoria dos quantas de Planck teoria atômica de Bohr dualismo de De Broglie
	<b>MQM</b>	mecânica das matrizes de Hiesenberg mecânica ondulatória de Schöndiger teoria do Spin de Pauli teoria da energia positiva e negativa de Dirac

Juntamente com estes físicos, representantes da MQ, figura outro grande número de cientista que, experimentalmente, deram confirmação a cada um destas teorias, assim como aplicaram teoricamente a muitos fenômenos Físicos-Químicos.

Primeiramente estaremos considerando a visão matemática, que a mecânica quântica possui com uma linguagem acessível para estudantes de ciências e assim uma breve discussão da MQA (Planck→ de Broglie) e MQM (Pauli→ Dirac). tratando historicamente os fatos ocorridos e descrevendo alguns passos tomados pelos pesquisadores da MQ, explanando o formalismo matemático.

## O Formalismo Matemático da Mecânica Quântica

Na mecânica quântica a forma de se estabelecer relações numéricas e representação física de eventos são de modelos não convencionais como o de costumeiro da física e química. Às vezes tendo tratamento até filosófico de problemas.

## Operadores

Em muitos processos matemáticos um elemento tem que se submeter a um conjunto de operações quase sempre complicadas, mas que se repetem muitas vezes, a fim de aplicar a outros elementos diferentes para correlacioná-los. O conjunto de operações e transformações métricas são representadas por símbolos ( $\hat{A}$ ,  $\nabla^2$ ,  $\square$ ,  $\Psi$ ) que se denominam operadores de transformação. Este conjunto de operações de transformação pode ser representado também por uma matriz, a qual tem propriedades intrínsecas da teoria de matrizes. Veja abaixo a representação de operadores e matrizes respectivamente.

$$f = \hat{A}h \quad [1]$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [2]$$

Estes operadores são denotados usando letras com acento circunflexo, como por exemplo  $\hat{O}$ . Existe em princípio, um operador para cada informação que se deseja sobre o sistema, sendo os mais importantes os operadores que fornecem a energia, chamados de operadores Hamiltonianos que são denotados pelo símbolo  $H$ . Os operadores, por serem ordens ou instruções matemáticas, devem ser aplicadas pela direita nas funções desejadas por exemplo a função de onda  $\Psi$  ou usando a chamada representação de Dirac  $|\Psi\rangle$ . Se  $\hat{O} = d/dx$ , ou seja a ordem matemática é “derive com relação a  $x$ ”, e  $\Psi = f(x)$ , podemos ver claramente que  $\hat{O}|\Psi\rangle$  ( $df(x)/dx$ ) não é o mesmo que  $|\Psi\rangle\hat{O}$ , ou  $f(x)d/dx$  (4). Como em alguns casos é necessário trabalhar com combinações lineares de funções de onda, os operadores também devem ser lineares, i.e.:

$$\hat{O}(|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) = \hat{O}|\Psi_1\rangle + \hat{O}|\Psi_2\rangle \quad [3]$$

Quando aplicamos o operador na função de onda pode acontecer dois eventos. No caso mais simples a operação sobre  $\Psi$  fornece a própria função  $\Psi$  multiplicada por uma constante  $a$ , ou seja:

$$\hat{O}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \quad [4]$$

Neste caso a função de onda  $\Psi$  é dita ser autofunção do operador  $\hat{O}$  com autovalor  $a$ . O autovalor obtido corresponde à propriedade que se deseja medir, de forma que, quando se fizer uma medição desta propriedade em um conjunto de sistemas idênticos, sempre será obtido o mesmo valor  $a$ . Mas é óbvio que as medições realizadas usando os operadores devem fornecer valores reais e não números complexos. Apresentando esta condição o operador é dito Hermitiano, o que matematicamente corresponde a expressão:

$$\langle\Psi_i|\hat{O}|\Psi_j\rangle = (\langle\Psi_j|\hat{O}|\Psi_i\rangle)^* \quad [5]$$

A equação [5] garante que se  $\hat{O}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$  e que  $\hat{O}|\Psi^*\rangle = a^*|\Psi^*\rangle$ , então  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ , o que só acontece se  $\mathbf{a}$  for um número real, ou seja, se não contiver o número  $\mathbf{i}$  na sua expressão.

O segundo tipo de resultado que pode ser esperado quando se aplica um operador em uma função de onda é que a função de onda seja alterada pelo operador, como mostrado na equação 6:

$$\hat{O}|\Psi_1\rangle = b|\Psi_2\rangle \quad [6]$$

Agora a função não é autofunção do operador, e o valor  $\mathbf{b}$  corresponde a uma única medição da probabilidade desejada em um só sistema dentro de um universo de sistemas idênticos. Neste caso, cada vez que se fizer a medição experimental da propriedade seria obtida uma resposta diferente, sendo portanto necessário calcular o valor médio das medições, também chamado de valor esperado,  $\langle \mathbf{b} \rangle$ , para ter um resultado confiável da medição. O valor médio é calculado exatamente como se calculam os valores médios em estatística:

$$\langle b \rangle = \frac{\langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad [7]$$

O principal problema agora é definir matematicamente os operadores e as funções de onda. Os operadores são obtidos através dos comutadores dos operadores.

Se tivermos uma função de onda descrita por

$$\Psi = A e^{\frac{2\pi i}{h}(xp_x - Et)} \quad [8]$$

que pode ser aplicada a descrever qualquer partícula de massa  $m$  e velocidade  $V_x$  que apresente comportamento ondulatório, sendo portanto uma equação geral e não só referente ao fóton. Agora utilizando-se dum operador para derivá-la em relação à  $\mathbf{x}$ , e considerando que a energia  $\mathbf{E}$  e o momento  $\mathbf{P}_x$  da partícula associada à onda são constantes, temos:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{2\pi i p_x}{h} \Psi \quad [9]$$

rearranjando temos:


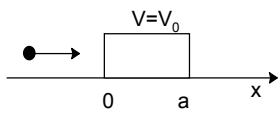
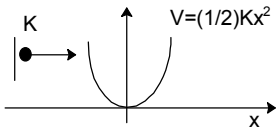
$$-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p_x \Psi \quad [10]$$

analisando a equação [10] vemos que a função de onda  $\Psi$  é uma autofunção do operador  $-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$  com autovalor  $p_x$ , ou seja, que o operador extrai o valor de momento da função de onda  $-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$ . Isto significa que, para obter operadores podemos escrever a expressão clássica da quantidade que nos interessa, e substituir os termos referentes a componente em x do momento,  $p_x$ , por  $-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$ . Por analogia, para as componentes em y e z a substituição deve ser por  $-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}$  e  $-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z}$  respectivamente. Já onde existem coordenadas (x,y,z) ou tempo (t) não é necessário fazer nenhuma modificação para converter a expressão em um operador. Esta metodologia pode ser expressa em forma de tabela.

**Tabela 1:** substituições para a construção de operadores.

Termo na expressão clássica	Termo no operador	Símbolo do operador
X	X	$\hat{X}$
Y	Y	$\hat{Y}$
Z	Z	$\hat{Z}$
$P_x$	$-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$	$\hat{p}_x$
$P_y$	$-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}$	$\hat{p}_y$
$P_z$	$-\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z}$	$\hat{p}_z$
T	t	$\hat{t}$

**Tabela 2:** Exemplos do operador Hamiltoniano para o movimento de uma partícula de massa  $m$  em diferentes campos de força definidos pela função (operador) potencial  $V$ .

		Operador
(a) Partícula livre		$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$
(b) barreira de potencial		$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (x < 0; x > a)$ $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \quad (0 < x < a)$
(c) Oscilador harmônico		$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} Kx^2$

**Tabela 3:** Exemplos do operador para átomos e moléculas.[4.A]

	Operador $H$
(a) Átomos de um elétron	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}$
(b) Átomos de muitos elétrons	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_{j=1}^n \frac{Ze^2}{r_j} + \sum_i \sum_{j>i} \frac{e^2}{r_{ij}}$
(c) moléculas	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_\alpha} \nabla_\alpha^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 - \sum_\beta \sum_i \frac{Z_\alpha e^2}{r_{i\alpha}} + \sum_i \sum_{j>i} \frac{e^2}{r_{ij}} + \sum_\alpha \sum_{\beta>\alpha} \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{r_{\alpha\beta}}$

## Comutadores

Em 1926, Born, Heisenberg e Jordan apresentaram na *Zeitschrift für Physik* a mecânica quântica, desenvolvida por Born em 1924, e Heisenberg, em 1925, sob o ponto de vista matricial [5]. Nesse trabalho, eles apresentaram as relações de comutações para o momento angular  $\vec{L}$  para um sistema de muitas partículas:

$$\begin{aligned}
 [L_x, L_y] &= \frac{\hbar}{2\pi i} L_z, \\
 [L_z, L_x] &= \frac{\hbar}{2\pi i} L_y, \\
 [L_y, L_z] &= \frac{\hbar}{2\pi i} L_x.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Hoje em alguns cursos de MQ, podemos ver que esses comutadores podem ser visto da forma apresentada acima.

Mas qual será a idéia de comutação ?, comutar significa ‘*Realizar diversas funções*’. Imaginemos uma situação na qual temos dois operadores Hermitianos  $\hat{O}$  e  $\hat{E}$  que comutam entre si, ou seja  $\hat{O}\hat{E} - \hat{E}\hat{O} = \mathbf{0}$  (o comutador também é representado como  $[\hat{O},\hat{E}] = \mathbf{0}$ ). Suponhamos ainda que existe um conjunto de funções de onda  $\Psi_i$  que são autofunções do operador  $\hat{O}$ , com autovalores diferentes entre  $a_i$ , i.e., sem degenerescência<sup>♦</sup>.

$$\hat{O}|\Psi_i\rangle = a_i|\Psi_i\rangle$$

neste caso qual seria a relação do operador  $\hat{E}$  com este conjunto de funções?. Se operarmos pela esquerda com  $\hat{E}$  teremos que

$$\hat{E}\hat{O}|\Psi_i\rangle = \hat{E}(a_i|\Psi_i\rangle) = a_i(\hat{E}|\Psi_i\rangle) \quad [12]$$

e pela condição de comutação:

$$\hat{E}\hat{O} = \hat{O}\hat{E} \rightarrow \hat{E}\hat{O}|\Psi_i\rangle = \hat{O}(\hat{E}|\Psi_i\rangle) \quad [13]$$

de (A) e (B) temos que

$$\hat{O}(\hat{E}|\Psi_i\rangle) = a_i(\hat{E}|\Psi_i\rangle) \quad [14]$$

A equação [14] nos mostra explicitamente que  $\hat{E}|\Psi_i\rangle$  é uma autofunção do operador  $\hat{O}$ , com o autovalor  $a_i$ . Como  $\Psi_i$  é a única função com autovalor  $a_i$ , devido ‘a não degenerescência dos sistema, a única forma da equação [14] ser verdadeira é quanto a função  $\hat{E}|\Psi_i\rangle$  seja um múltiplo de  $\Psi_i$ , i. e.,

$$\hat{E}|\Psi_i\rangle = d_i|\Psi_i\rangle \quad [15]$$

Em outras palavras, a função  $|\Psi_i\rangle$  também é autofunção do operador  $\hat{E}$ . Este resultado na forma de teoria seria: ‘*Se dois operadores Hermitianos  $\hat{O}$  e  $\hat{E}$  comutam, então existe um conjunto de funções que são autofunções dos dois operadores*’. Este teorema é extremamente importante pois mostra que as únicas propriedades de um sistema que podemos medir simultaneamente e com precisão são aquelas para as quais a função de onda representando o estado do sistema é a autofunção dos seus respectivos operadores, ou seja, para medir precisa e simultaneamente duas ou

<sup>♦</sup> Degenerescência: significa os mesmos autovalores de energia.

mais propriedades de um sistema, seus respectivos operadores devem comutar. De fato, este resultado é uma forma de expressão do Princípio de Incerteza de Heisenberg, pois indica que só é possível conhecer simultaneamente com precisão as propriedades de um sistema cujos operadores comutam. Claramente, de acordo com a formulação mais conhecida deste Princípio, os operadores referentes à posição e ao momento de um elétron em um átomo não comutam.

## Observáveis

As propriedades (E, P,  $X_i$ ) que formam um observável têm duas características importantes:

1) Podem excluir-se mutuamente, ou 2) Constituem um conjunto completo, i.e., incluem entre si todos os possíveis resultados da medição do observável (E, P,  $X_i$ ).

Em MQ, pode-se distinguir dois tipos importantes de relações entre observáveis. Analisemos dois observáveis,  $q$  e  $r$  são compatíveis se as propriedades (E, P,  $X_i$ ) de todos os pares ( $q_i, r_j$ ) –  $q_i$  representa qualquer propriedade do observável  $q$ ,  $r_j$  qualquer propriedade de  $r$  – forem compatíveis ou de mútua exclusão. Sendo o último caso, o par de propriedades que não correspondem a qualquer situação fisicamente real ou previsível.

No entanto, para que dois observáveis  $q$  e  $s$  sejam incompatíveis basta que, entre todos os pares de propriedades ( $q_i, s_j$ ) exista um que seja incompatível.

Um exemplo de incompatibilidade é o momento linear (P) e a posição ( $x_i$ ). A energia de uma partícula livre (energia cinética) e a sua quantidade de movimento são também observáveis compatíveis. Neste caso, os pares de propriedades formados por uma propriedade de cada um destes observáveis ou são compatíveis ou excluem mutuamente; a exclusão mútua aplica-se a situações fisicamente absurdas, por exemplo quando, uma das propriedades for nula e a outra diferente de zero porque a energia cinética e a quantidade de movimento estão relacionadas entre si através de uma dependência funcional,  $K = p^2/(2m)$ . [6]

## Valor Esperado

Se considerarmos, uma partícula e onda associada, a função  $\Psi_{(r,t)}$  e se essa função não se anula num intervalo entre  $r$  e  $r + dr$ , na medida de sua posição há uma probabilidade finita dessa partícula ser encontrada. Não podemos, atribuir a coordenada um valor bem definido, no entanto, é possível especificarmos uma posição média da partícula.

Imaginemos a medida da posição da partícula no instante  $t$ , a probabilidade de encontrá-la entre  $r$  e  $r + dr$  é dada pela equação.



$$P_{(r,t)} = \Psi^*_{(r,t)}\Psi_{(r,t)} \quad [16]$$

onde  $P_{(r,t)}$  é a probabilidade de encontramos a partícula. Repetindo essa experiência a uma certa frequência no mesmo instante e registrando os valores de  $P_{(r,t)}$ , podemos usar a média dos valores observados para caracterizar a posição da partícula no instante  $t$ .

Este valor é representado por  $\langle r \rangle$ , valor esperado da coordenada  $r$ . Veja abaixo como podemos demonstrar matematicamente este cálculo.

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r P_{(r,t)} dr \quad [17]$$

como:  $P_{(r,t)} = \Psi^*_{(r,t)}\Psi_{(r,t)}$ ,

substituímos [16] em [17] temos que:  $\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r \Psi^*_{(r,t)}\Psi_{(r,t)} dr$  [18]

## Fluxo de Probabilidade

A probabilidade de encontrar uma partícula a uma certa posição  $x$  e num tempo  $t$  é dado por

$$P_{(x,t)} = \Psi^*_{(x,t)}\Psi_{(x,t)}$$

Sendo o fluxo qualquer grandeza que varia o tempo.

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[\Psi_{(x,t)}\Psi^*_{(x,t)}] \quad [19]$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \Psi^*_{(x,t)}\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) + \Psi_{(x,t)}\frac{\partial \Psi^*}{\partial t}(x,t) \quad [20]$$

como:  $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{(x)}\Psi_{(x,t)} = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}$

consideramos que ela esteja livre de  $V(x)$ .

Parte real:

$$\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad [21]$$

Parte imaginária:

$$\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \quad [22]$$

Substituindo [21] e [22] em [20]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(x,t) &= \psi^*_{(x,t)} \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi_{(x,t)} \left( -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial t}(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\hbar}{2mi} \left( \psi^*_{(x,t)} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi_{(x,t)} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right] \\ S_{(x,t)} &= \frac{\hbar}{2mi} \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right] \end{aligned} \quad [23]$$

Sendo  $S$  o fluxo de probabilidade

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial S}{\partial x}(x,t) \text{ ou}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial S}{\partial x}(x,t) = 0 \quad [24]$$

Sendo esta a equação da continuidade.

## Postulados da Mecânica Quântica da Função de Onda

**I)** A todo sistema corresponde uma função de onda  $\Psi(x,t)$ .

**II)** A seguinte correspondência existe entre as variáveis dinâmicas e os seguintes:

Variáveis	Operadores
x, y, z, t	x, y, z, t
F(x,t)	F(x,t)
$P_x, P_y, \text{ ou } P_z$	$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} \text{ ou } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$
E	$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}$

**III)**  $\Psi(x,t)$  (onde x representa x, y, z) e suas derivadas primeiras, devem ser finitas e unívocas.

**IV)**  $\Psi(x,t)$  deve ser normalizada\*, isto é.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{(x,t)} \Psi_{(x,t)} dv = 1$$

$$dv = dx dy dz$$

ou simplesmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi dv = 1$$

ou mais simplesmente

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$$

**V)** A cada observável corresponde um operador  $\hat{A}$ . O valor médio  $\langle \hat{A} \rangle$  ou valor esperado deste operador é definido como.

---

\* quando tem-se uma função = 1, a probabilidade é 100% de encontrar a partícula numa região, isso significa que esta função está normalizada.

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{A} \Psi d\mathbf{v}$$
$$\langle \hat{A} \rangle = \int \Psi^* A \Psi d\mathbf{v}$$

ou

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi^* | A | \Psi \rangle$$

porém, se  $\Psi$  não for normalizada, então  $\langle A \rangle$  é definido como(20)

$$\langle A \rangle = \frac{\langle \Psi^* | A | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}$$

## Bibliografia:

- (1) Coelho, J. V. Mecânica Quântica (2000), In: 100 Anos de Mecânica Quântica, Departamento de Física, UFMT.
- (2) Rey, A. B. Mecânica Quântica e Ondulatória, In: Física/Química Modernas. V. 3, SP, Ed. Fortaleza, 1970
- (3) Bathista, A. L. B. S., Nogueira, J. S. Uma Breve Discussão da Mecânica Quântica *IX Encontro de Iniciação Científica*, Cuiabá, UFMT. 2001.
- (4) Almeida, W. B., Santos, Química Nova,
- (5) Bassalo, J. M. F. Nascimentos da Física (1901-1950), Belém: EDUFPA, 2000. 503 p.
- (6) Teixeira Dias, J. J. C. Química Quântica fundamentos e métodos. 1982. Ed. Fundação Calouste Gulbenkian. 448 p.
- (7) Millomen, W. C. C. Notas de Aula, 2001. Departamento de Física – Universidade Federal de Mato Grosso.
- (8) Eisberg, R. Resnick, R. Física Quântica, Ed. Campus, Rio de Janeiro, 1979. 15ª Edição.
- (9) Bathista, A. L. B. S., Nogueira, J. S. Da Physis à Física, O Livre Contexto Sobre a essência da matéria: O Átomo. *IX Encontro de Iniciação Científica*, Cuiabá, UFMT. 2001.
- (10) Born, M., Física Atômica, 1962, 4ª Edição. Ed: Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- (11) Coelho, J. V. Mecânica Quântica, Cuiabá: EdUFMT, 215 p.1993.
- (12) Millomen, W. C. Born e a Teoria Quântica (2000), In: 100 anos de Mecânica Quântica, Departamento de Física, UFMT
- (17) De Broglie, L. Recherches sur la théorie des quanta. 1963, Paris: Masson et C<sup>ie</sup> editeurs. 128p. Réédition du text de 1924
- (18) Landau, L. Lifshitz, E. Mecânica Quântica, Teoria não relativista, 1985. Mir, Moscou. Vol.1.