Momento Angular

André Luis Bonfim Bathista e Silva
Instituto de Física de São Carlos – Universidade de São Paulo
Av. Trabalhador São Carlense 400, CEP 13560-970 São Carlos - SP

1. $\vec{L}$ para um sistema isolado

o momento angular total de um sistema isolado é uma constante de movimento. O que deixa evidente a conservação do momento.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{0} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

2. $\vec{L}$ em Mecânica Clássica

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \qquad [2.1]$$

sendo $\vec{p} \equiv m\vec{v}$

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} L_x & L_y & L_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \qquad [2.2]$$

e suas componentes são

$$L_x = yp_z - zp_y \qquad [2.3]$$

$$L_y = zp_x - xp_z \qquad [2.4]$$

$$L_z = xp_y - yp_x \qquad [2.5]$$

3. $\vec{L}$ em Mecânica Quântica

$$\hat{L} \equiv \hat{r} \times \hat{p} \qquad [3.1]$$

$$\hat{L} = -i\hbar(\hat{r} \times \hat{\nabla}) \text{ ou } \hat{L} = -i\hbar\left(\hat{r} \times \frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad [3.2]$$

onde $\hat{r} = \hat{x}_i + \hat{y}_j + \hat{z}_k$ e $\hat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$

componentes

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad [3.4]$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad [3.5]$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad [3.6]$$

4. Comutação

verificando as propriedades das componentes do momento angular

$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = i\hbar L_z \,,\ \lfloor L_y, L_z \rfloor = i\hbar L_x \,;\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = \lfloor yp_z - zp_y, zp_x - xp_z \rfloor = [yp_z, zp_x] + \lfloor zp_y, xp_z \rfloor$$
$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = y[p_z, z]p_x + p_y[z, p_z]x$$
$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = -i\hbar yp_x + i\hbar xp_x$$
$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = i\hbar\lfloor xp_y + yp_x \rfloor$$
$$\lfloor L_x, L_y \rfloor = -i\hbar L_z$$

$$\lfloor L_y, L_z \rfloor = \lfloor zp_x - xp_z, xp_y - yp_x \rfloor = \lfloor xp_y, yp_z \rfloor + \lfloor yp_x, zp_y \rfloor$$
$$\lfloor L_y, L_z \rfloor = z[p_x, x]p_y = y[x, p_x]p_z$$
$$\lfloor L_y, L_z \rfloor = -i\hbar zp_y + i\hbar yp_z$$
$$\lfloor L_y, L_z \rfloor = i\hbar\lfloor yp_z - zp_y \rfloor$$
$$\lfloor L_y, L_z \rfloor = i\hbar L_x$$

$$[L_Z, L_x] = \lfloor xp_y - yp_x, yp_z - zp_y \rfloor = \lfloor xp_y, yp_z \rfloor + \lfloor yp_x, zp_y \rfloor$$
$$[L_Z, L_x] = x\lfloor p_y, y \rfloor p_z + z\lfloor y, p_y \rfloor p_x$$
$$[L_Z, L_x] = -i\hbar xp_z + i\hbar zp_x$$
$$[L_Z, L_x] = i\hbar[zp_x - xp_z]$$
$$[L_Z, L_x] = i\hbar L_y$$

as componentes do momento angular não comutam !

considerando o operador L^2, o qual corresponde o quadrado em magnitude do momento angular. O operador $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ é hermitiano desde que L_x, L_y, e L_z sejam hermitianos.

$$[L^2, L_x] = 0\,,\ [L^2, L_y] = 0\,;\ [L^2, L_z] = 0$$

$$[L^2, L_x] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_x]$$
$$[L^2, L_x] = \underbrace{[L_x^2, L_x]}_{0} + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$
$$[L^2, L_x] = L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z$$
$$[L^2, L_x] = -i\hbar L_y L_z - i\hbar L_z L_y + i\hbar L_z L_y + i\hbar L_y L_z$$
$$[L^2, L_x] = 0$$

$[L_x^2, L_x] = 0$, porque $[L_x^2, L_x] = L_x^2 L_x - L_x L_x^2 = L_x^3 - L_x^3 = 0$
assim $[L_y^2, L_y] = 0$ e $[L_z^2, L_z] = 0$

$$[L^2, L_y] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_y]$$
$$[L^2, L_y] = [L_x^2, L_y] + [L_z^2, L_y]$$
$$[L^2, L_y] = L_x[L_x, L_y] + [L_z, L_y]L_x + L_z[L_z, L_y] + [L_z, L_y]L_z$$
$$[L^2, L_y] = i\hbar L_x L_z + i\hbar L_z L_x + i\hbar L_z L_x + i\hbar L_x L_z$$
$$[L^2, L_y] = 0$$

$$[L^2, L_z] = [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z]$$
$$[L^2, L_z] = [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z]$$
$$[L^2, L_z] = L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x + L_y[L_y, L_z] + [L_y, L_z]L_y$$
$$[L^2, L_z] = -i\hbar L_x L_y - i\hbar L_y L_x + i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y$$
$$[L^2, L_z] = 0$$

suas componentes também mantém a regra de comutação

$$[L_x^2, L_z] = L_x L_x L_z - L_z L_x L_x$$
$$[L_x^2, L_z] = L_x L_x L_z - L_x L_z L_x + L_x L_z L_x - L_z L_x L_x$$
$$[L_x^2, L_z] = L_x[L_x, L_z] + [L_x, L_z]L_x$$
$$[L_x^2, L_z] = -i\hbar[L_x L_y + L_y L_x]$$

sendo que a soma dos dois termos é zero, uma outra representação á a anticomutação $\left[L_x^2, L_z\right] = -i\hbar\left\{L_x, L_y\right\}$. Concluindo que L^2 e L_x comutam, isso porque L_x, L_y e L_z ocorrem simetricamente com L^2.

e $\left[L_y^2, L_z\right] = i\hbar\left[L_x L_y + L_y L_x\right]$

Princípio de incerteza

$$\Delta L^2 \cdot \Delta L_x \geq \hbar / 2$$
$$\Delta L^2 \cdot \Delta L_y \geq \hbar / 2$$
$$\Delta L^2 \cdot \Delta L_z \geq \hbar / 2$$

5. Operadores escadas

aqui podemos introduzir dois novos operadores, chamados de operadores escadas ou operadores deslocamento. O operador L_+, é chamado de operador levantamento; o outro operador, L_-, é chamado de operador abaixamento. Estes são definidos como segue:

$$L_+ = L_x + iL_y \text{ e } L_- = L_x - iL_y$$

a relação inversa é

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \text{ e } L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

aplicando-os na relação de comutação de L_x, L_y e L_z

$$\left[L_z, L_+\right] = \left[L_z, L_x\right] + i\left[L_z, L_y\right]$$
$$\left[L_z, L_+\right] = \left[L_z L_x - L_x L_z\right] + i\left[L_z L_y - L_y L_z\right]$$
$$\left[L_z, L_+\right] = i\hbar L_y + \hbar L_x$$
$$\left[L_z, L_+\right] = \hbar\left[L_x + iL_y\right]$$
$$\left[L_z, L_+\right] = \hbar L_+$$

as outras relações de comutação são obtidas similarmente e todas as três são

$$\left[L_z, L_+\right] = \hbar L_+ ,\ \left[L_z, L_-\right] = -\hbar L_- ,\ \left[L_+, L_-\right] = 2\hbar L_z$$

$$[L_x, L_+] = \underbrace{[L_x, L_x]}_{0} + i[L_x, L_y]$$
$$[L_x, L_+] = i\underbrace{[L_x L_y - L_y L_x]}_{\hbar L_z}$$
$$[L_x, L_+] = i\hbar L_z$$

$$[L_x, L_-] = \underbrace{[L_x, L_x]}_{0} - i[L_x, L_y]$$
$$[L_x, L_-] = -i\hbar L_z$$

L^2 comuta com cada uma das componente, este também comuta com $L_\pm$. Portanto, podemos adicionar a esta relação

$$[L^2, L_\pm] = 0$$

O efeito dos operadores escadas:

Nós podemos mostrar que dois autoestados simultâneos de L^2 e L_z são distinguíveis por números quânticos

6. Igualdades com *I* dos spins

Em mecânica quântica há duas espécies de momento angular:

1. momento angular orbital, resulta do movimento de uma partícula através de um espaço ou trajetória (órbita) é similar ao momento angular clássico.

2. momento angular de spin, é uma propriedade intrínseca de muitas partículas microscópicas e não há análogo clássico.

7. Mudança de coordenadas

transformação de coordenadas cartesianas em esféricas

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \rightarrow \hat{L}_x = -i\hbar\left(sen\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \rightarrow \hat{L}_y = -i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta sen\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \rightarrow \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$x = rsen\theta\cos\phi\,,\ y = rsen\theta sen\phi \text{ e } z = r\cos\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2\,,\ \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ e } \tan\phi = \frac{y}{x}$$

para realizarmos estas transformações, nós usamos a regra da cadeia. Supondo que temos uma função de r, θ e ϕ: $f(r,\theta,\phi)$. Agora substituindo os valores de r, θ e ϕ em $f(r,\theta,\phi)$ temos,

$$f[r(x,y,z),\theta(x,y,z),\phi(x,y,z)] = \xi(x,y,z)$$

a regra da cadeia nos diz como a derivada parcial de $\xi(x,y,z)$ está relacionada com $f(r,\theta,\phi)$, de fato

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{y,z}$$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x,z}$$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)_{x,y} = \left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{x,y} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial\phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{x,y}$$

para converter estas equações para equações de operadores precisamos retirar ξ.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{y,z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x,z}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{x,y}=\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\theta,\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}+\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_{r,\phi}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)_{x,y}+\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{r,\theta}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{x,y}$$

utilizando estas equações de operadores e aplicando-os no dois lados de r^2, $\cos\theta$ e $\tan\phi$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$2r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=2x$, substituindo o valor de x

$$r\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=rsen\theta\cos\phi$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z}=sen\theta\cos\phi$$

e se diferenciarmos $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ com respeito a y e z, nó obteremos

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{x,z}=sen\theta sen\phi \text{ e } \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}=\cos\theta$$

logo teremos

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z}=sen\theta\cos\phi$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_{x,z}=sen\theta sen\phi$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{x,y}=\cos\theta$$

agora diferenciando o segundo termo da transformação de coordenada

$$\cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_{y,z}\frac{\partial}{\partial \theta}\cos\theta=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$-sen\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^{1/2}}\right)$$

$$-sen\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(z.r^{-1/2}\right)$$

$$-sen\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=-\frac{1}{2}z.2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}$$

$$-sen\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=-\frac{zx}{r^3}$$

substituindo os valores de z e x.

$$sen\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=\frac{r\cos\theta rsen\theta\cos\phi}{r^3}$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_{y,z}=\frac{\cos\theta r\cos\phi}{r}$$

da mesma forma para as outras diferenciações de θ.

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{x,z}=\frac{\cos\theta rsen\phi}{r} \text{ e } \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{x,y}=-\frac{sen\theta}{r}$$

para $\tan\phi=\frac{y}{x}$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{y,z}=-\frac{sen\phi}{rsen\theta},\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{x,z}=-\frac{\cos\phi}{rsen\theta},\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{x,y}=0$$