

ANDRÉ TOMAZ DE CARVALHO

MÉTODO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO PARA SOLUÇÃO
DE REDES RESISTIVAS NÃO LINEARES

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos

Orientador:

Prof. Livre-Docente

Flávio Cipparrone

São Paulo

2004

“Pelas bochechas enrugadas de Enguivuck escorreram duas lágrimas.

“-Foi tudo em vão!, soluçou ele. O trabalho de toda uma vida, minhas investigações, as observações feitas ao longo de tantos anos... Tudo em vão! Quando finalmente trazem a última pedra para o meu edifício científico, quando finalmente podia terminá-lo, quando podia, enfim, escrever o último capítulo... verifico que não serve pra nada, que é completamente supérfluo, que ninguém quer saber dele, que não vale um tostão, que não interessa a ninguém, porque o tema já não existe! Acabou-se, ponto final!

“Foi sacudido por um soluço que parecia um ataque de tosse. A velha Urgl olhou-o com compaixão, acariciou-lhe a cabecinha calva e murmurou:

“-Pobre velho Enguivuck! Não desanime! Havemos de encontrar outra coisa.”

(Michael Ende, A História Sem Fim.)

*“Run, rabbit run
Dig that hole, forget the sun,
And when at last the work is done
Don't sit down it's time to start another one”*

(Waters, Gilmour and Wright, The Dark Side of The Moon)

“All we have to decide is what to do with the time that is given us.”

(Gandalf, J.R.R. Tolkien, Fellowship of the Ring)

Para Fernando e Telma; para Chous e Chuca Menyuca; para Braus e Brother Adriano, com muito carinho, do Milos.

AGRADECIMENTOS

Minha sincera gratidão ao orientador e amigo Prof. Flávio Cipparrone, companheiro de desafios e vitórias, de projetos e realizações, de quem tive a honra de aprender muito.

Ao Prof. Luís de Queiroz Orsini, e ao Prof. Yaro Burian Júnior, pelos muitos e valiosíssimos comentários e sugestões.

Também de forma especial sou grato à Prof. Denise Consonni e ao Prof. Vítor Nascimento, por todo apoio recebido na elaboração deste trabalho.

Aos colegas Luís Medeiros, Fábio Grandi e Alex Lopes, que navegaram comigo no mesmo barco nestes três anos de estudo e de trabalho.

Aos meus pais, Fernando e Telma, e aos meus irmãos: pela alegria, pela saudade, pelo carinho, pelas orações e pelo incentivo.

Aos amigos, professores e funcionários do Departamento de Sistemas Eletrônicos – PSI, e a todos aqueles que empregam seus melhores esforços para que a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo continue sendo uma referência no ensino de Engenharia no Brasil, muito obrigado.

Agradeço a Deus por ter aproximado de mim tantas pessoas extraordinárias, tantos ombros amigos nos quais pude me apoiar no decorrer destes anos, sem os quais não me teria sido possível concluir este trabalho.

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos um estudo sobre a análise de redes elétricas constituídas por geradores independentes de tensão, geradores independentes de corrente e resistores não lineares com características monotonicamente crescentes. Estudamos detidamente o algoritmo de Katzenelson aplicado à solução de redes LPP com resistores de características monotonicamente crescentes, que constituem casos particulares destas redes não lineares mais genéricas. Como principal resultado, apresentamos o Método de Refinamento Hierárquico, que encontra a solução da rede não linear resolvendo uma série de interpolações LPP cada vez mais acuradas da rede original. O método proposto, que possui garantia de convergência independentemente da solução inicial arbitrada, revelou ser uma eficiente ferramenta computacional para análise de redes não lineares.

ABSTRACT

In this work we develop a study about the analysis of electrical networks constituted by independent voltage generators, independent current generators and nonlinear resistors with monotonically increasing characteristics. We study longly the application of Katzenelson's algorithm to solve piecewise linear networks with monotonically increasing resistors, that are particular cases of those more general nonlinear networks. As main result, we present the Hierarchical Refining Method, which finds the solution of the nonlinear network by solving a series of piecewise linear interpolations each time more accurate from the original network. The presented method, which has guarantee of convergence independently of the initial solution arbitred, revealed itself to be an efficient computational tool for nonlinear network analysis.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1.....	19
INTRODUÇÃO.....	19
1.1. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA	19
1.2. UMA BREVE REVISÃO	21
1.3. METODOLOGIA PROPOSTA	21
1.4. MAPA DA DISSERTAÇÃO.....	22
CAPÍTULO 2.....	23
CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DOS CIRCUITOS	23
2.1. CIRCUITOS CONCENTRADOS.....	23
2.2. BIPOLOS ELÉTRICOS E DIREÇÕES DE REFERÊNCIA	24
2.3. DEFINIÇÃO DOS BIPOLOS ELEMENTARES	26
2.3.1. Resistores.....	26
2.3.2. Geradores Independentes de Tensão e de Corrente	28
2.4. TOPOLOGIA DE REDES	29
2.4.1. Circuitos Elétricos e Grafos	29
2.4.2. Laços, Conjuntos de Corte e Árvores	32
2.4.3. Teorema Fundamental dos Grafos: Propriedades da Árvore	35
2.5. AS LEIS DE KIRCHHOFF	37
2.5.1. A Primeira Lei de Kirchhoff (PLK)	37
2.5.2. A Segunda Lei de Kirchhoff (SLK).....	39
2.6. SUMÁRIO	40
CAPÍTULO 3.....	41
ANÁLISE DE REDES	41
3.1. A ANÁLISE NODAL.....	42
3.1.1. Equações Nodais e Matriz de Incidência Reduzida	42
3.1.2. Tensões Nodais e Segunda Lei de Kirchhoff.....	46
3.1.3. Formulação da Rede.....	50
3.2. A ANÁLISE DE CORTES.....	64
3.2.1. Implicações da Primeira Lei de Kirchhoff.....	65
3.2.2. Implicações da Segunda Lei de Kirchhoff	68
3.2.3. Formulação da Rede.....	70
3.3. SUMÁRIO	83

CAPÍTULO 4.....	85
TEORIA DAS REDES RESISTIVAS LINEARES POR PARTES.....	85
4.1. REDES RESISTIVAS LINEARES POR PARTES (LPP).....	87
4.2. RESISTORES LINEARES POR PARTES (LPP).....	88
4.2.1. <i>Bipolo Linear Equivalente de uma Região</i>	91
4.3. MAPEAMENTO LPP NO R^N	92
4.4. REDE LINEAR EQUIVALENTE DE UMA REGIÃO	98
4.5. O ALGORITMO DE KATZENELSON	100
4.5.1. <i>A Curva de Solução</i>	100
4.5.2. <i>Solução da Rede pelo Traçado da Curva</i>	102
4.6. PROVA DE CONVERGÊNCIA	105
4.7. ASPECTOS COMPUTACIONAIS DO ALGORITMO	106
4.7.1. <i>Cálculo de λ</i>	107
4.7.2. <i>Traçado da curva de solução utilizando matrizes Jacobianas Inversas</i>	108
4.7.3. <i>Método de Obtenção das Matrizes Jacobianas Inversas</i>	110
4.7.4. <i>O Problema do Ponto de Interação de Fronteiras</i>	113
4.8. PERFORMANCE COMPUTACIONAL	120
4.9. SUMÁRIO	121
CAPÍTULO 5.....	123
MÉTODO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO	123
5.1. SOLUÇÃO DE REDES NÃO LINEARES UTILIZANDO APROXIMAÇÕES LPP DE SEUS ELEMENTOS	123
5.2. ANÁLISE DO ERRO EM UMA INTERPOLAÇÃO LPP UNIDIMENSIONAL	124
5.3. JANELA DE INTERPOLAÇÃO	127
5.4. ESCOLHA DOS PONTOS DE QUEBRA.....	129
5.5. O ALGORITMO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO	131
5.6. CRITÉRIOS DE PARADA	134
5.7. REDEFINIÇÃO DA JANELA DE INTERPOLAÇÃO	136
5.8. CONVERGÊNCIA DO MÉTODO	140
5.9. CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO PROPOSTO	142
5.10. SUMÁRIO	142
CAPÍTULO 6.....	143
SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	143
6.1. INTRODUÇÃO	143
6.2. SOLUÇÃO DE CIRCUITOS LINEARES	145
6.3. ALGORITMO DE KATZENELSON	148

6.3.1. Exemplo 1	148
6.3.2. Exemplo 2	152
6.3.3. Exemplo 3	156
6.4. MÉTODO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO	159
6.5. SOLUÇÃO DE REDES HIDRÁULICAS	170
6.5.1. Topologia da Rede.....	171
6.5.2. Equações da Rede.....	172
6.5.3. Analogia elétrica	174
6.5.4. Aplicação do Método de Refinamento Hierárquico.....	175
6.6. OBSERVAÇÕES QUANTO À PERFORMANCE COMPUTACIONAL.....	183
6.7. SUMÁRIO	186
CAPÍTULO 7.....	187
CONCLUSÕES	187
7.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	187
7.2. ESCOLHA DOS PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO	188
7.3. APLICAÇÃO EM SOLUÇÃO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS	189
7.4. APLICAÇÃO EM SOLUÇÃO DE REDES HIDRÁULICAS	189
7.5. TRABALHOS FUTUROS.....	189
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	191

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 - Convenção do receptor e convenção do gerador para os sentidos da tensão e da corrente em um bipolo elementar.....	25
Figura 2-2 – Resistor elementar.....	26
Figura 2-3 – Curvas características de resistores.....	27
Figura 2-4 – O diodo como exemplo de resistor não linear controlado por tensão. Curva característica do diodo e respectiva aproximação linear por partes.....	28
Figura 2-5 – Gerador de tensão elementar representado segundo a convenção do gerador.....	29
Figura 2-6 – Gerador de corrente elementar representado segundo a convenção do gerador.....	29
Figura 2-7 – Abstração da rede elétrica ao grafo.....	30
Figura 2-8 - Abstração da rede elétrica ao grafo orientado.....	31
Figura 2-9 - Grafo conexo e grafo não-conexo.....	32
Figura 2-10 – Acima: exemplos de grafos articulados. Abaixo: grafo não-separável.....	33
Figura 2-11 – Exemplos de laços.....	34
Figura 2-12 – Operação de remoção de ramos em grafos.....	34
Figura 2-13 – Exemplos de árvores de um grafo.....	35
Figura 2-14 – Ilustração das propriedades de um corte.....	37
Figura 2-15 – Corte feito em torno de um nó do circuito.....	39
Figura 3-1 – Um nó típico para ilustração da PLK.....	43
Figura 3-2 – Ilustração utilizada para provar que as n equações da PLK são LI.....	44
Figura 3-3 - Circuito do exemplo 3.1.....	45
Figura 3-4 - Circuito do exemplo 3.2.....	49

Figura 3-5 - Circuito do exemplo 3.3.....	56
Figura 3-6 - Circuito do exemplo 3.4.....	61
Figura 3-7 – Circuito do exemplo 3.5.....	63
Figura 3-8 - Cortes fundamentais de uma árvore em um grafo.	65
Figura 3-9– Grafo orientado do exemplo 3.8 e seus conjuntos fundamentais de corte para uma dada árvore.	74
Figura 3-10 - Circuito do exemplo 3.9.....	81
Figura 4-1 – Curva característica de um resistor linear por partes controlado por tensão.	89
Figura 4-2 – Curva característica do diodo retificador e sua aproximação linear por partes.	90
Figura 4-3 – Aproximação LPP de um resistor não linear por interpolação linear de alguns pontos de sua curva característica.....	90
Figura 4-4 - Curva Característica de um Resistor LPP.....	91
Figura 4-5 – Bipolo linear equivalente de uma região.....	92
Figura 4-6 - Rede resistiva.	95
Figura 4-7 - Curva característica do resistor R_1 com $N_1 = 5$	95
Figura 4-8 - Conjuntos fundamentais de corte.....	96
Figura 4-9 - Espaços vetoriais V_{RT} e J_{cs}	96
Figura 4-10 - Divisão do espaço V_{RT} em regiões lineares.....	97
Figura 4-11 - Circuito da Fig. 4-6 com a substituição de seus bipolos lineares equivalentes.....	98
Figura 4-12 - Curva de solução no espaço V_{RT} e sua imagem no espaço J_{cs}	101
Figura 4-13 - Traçado da curva de solução dentro da região A_0	102
Figura 4-14 - Fluxograma do Algoritmo de Katzenelson.....	104
Figura 4-15 - Ilustração para a prova de convergência do algoritmo.	106

Figura 4-16 – Ilustração referente à obtenção de λ_k .	108
Figura 4-17 - Curva de Solução.	110
Figura 4-18 - Ponto de intercessão de fronteiras.	113
Figura 4-19 - Efeito do salto do método de Seitzman-Katzenelson no espaço J_{cs} .	115
Figura 4-20 - Ilustração do Método de Kuh-Fujisawa.	118
Figura 5-1 - Janela de Interpolação na curva característica de um resistor não linear.	128
Figura 5-2 - Distribuição dos pontos de quebra em função da segunda derivada da curva característica.....	130
Figura 5-3 - Distribuição uniforme dos pontos de quebra na curva característica...	131
Figura 5-4 - Refinamento da interpolação LPP na curva característica de um resistor.	133
Figura 5-5 - Solução da primeira iteração do Método de Refinamento Hierárquico.	137
Figura 5-6 - Refinamento: subdivisão da região A	138
Figura 5-7 - Segunda iteração do Método de Refinamento Hierárquico.	139
Figura 5-8 - Janela de interpolação no caso da solução estar sobre uma fronteira. .	140
Figura 5-9 - Fluxograma do Método de Refinamento Hierárquico	141
Figura 6-1- Convenção do receptor adotada para todos os ramos.	145
Figura 6-2 – Circuito Linear.	145
Figura 6-3 - Matriz de entrada de dados do circuito.	146
Figura 6-4 - Solução da rede pela análise de cortes.	146
Figura 6-5 - Solução da rede pela Análise Nodal Modificada.	147
Figura 6-6 - Circuito LPP.....	148
Figura 6-7 - Matriz de entrada de dados para o circuito LPP.	149

Figura 6-8 - Curva característica LPP dos resistores da rede. Os pontos de quebra são representados como estrelas.....	149
Figura 6-9 – Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP.....	150
Figura 6-10 – Resultado retornado pelo algoritmo de Katzenelson.....	151
Figura 6-11 - Curva de solução traçada pelo algoritmo de Katzenelson.	152
Figura 6-12 - Curva característica LPP.....	153
Figura 6-13 - Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP.....	153
Figura 6-14 - Solução do Algoritmo de Katzenelson.....	154
Figura 6-15 - Curva de solução traçada pelo algoritmo de Katzenelson.	155
Figura 6-16 – Detalhes da curva de solução: ponto inicial (à esquerda) e ponto final (à direita).	155
Figura 6-17 - Circuito com diodo retificador.....	156
Figura 6-18 - Curva característica do diodo retificador D_1	156
Figura 6-19 - Matriz de entrada de dados.	157
Figura 6-20 - Tensão da fonte E_1	157
Figura 6-21 - Tensão no resistor R_1	158
Figura 6-22 – Tensão no diodo D_1	158
Figura 6-23 - Curva característica dos resistores não lineares.....	159
Figura 6-24 - Primeira iteração do método de refinamento hierárquico.....	161
Figura 6-25 - Em azul: fronteiras do primeiro refinamento.....	162
Figura 6-26 – Em azul: curva de solução da segunda iteração.	163
Figura 6-27 - Em lilás: fronteiras do segundo refinamento.	164
Figura 6-28 - Em lilás: curva de solução da terceira iteração.....	165
Figura 6-29 - Em preto: novas fronteiras adicionadas no terceiro refinamento.....	166
Figura 6-30 - Em preto: curva de solução da quarta iteração.	167
Figura 6-31 - Solução da rede não linear pelo método de refinamento hierárquico.....	168

Figura 6-32 - Em azul: evolucao das tensões nos resistores. Em vermelho: limites das janelas de interpolação.	169
Figura 6-33 - Gráfico de convergência do método de refinamento hierárquico.	169
Figura 6-34 – Rede Hidráulica.	171
Figura 6-35 - Adição do nó de referência e de ramos virtuais para conservação global da massa.	172
Figura 6-36 - Rede hidráulica, Wood-81.	175
Figura 6-37 - Curvas características dos tubos.	178
Figura 6-38 - Rede elétrica análoga.	179
Figura 6-39 - Matriz de entrada de dados da rede.	180
Figura 6-40 - Saída do Método de Refinamento Hierárquico.	182
Figura 6-41 - Gráfico de Convergência do Método de Refinamento Hierárquico. .	183

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LPP – Linear por partes

PLK – Primeira Lei de Kirchhoff

SLK – Segunda Lei de Kirchhoff

LISTA DE SÍMBOLOS

η	Rede
R	Resistor
g_k	Função característica do resistor do k -ésimo ramo
j_k	Corrente no k -ésimo ramo
v_k	Tensão no k -ésimo ramo
R	Resistência
G	Condutância
n_t	Número total de nós
n	Número de nós independentes
b	Número de ramos
\mathbf{A}_a	Matriz de incidência
N_n	n -ésimo nó da rede
\mathbf{A}	Matriz de incidência reduzida
E	Fonte de tensão independente
J	Fonte de corrente independente
\mathbf{v}	Vetor de tensão nos ramos da rede
e_n	Tensão nodal no n -ésimo nó da rede
\mathbf{e}	Vetor das tensões nodais
\mathbf{j}	Vetor de corrente nos ramos da rede
\mathbf{A}_E	Sub-matriz de \mathbf{A} correspondente aos ramos dos geradores de tensão
\mathbf{A}_R	Sub-matriz de \mathbf{A} correspondente aos ramos dos resistores
\mathbf{A}_J	Sub-matriz de \mathbf{A} correspondente aos ramos dos geradores de corrente

\mathbf{j}_E	Sub-vetor de \mathbf{j} correspondente aos ramos dos geradores de tensão
\mathbf{j}_R	Sub-vetor de \mathbf{j} correspondente aos ramos dos resistores
\mathbf{j}_J	Sub-vetor de \mathbf{j} correspondente aos ramos dos geradores de corrente
\mathbf{v}_E	Sub-vetor de \mathbf{v} correspondente aos ramos dos geradores de tensão
\mathbf{v}_R	Sub-vetor de \mathbf{v} correspondente aos ramos dos resistores
\mathbf{v}_J	Sub-vetor de \mathbf{v} correspondente aos ramos dos geradores de corrente
\mathbf{G}	Matriz de condutância dos ramos
\mathbf{G}_n	Matriz das condutâncias nodais
\mathbf{i}_s	Vetor das fontes de corrente equivalentes
\mathbf{T}_{nm}	Matriz da análise nodal modificada
\mathbf{x}	Vetor de variáveis da rede na ANM
\mathbf{u}	Vetor de fontes independentes na ANM
$\mathbf{0}$	Matriz nula
$\mathbf{1}_n$	Matriz identidade de ordem n
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz diagonal de operadores não lineares
l	Número de ligações da rede
T	Árvore do grafo
\mathbf{Q}	Matriz fundamental de corte
m	Número de fontes de tensão
t	Número de resistores da árvore
p	Número de resistores das ligações
q	Número de fontes de corrente
\mathbf{Q}_E	Sub-matriz de \mathbf{Q} correspondente às colunas dos geradores de tensão
\mathbf{Q}_R	Sub-matriz de \mathbf{Q} correspondente às colunas dos resistores
\mathbf{Q}_J	Sub-matriz de \mathbf{Q} correspondente às colunas dos geradores de

	corrente
\mathbf{G}_q	Matriz das condutâncias dos cortes
\mathbf{j}_{RT}	Sub-vetor de \mathbf{j}_R correspondente aos resistores pertencentes à árvore.
\mathbf{j}_{RL}	Sub-vetor de \mathbf{j}_R correspondente aos resistores não pertencentes à árvore (ligações).
\mathbf{v}_{RT}	Sub-vetor de \mathbf{v}_R correspondente aos resistores pertencentes à árvore.
\mathbf{v}_{RL}	Sub-vetor de \mathbf{v}_R correspondente aos resistores não pertencentes à árvore (ligações).
$\mathbf{Q}_{T(R),R}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem aos resistores da árvore T e cujas colunas correspondem a todos os resistores da rede.
$\mathbf{Q}_{T(ER),R}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem a todos os ramos da árvore T e cujas colunas correspondem a todos os resistores da rede.
$\mathbf{Q}_{T(E),R}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem aos geradores de tensão da árvore T e cujas colunas correspondem a todos os resistores da rede.
$\mathbf{Q}_{T(R),L(J)}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem aos resistores da árvore T e cujas colunas correspondem às fontes de corrente da rede.
$\mathbf{Q}_{T(E),L(R)}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem aos geradores de tensão da árvore T e cujas colunas correspondem aos resistores de ligação da rede.
$\mathbf{Q}_{T(E),L(J)}$	Sub-matriz de \mathbf{Q} cujas linhas correspondem aos geradores de tensão da árvore T e cujas colunas correspondem às fontes de corrente da rede.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A análise de redes em regime permanente é um problema da mais alta importância em engenharia, com inúmeras aplicações práticas, não só no campo da análise de circuitos elétricos, como também em sistemas físicos análogos, tais como redes hidráulicas ou em sistemas elétricos de potência.

Neste trabalho desenvolveremos um estudo sobre a análise em regime permanente de redes elétricas constituídas por geradores independentes de tensão, geradores independentes de corrente e resistores não lineares.

1.1. Apresentação do Problema

Em primeiro lugar, convém limitar nosso campo de estudo, restringindo as características da rede em foco. Seja η uma rede elétrica conexa e não separável. Já dissemos que η será constituída por resistores e por geradores independentes de tensão e de corrente. Assume-se que η não contenha conjuntos de corte constituídos

apenas por geradores de corrente; nem tampouco laços constituídos apenas por geradores de tensão.

A relação constitutiva de cada resistor R_k será representada por uma função g_k , na qual $j_k = g_k(v_k)$, onde j_k e v_k representam, respectivamente, a corrente que flui através de R_k e a tensão entre seus terminais. Admite-se que g_k será sempre uma função contínua, bijetora, monotonicamente crescente definida no domínio dos reais.

A solução de uma rede com estas características é definida como sendo qualquer conjunto de tensões e de correntes em seus ramos que satisfaçam as Leis de Kirchhoff e as funções características de seus resistores.

Uma análise formal das condições de existência e unicidade da solução de redes dessa natureza foi apresentada por Duffin [1], e seu principal resultado foi sintetizado por Chua [2] no seguinte teorema:

Teorema Fundamental das Redes Resistivas: Existência e Unicidade da Solução.

Seja η uma rede resistiva que contém apenas resistores bipolares, fontes independentes de tensão e fontes independentes de corrente. Admite-se que η não contém laços constituídos exclusivamente por fontes de tensão, nem conjuntos de corte constituídos exclusivamente por fontes de corrente. Se a curva característica v - j de cada resistor é uma função estritamente monotonicamente crescente, e se $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} j = \pm\infty$, então, independentemente dos valores instantâneos de todas as fontes de tensão e de corrente, a rede η possui uma e somente uma solução em todo instante t .

A demonstração desse teorema é demasiado complexa e será omitida neste texto, podendo ser encontrada em [1].

A solução da rede, que pelo enunciado existe e é única, raras vezes, contudo, apresenta solução analítica. Em geral, sua solução será obtida por um sistema de equações algébricas não lineares, requerendo a utilização de métodos numéricos de solução.

O problema da análise reduz-se, portanto, à aplicação de um método numérico eficiente de solução da rede com mínimo custo computacional.

1.2. Uma Breve Revisão

Diversos autores propuseram métodos de solução para esse tipo de redes. Birkhoff e Diaz [3] apresentaram um método similar ao método de Seidel, o qual introduz um processo de relaxação na solução de equações lineares. Katzenelson e Seitelman [4] descreveram um método iterativo com prova de convergência em um número finito de passos. Minty [5] propôs um método baseado na aproximação da característica monotonicamente crescente dos resistores por uma função em “escada”, encontrando a solução da rede em um número finito de passos por um processo de busca.

Katzenelson [6] apresentou em 1965 um método de solução a partir da aproximação da característica de cada resistor não linear da rede por uma função linear por partes. O método proposto por Katzenelson destacou-se por sua simplicidade, eficiência computacional e garantia de convergência, dando origem posteriormente a diversos trabalhos nesta área e a toda a teoria das redes lineares por partes (*piecewise linear networks*).

1.3. Metodologia Proposta

O propósito deste trabalho consiste em apresentar um método computacional capaz de chegar a esta solução, através de sucessivas interpolações lineares por partes da rede não linear.

O método de solução proposto consiste, primeiramente, em selecionar alguns pontos da curva característica de cada resistor e substituir cada função não linear dos resistores por uma função linear por partes, oriunda de uma interpolação linear por partes realizada entre pontos selecionados da curva característica original.

O passo seguinte é resolver a rede linear por partes resultante utilizando o algoritmo de Katzenelson, que converge para a solução exata da rede linear por partes em um número finito de iterações.

A solução da rede não linear original é obtida através de sucessivos refinamentos das interpolações lineares das funções características dos resistores, resolvendo-se, a cada iteração, uma rede linear por partes derivada da rede original. A convergência do método de refinamento verifica-se quando o erro de cada

interpolação linear for suficientemente pequeno. A solução da última rede linear por partes obtida será a solução da rede não linear original.

Por fim, destacamos que o método aqui proposto é inovador em relação aos algoritmos tradicionalmente empregados na solução de redes não lineares, destacando-se sobretudo por sua garantia de convergência.

1.4. Mapa da Dissertação

Nos capítulos seguintes, revisaremos os conceitos fundamentais da teoria dos circuitos e desenvolveremos o estudo do algoritmo de solução baseado no método de Katzenelson.

No Capítulo 2 definiremos formalmente os bipolos elétricos da rede e revisaremos aspectos relevantes de sua topologia. Finalmente, enunciaremos a Primeira e a Segunda Leis de Kirchhoff de acordo com a topologia do circuito.

No Capítulo 3 introduziremos dois métodos de análise da rede: o método da Análise Nodal, bem como sua variante, o método da Análise Nodal Modificada; e o método da Análise de Cortes. Para cada método, chegaremos ao equacionamento de redes resistivas tanto lineares quanto não lineares.

No Capítulo 4 apresentaremos a teoria das redes resistivas lineares por partes e o algoritmo iterativo proposto por Katzenelson para sua solução.

No Capítulo 5 descreveremos o algoritmo de solução de redes resistivas não lineares com elementos de características monotonicamente crescentes, obtido através de um processo de Refinamento Hierárquico sobre o algoritmo de Katzenelson.

No Capítulo 6 apresentaremos resultados de simulações computacionais sobre a aplicação do algoritmo de Katzenelson e do Método de Refinamento Hierárquico na solução de redes não lineares.

Finalmente, no Capítulo 7 apresentaremos nossas conclusões e uma breve discussão a respeito dos resultados obtidos.

Capítulo 2

CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DOS CIRCUITOS

Neste capítulo faremos uma revisão de alguns conceitos pertinentes à Teoria dos Circuitos, tendo em vista assentar os fundamentos teóricos para o desenvolvimento dos métodos de análise de redes apresentados nos capítulos seguintes.

2.1. Circuitos Concentrados

Circuito elétrico, também chamado rede elétrica, por definição, é qualquer malha ou caminho fechado pelo qual pode circular um fluxo de cargas elétricas. Os circuitos elétricos podem ser classificados em *circuitos concentrados* e *circuitos distribuídos*.

Circuitos concentrados são obtidos através da conexão de elementos concentrados. Um elemento concentrado, por sua vez, é todo elemento que possui

dimensões desprezíveis em relação ao comprimento de onda correspondente à sua frequência normal de operação. Caso contrário, diz-se que o circuito é distribuído.

Toda a teoria dos circuitos elétricos (ou redes elétricas) pode ser derivada da Teoria Eletromagnética a partir da hipótese simplificadora de que todos os seus elementos são concentrados. Tal simplificação é de grande importância, tanto teórica quanto prática. Do ponto de vista teórico, a teoria dos circuitos simplifica a modelagem matemática da teoria eletromagnética, substituindo entidades vetoriais por grandezas escalares. Sob o aspecto prático, embora se tratando de uma aproximação da Teoria Eletromagnética, a Teoria dos Circuitos presta-se à solução de uma grande quantidade de problemas de engenharia. Pode-se dizer, em certo sentido, que a Teoria dos Circuitos está para a Eletromagnética, assim como a Hidráulica está para a Mecânica dos Fluidos.

Em síntese, Orsini [24] enuncia da seguinte forma o critério de validade da Teoria dos Circuitos:

“A Teoria dos Circuitos Elétricos só pode ser aplicada a sistemas elétricos cuja maior dimensão seja muito inferior a $\lambda_m/4$, onde λ_m é o comprimento de onda, no vácuo, da onda eletromagnética de maior frequência a ser considerada no sistema.”

Um aspecto importante dos circuitos concentrados é que estes podem ser modelados em analogia com sistemas mecânicos constituídos por um conjunto de partículas em mútua interação. Essa propriedade será explorada adiante, ao estendermos nossa análise a redes hidráulicas.

Deste ponto em diante, a menos que se manifeste o contrário, referir-nos-emos sempre a circuitos concentrados (para os quais é válida a Teoria dos Circuitos), e cada circuito elétrico será modelado pela interligação de elementos concentrados chamados bipolos elétricos.

2.2. Bipolos Elétricos e Direções de Referência

Um bipolo elétrico, por definição, consiste em um dispositivo elétrico com dois terminais acessíveis, através do qual pode circular uma corrente elétrica.

Em um bipolo elétrico, a cada instante, a corrente que entra em um de seus terminais é igual à corrente que deixa o outro terminal; e a diferença de potencial elétrico (ou tensão elétrica) entre seus terminais pode ser determinada sem ambigüidades através de medições físicas. Em outras palavras, em um bipolo elétrico, a corrente que flui através do elemento e a tensão ao longo do mesmo são grandezas bem definidas. A cada instante, portanto, há duas variáveis de interesse associadas a um bipolo: a corrente que o atravessa e a tensão entre os seus terminais.

A fim de avaliarmos corretamente a valor dessas variáveis, é de fundamental importância estabelecermos sentidos de referência para a tensão e para a corrente no bipolo. Indicaremos o sentido da tensão pelos sinais mais e menos colocados próximos aos terminais do bipolo, e o sentido da corrente pela direção da seta sobre o mesmo.

A Fig. 2-1 ilustra as duas convenções possíveis para o sentido da tensão e da corrente. A primeira situação chama-se convenção do receptor, na qual uma corrente positiva *entra* pelo terminal de maior potencial elétrico do mesmo. A segunda situação chama-se convenção do gerador, na qual uma corrente positiva *sai* pelo terminal de maior potencial elétrico do bipolo. Note que, na convenção do gerador, tensão e corrente positivas implicam que o bipolo fornece potência elétrica, e que, na convenção do receptor, tensão e corrente positivas significam que o bipolo recebe potência elétrica do restante do circuito[†].

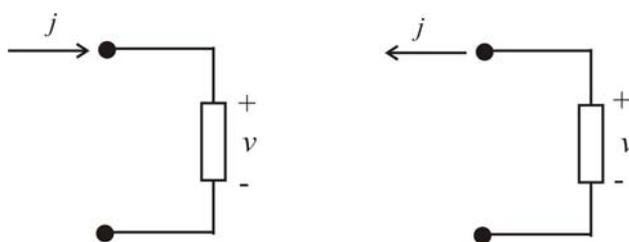


Figura 2-1 - Convenção do receptor e convenção do gerador para os sentidos da tensão e da corrente em um bipolo elementar.

[†] Note que os sentidos convencionados para a tensão e para a corrente em um elemento indicam a disposição correta em que podem ser conectados os instrumentos de medição sobre o elemento.

2.3. Definição dos Bipolos Elementares

O modelo de um circuito elétrico é construído através da interconexão de vários bipolos elétricos elementares.

No nosso estudo, analisaremos redes elétricas constituídas por três tipos de elementos:

- Resistores;
- Geradores (ou fontes) independentes de tensão; e
- Geradores (ou fontes) independentes de corrente.

Resistores são bipolos elementares *passivos*, que não introduzem energia no sistema. Já os geradores, que têm precisamente a função de introduzir energia elétrica no circuito, são chamados bipolos elementares *ativos*. Examinaremos brevemente cada um deles em seguida.

2.3.1. Resistores

Um bipolo elétrico é chamado *resistor* sempre que existir uma relação funcional do tipo

$$f(v, j, t) = 0 \quad (2.1)$$

entre a tensão entre seus terminais, a corrente que o atravessa e o tempo [24]. Representaremos os resistores pelo símbolo na Fig. 2-2. Se esta relação não depender explicitamente do tempo, o resistor é dito *fixo* ou *invariante no tempo*. Caso contrário, o resistor será *variável no tempo*.

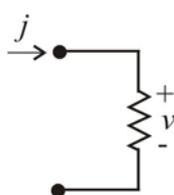


Figura 2-2 – Resistor elementar.

Um resistor fixo, em muitos casos, pode ser descrito por uma das seguintes relações:

$$v = r(j) \quad (2.2)$$

ou

$$j = g(v) \quad (2.3)$$

onde v e j são medidos com a convenção do receptor.

Um resistor do tipo (2.2) é dito *controlado por corrente*, ao passo que um resistor do tipo (2.3) é dito *controlado por tensão*. As relações (2.2) e (2.3) serão também chamadas *relações constitutivas* dos resistores, e seus respectivos gráficos serão chamados *curvas características*.

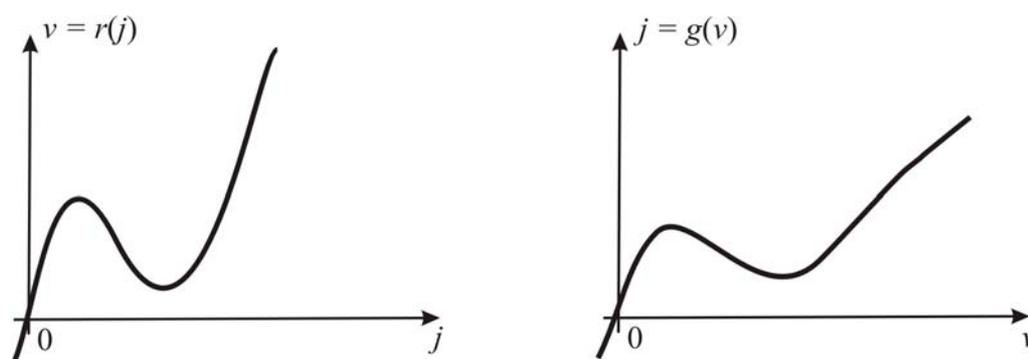


Figura 2-3 – Curvas características de resistores.

Note que, se impusermos que o resistor é um elemento passivo, isto é, que só possa absorver energia, sua curva característica deve estar situada apenas no primeiro e no terceiro quadrantes do plano- (v, j) , de modo que tenhamos sempre a energia absorvida pelo bipolo: $v \cdot j > 0$.

Diz-se que um resistor fixo é *ideal* quando sua curva característica é uma reta passando pela origem do plano- (v, i) . Um resistor linear fixo é definido pelas seguintes relações constitutivas:

$$v = R \cdot j \quad (2.4)$$

$$j = G \cdot v \quad (2.5)$$

onde R e G representam duas constantes chamadas, de resistência e condutância do resistor, medidas (no SI) em ohms (Ω) e siemens (S) respectivamente. As equações (2.4) e (2.5) são as conhecidas expressões da Lei de Ohm. Note que, ainda que a característica de um resistor possa ser representada por uma função linear, o resistor só será ideal se sua curva característica interceptar a origem. Em outras palavras, um resistor ideal será sempre um bipolo passivo.

Um resistor fixo *não linear* é aquele em que sua curva característica no plano (v, j) corresponde a uma função não linear. Um exemplo típico de resistor não linear é o diodo, cuja curva característica é esboçada da Fig. 2-4.

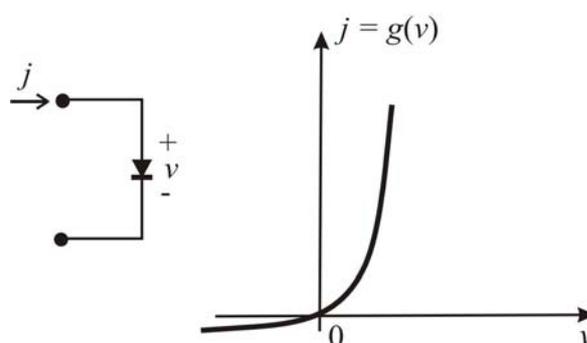


Figura 2-4 – O diodo como exemplo de resistor não linear controlado por tensão. Curva característica do diodo e respectiva aproximação linear por partes.

Dizemos que um resistor (ou qualquer outro bipolo elétrico) possui *terminais intercambiáveis* quando o sentido de sua inserção no circuito não altera o comportamento do sistema. Graficamente, isto implica que sua curva característica será simétrica em relação à origem. Note que todo resistor ideal possui terminais intercambiáveis, ao contrário do diodo, representado na Fig. 2-4.

2.3.2. Geradores Independentes de Tensão e de Corrente

O *gerador independente de tensão* é um bipolo cuja tensão entre seus terminais é constantemente igual a uma dada função do tempo, independentemente da corrente que o atravessa, representado pelo símbolo da Fig. 2-5. Quanto essa função é constante ao longo do tempo, diz-se que o gerador é um *gerador de tensão*

continua. A corrente em um gerador de tensão é determinada exclusivamente pelo circuito externo ao mesmo.

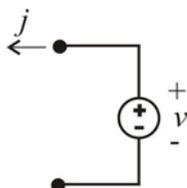


Figura 2-5 – Gerador de tensão elementar representado segundo a convenção do gerador.

Um *gerador ideal de corrente* é um bipolo que fornece, por seus terminais, uma corrente de valor fixado por uma dada função do tempo, independentemente do valor da tensão entre seus terminais, representado pelo símbolo Fig. 2-6. A tensão no gerador de corrente também depende exclusivamente do circuito externo ao mesmo.

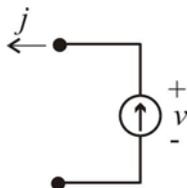


Figura 2-6 – Gerador de corrente elementar representado segundo a convenção do gerador.

2.4. Topologia de Redes

Após a definição dos elementos do circuito, convém estudar agora suas associações, que constituirão o circuito propriamente dito. Os bipolos elementares podem ser associados interligando seus terminais por condutores perfeitos, equipotenciais. Uma associação qualquer de bipolos será chamada *rede de bipolos* [24]. Aos terminais dos elementos da rede chamaremos *nós*, e cada elemento individualmente será chamado *ramo* da rede.

2.4.1. Circuitos Elétricos e Grafos

A fim de indicar geometricamente a interligação de bipolos em uma rede, representaremos a rede física por um grafo.

Um *grafo* é uma entidade matemática definida por um conjunto de nós e de ramos, em que cada ramo conecta exatamente dois nós. O processo de abstração da rede física ao grafo encontra-se exemplificado na Fig. 2-7. Note que cada bipolo da rede é representado simplesmente por uma linha, não importando qual a sua natureza. Estas linhas são os ramos (ou arestas) do grafo. Os pontos de encontro dos terminais dos bipolos serão representados por pontos, designados por nós (ou vértices) do grafo.

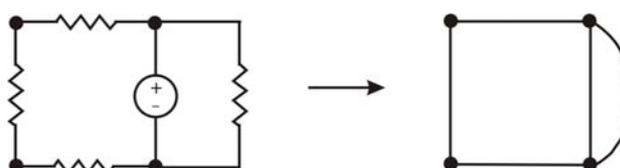


Figura 2-7 – Abstração da rede elétrica ao grafo.

Note que a definição de grafo dada acima abrange, por exemplo, casos especiais em que um nó pertencente ao grafo não possui ramos conectados a si, ou casos em que um ramo começa e termina no mesmo nó. Estes casos não serão aqui considerados, por terem pouca importância no estudo de circuitos.

Seja um grafo Y . Um grafo Y_1 será um *subgrafo* de Y se e somente se cada nó ou ramo de Y_1 pertencer também a Y . Em outras palavras, um subgrafo consiste num subconjunto do grafo original, que pode ser obtido a partir deste último pela exclusão de nós ou ramos. Um subgrafo constituído por apenas um nó é também chamado *subgrafo degenerado*.

Um *grafo orientado* consiste em um grafo no qual cada ramo está associado a uma direção de referência. No processo de abstração da rede ao grafo, essa direção é determinada pela convenção adotada para o sentido da corrente elétrica no ramo da rede. Desta forma, um grafo orientado pode ser definido como um conjunto de nós e de *ramos orientados*, conforme a definição acima. A Fig. 2-8 ilustra o processo de abstração da rede η ao grafo orientado correspondente.

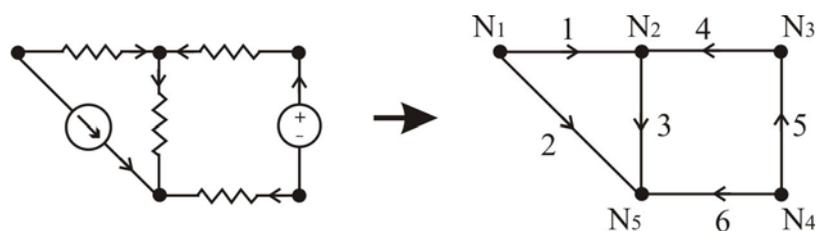


Figura 2-8 - Abstração da rede elétrica ao grafo orientado.

Na Fig. 2-8, diz-se que o ramo 4 *incide* sobre os nós N_2 e N_3 , e que esse mesmo ramo 4 está *saindo* do nó N_3 e *entrando* no nó N_2 .

Matriz de Incidência

Considere a novamente a rede representada na Fig. 2-8 com seu respectivo grafo orientado. De um ponto de vista analítico, o grafo da Fig. 2-8 pode ser descrito como uma lista de nós e de ramos orientados, com a indicação de que ramos saem e entram em cada nó. Esta descrição pode ser feita convenientemente através de uma notação matricial. Sejam b e n_t o número de ramos e de nós de um grafo Y . A *matriz de incidência* \mathbf{A}_a é definida como sendo uma matriz retangular de n_t linhas e b colunas, na qual o (i, k) -ésimo elemento a_{ik} é definido por:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o ramo } k \text{ sai do nó } i \\ -1 & \text{se o ramo } k \text{ entra no nó } i \\ 0 & \text{se o ramo } k \text{ não incide sobre o nó } i \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que, como cada ramo sai de um único nó e entra também em um único nó do grafo, cada coluna da matriz \mathbf{A}_a contém um elemento igual a 1, um elemento igual a -1 , e todos os outros elementos iguais a 0. A matriz de incidência do grafo da Fig. 2-8 é:

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \text{Ramo:} \\ \text{N1} \\ \text{N2} \\ \text{N3} \\ \text{N4} \\ \text{N5} \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array} \quad (2.7)$$

onde as colunas de A_a correspondem aos ramos da rede em ordem de numeração, e as linhas de A_a correspondem respectivamente aos nós N_1, N_2, N_3, N_4 e N_5 da rede.

2.4.2. Laços, Conjuntos de Corte e Árvores

Nesta seção faremos algumas definições a respeito dos grafos com o objetivo de introduzirmos três conceitos fundamentais para a análise de redes: laços, conjuntos de corte e árvores de um grafo.

Chama-se *caminho* entre dois nós qualquer conjunto de ramos do grafo que interligue esses nós, sem levar em conta a orientação dos ramos.

Diz-se que um grafo é *conexo* se existe pelo menos um caminho entre quaisquer dois nós pertencentes ao grafo. Por convenção, assume-se que um grafo constituído por apenas um nó é um grafo conexo. Em um grafo não conexo, cada um de seus subgrafos conexos é também chamado de *parte separada*. Note, portanto, que um grafo não conexo deve ter pelo menos duas partes separadas.



Figura 2-9 - Grafo conexo e grafo não-conexo.

Um grafo conexo Y é dito *planar* quando for possível desenhá-lo num plano (ou sobre uma superfície esférica) de modo que seus ramos não se cruzem em nenhum ponto que não seja um nó do grafo. Nesse caso, diz-se que o novo desenho é a *representação topológica* do grafo.

Um grafo Y é dito *articulado* quando este pode ser dividido em dois subgrafos não degenerados que se interligam em Y por apenas um nó. Este nó é também chamado articulação ou vértice de corte. A Fig. 2-10 exemplifica alguns grafos articulados e não-articulados. Um grafo não articulado é também chamado *não separável*.

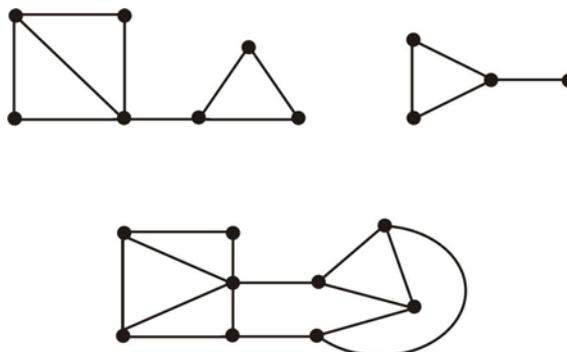


Figura 2-10 – Acima: exemplos de grafos articulados. Abaixo: grafo não-separável.

Observação.

Do ponto de vista da análise de circuitos, se uma rede é constituída por um grafo articulado e se não existe acoplamento entre os elementos dessas duas partes articuladas, a análise da rede reduz-se à análise de duas sub-redes independentes. Este fato é evidente para o caso de dois subgrafos não conectados. Para o caso de um grafo articulado, veremos adiante que a Primeira Lei de Kirchhoff implicará que não haja fluxo de corrente entre as duas sub-redes, e que o fato de ambas possuírem um nó em comum não impõe nenhuma restrição à tensão nos ramos do circuito.

Um subgrafo L de um grafo Y é chamado *laço* de Y se as seguintes condições são satisfeitas:

- a) L é conexo;
- b) Em cada nó de L incidem exatamente dois ramos;
- c) Cada ramo de L conecta-se a exatamente dois nós.

Note que a condição (c) já estava incluída previamente na definição de grafo. Na Fig. 2-11, note que o grafo possui três laços distintos: $\{5, 6\}$, $\{1, 4, 5, 7\}$ e $\{1, 4, 6, 7\}$.

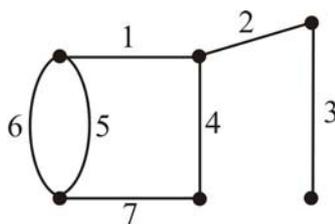


Figura 2-11 – Exemplos de laços.

A remoção de um ramo em um grafo é uma operação pela qual elimina-se do grafo o segmento de reta que representa o ramo, mantendo, contudo, os dois nós que o ramo conecta. A Fig. 2-12 ilustra a operação de remoção de ramos em um grafo.

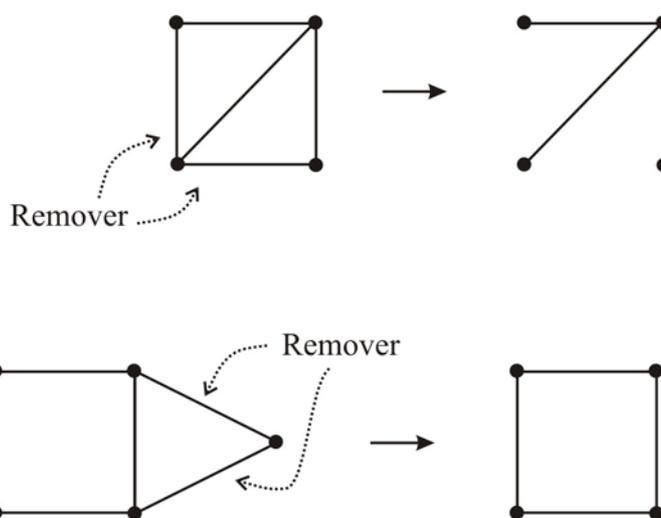


Figura 2-12 – Operação de remoção de ramos em grafos.

Chama-se *conjunto de corte* (ou simplesmente *corte*) de um grafo Y com s partes separadas a um conjunto de ramos de Y tais que:

- A remoção de todos os ramos do conjunto de corte faz com que o grafo resultante tenha $(s + 1)$ partes separadas;
- A remoção de todos menos um ramos do conjunto de corte faz com que o grafo resultante continue com s partes separadas;

Note que, particularmente, o conjunto de ramos conectados a um nó é um conjunto de corte do grafo, visto que um nó isolado constitui uma parte separada do grafo.

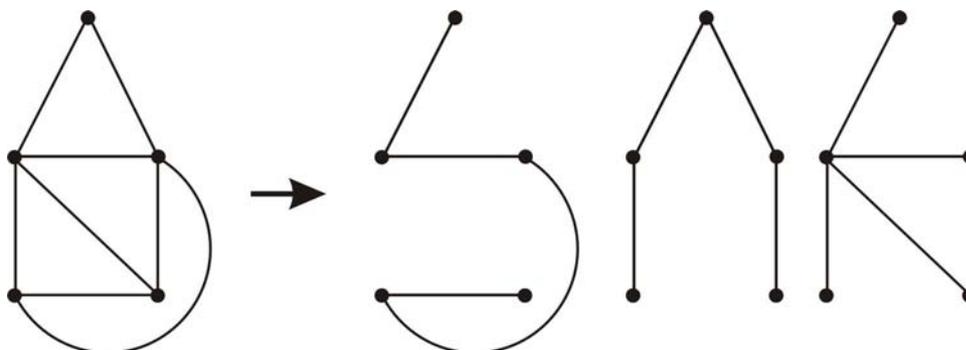


Figura 2-13 – Exemplos de árvores de um grafo.

Chama-se *árvore* T de um *grafo conexo* Y a um subgrafo de Y que satisfaça as seguintes propriedades[‡]:

- a) T é um grafo conexo;
- b) T é maximal, isto é, contém todos os nós de Y ;
- c) T é acíclico, isto é, não contém nenhum laço.

Uma árvore pode ser compreendida ainda como sendo o conjunto de ramos que permanece quando se remove o menor número possível de ramos de Y de modo a eliminar todos os seus laços.

É fácil verificar que um grafo pode possuir muitas árvores distintas. Pode-se mostrar que, se um gráfico possui n nós, e se há um único ramo conectando cada possível par de nós, este grafo possui $n^{(n-2)}$ árvores distintas. Para esta família de grafos, note que um grafo com 10 nós possuirá nada menos que 10^8 distintas árvores.

Dados um grafo Y e uma árvore T , os ramos de T são chamados *ramos da árvore*, e os ramos de Y que não pertencem a T são chamados *ligações*.

2.4.3. Teorema Fundamental dos Grafos: Propriedades da Árvore

Os conceitos *laço*, *conjunto de corte* e *árvore* são de grande importância em teoria dos grafos. Apresentaremos agora o Teorema Fundamental dos Grafos, que une esses três conceitos estabelecendo importantes propriedades da árvore.

Teorema.

Dado um grafo conexo Y com n_t nós e b ramos, e uma árvore T de G :

- a) Existe um *único* caminho ao longo da árvore entre quaisquer dois nós;
- b) Existem $(n_t - 1)$ ramos da árvore e $(b - n_t + 1)$ ligações;
- c) Cada ligação de T constitui, junto com o caminho único na árvore que interliga seus nós, um *único* laço, chamado *laço fundamental* associado à ligação;
- d) Cada ramo da árvore T define, junto com algumas ligações, um único conjunto de corte de Y , chamado *conjunto de corte fundamental* (ou simplesmente *corte fundamental*) associado ao ramo da árvore.

Prova.

a) Suponha que houvesse dois caminhos distintos ao longo da árvore entre dois nós N_1 e N_2 . Como alguns ramos desses dois caminhos constituiriam um laço, a árvore conteria um laço, o que contraria o requisito (c) da definição de árvore.

b) Seja T uma árvore de Y . Então T é um subgrafo de Y que conecta todos os seus nós e que, portanto, possui n_t nós. Se um nó de T possui apenas um ramo da árvore incidindo sobre ele, este nó é chamado *nó terminal* de T . Como T é um subgrafo conexo que não contém nenhum laço, T terá pelo menos dois nós terminais. Removamos agora da árvore um de seus nós terminais e seu respectivo ramo de incidência. O subgrafo restante deve ainda ter pelo menos dois nós terminais. Continuemos removendo da árvore todos os seus nós terminais e seus respectivos ramos de incidência até que reste somente um ramo da árvore. Este ramo incide sobre dois nós. Como havia n_t nós, a árvore T devia ter originalmente $(n_t - 1)$ ramos. Como todos os ramos de Y não pertencentes a T são chamados ligações, existem $(b - (n_t - 1)) = (b - n_t + 1)$ ligações.

c) Seja uma ligação l_1 que conecta os nós N_1 e N_2 . Por (a), existe um único caminho na árvore entre N_1 e N_2 . Este caminho, juntamente com a ligação l_1 constitui um laço

‡ Alguns autores precisam que uma árvore que contém todos os nós do grafo chama-se *árvore de espalhamento*.

único, visto que a árvore não possui nenhum outro caminho entre N_1 e N_2 para compor um laço distinto de l_1 .

d) Considere um ramo b_1 de T tal qual é mostrado na Fig. 2-14. Remova b_1 de T . O grafo resultante desta operação é constituído por duas partes separadas (e conectadas), digamos T_1 e T_2 . Como toda ligação conecta dois nós pertencentes a T , consideremos o conjunto L de todas as ligações que conectam um nó de T_1 a um nó de T_2 . Observe que as ligações de L juntamente com o ramo da árvore b_1 formam um conjunto de corte. Note que nenhuma ligação não pertencente a L pode constituir um outro conjunto de corte associado ao ramo b_1 , visto que essas ligações juntamente com caminhos em T_1 ou em T_2 constituiriam laços.

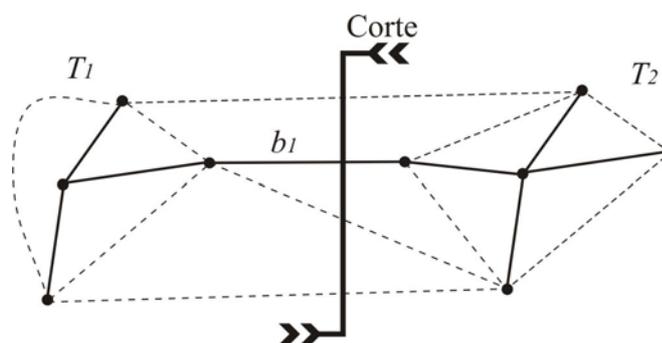


Figura 2-14 – Ilustração das propriedades de um corte.

2.5. As Leis de Kirchhoff

Neste ponto, voltar-nos-emos ao enunciado e à consideração detalhada das leis básicas que regem a Teoria dos Circuitos: a Primeira e a Segunda Lei de Kirchhoff.

2.5.1. A Primeira Lei de Kirchhoff (PLK)

Consideraremos agora a Primeira Lei de Kirchhoff aplicada aos nós da rede, e em seguida ampliaremos seu conceito mostrando que a lei também se aplica a conjuntos de corte.

A Primeira Lei de Kirchhoff aplicada aos nós da rede enuncia que:

“Para qualquer circuito elétrico concentrado, para qualquer um de seus nós, e a cada instante, a soma algébrica das correntes de todos os ramos que saem ou entram neste nó é igual a zero”.

O sinal algébrico da corrente em cada ramo será determinado em relação à convenção previamente adotada para o ramo. Para cada nó, a expressão matemática da PLK chama-se *equação do nó* ou *equação nodal*.

Observações:

- A PLK impõe uma restrição linear às correntes nos ramos que incidem sobre cada nó do circuito. Em outras palavras, a PLK expressa-se em cada nó por uma equação linear (com coeficientes constantes) cujas variáveis são as correntes dos ramos que incidem neste nó.
- A PLK aplica-se a qualquer circuito concentrado, não importando se seus elementos são lineares ou não lineares, ativos ou passivos, fixos ou variantes no tempo, etc.
- Tendo em vista que a corrente em um ramo expressa o fluxo de cargas elétricas que passam através do ramo, fica claro que a PLK implica que não há acúmulo de cargas elétricas em nenhum nó. Em outras palavras, a PLK expressa a conservação da carga elétrica em cada nó do circuito.
- Evidentemente a PLK não se aplica a circuitos distribuídos. Por exemplo, no caso de uma antena de rádio transmissor, existe uma corrente na base da antena, ao passo que a corrente no topo da mesma é nula. Nesse caso, o comprimento da antena é aproximadamente um quarto do comprimento de onda correspondente à frequência de operação; logo, não se trata de um circuito concentrado.

O enunciado mais geral da PLK aplica-se aos conjuntos de corte da rede. O conceito fundamental envolvido é que, se imaginarmos o circuito dividido em duas partes quaisquer, a soma algébrica das correntes que sai de uma das partes será igual a zero, como consequência direta da conservação da carga elétrica no circuito. Ampliando o enunciado anterior, podemos reescrever:

“Para qualquer circuito elétrico concentrado, para qualquer um de seus conjuntos de corte, e a cada instante, a soma algébrica das correntes em todos os ramos que pertencem ao conjunto de corte é igual a zero”.

O sinal algébrico da corrente em cada ramo será determinado em relação à convenção previamente adotada para o ramo. Para cada conjunto de corte, a expressão matemática deste enunciado chama-se *equação do conjunto de corte*.

Observe ainda que, se o somatório da corrente em cada conjunto de corte é igual a zero, o somatório das correntes nos ramos que incidem sobre cada nó também será nulo. Para visualizar este fato, note que é sempre possível escolher um determinado corte que isole um nó do restante do circuito, identificando assim esse conjunto de corte com os ramos que incidem sobre o nó. Na Fig. 2-15, observe que o Corte 1 foi escolhido em torno do nó destacado. Neste caso, a equação do conjunto de corte será igual à equação nodal para este nó.

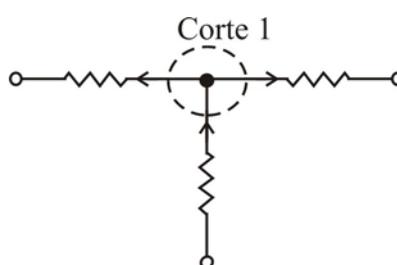


Figura 2-15 – Corte feito em torno de um nó do circuito.

2.5.2. A Segunda Lei de Kirchhoff (SLK)

A Segunda Lei de Kirchhoff enuncia que:

“Para qualquer circuito concentrado, para qualquer um de seus laços, e a qualquer instante, arbitrado um sentido de percurso para este laço, a soma algébrica das tensões nos ramos pertencentes ao laço é igual a zero”.

O sinal algébrico da tensão em cada ramo será determinado pela relação entre o sentido de percurso do laço e o sentido convencional para a tensão em cada ramo. Para cada laço do circuito, a expressão matemática deste enunciado chama-se *equação do laço*.

Observações:

- A SLK impõe uma restrição linear às tensões nos ramos pertencentes a um laço.
- A SLK aplica-se a qualquer circuito concentrado, não importando se seus elementos são lineares ou não lineares, ativos ou passivos, fixos ou variantes no tempo, etc.
- Tal como a Primeira Lei, a Segunda Lei de Kirchhoff não é válida para circuitos distribuídos.

Em geral, a Segunda Lei de Kirchhoff pode ainda ser estendida para um caminho qualquer da rede, como segue:

“Para qualquer circuito concentrado, a qualquer instante, a tensão entre dois de seus nós é igual à soma algébrica das tensões nos ramos pertencentes a um caminho qualquer que conecta esses dois nós na rede”.

Note ainda que o sinal algébrico da tensão em cada ramo será determinado pela relação entre o sentido do caminho escolhido entre os dois nós e o sentido convencional para a tensão em cada ramo.

2.6. Sumário

Neste capítulo fizemos uma revisão dos conceitos fundamentais da teoria dos circuitos, os quais serão utilizados adiante no desenvolvimento deste texto. Foram definidos os bipolos elétricos elementares e alguns conceitos de topologia de redes. Finalmente, enunciamos as Leis de Kirchhoff, a partir das quais obteremos o equacionamento da rede com vistas a sua solução.

Capítulo 3

ANÁLISE DE REDES

Segundo Desoer [26], o problema geral da análise de redes elétricas pode ser enunciado da seguinte forma:

“Dados o grafo de uma rede, as características de seus ramos, as entradas (isto é, as formas de onda das fontes independentes) e suas condições iniciais, pede-se calcular tensões e correntes em cada ramo do circuito”.

Em outras palavras, analisar uma rede elétrica significa calcular, para cada instante, um conjunto de tensões e de correntes em seus ramos que satisfaçam as Leis de Kirchhoff e as relações características de seus ramos.

Quando essa análise é feita após a entrada do sistema em um estado de equilíbrio, diz-se que a análise é feita em *regime permanente*. Quando a análise leva em conta o processo de transição ou acomodação de um estado inicial do circuito até um estado de equilíbrio, diz-se que a análise é *transitória*.

Neste capítulo descreveremos dois métodos de equacionamento de redes com vistas à sua análise: o método da *Análise Nodal* e o método da *Análise de Cortes*. Como a formulação de cada um dos dois métodos é consequência exclusiva da aplicação das Leis de Kirchhoff ao circuito, não existe restrição quanto à natureza dos elementos envolvidos: os elementos da rede podem ser lineares ou não lineares, fixos ou variáveis no tempo, passivos ou ativos. Atendo-nos ao escopo deste estudo, exemplificaremos a utilização desses métodos empregando-os na formulação de redes resistivas lineares e não lineares constituídas exclusivamente por resistores e fontes independentes.

3.1. A Análise Nodal

Seja uma rede η constituída por n_t nós e b ramos. Ao todo, existem b tensões e b correntes como incógnitas. Sem perda de generalidade, pode-se supor que o grafo é conexo, ou seja, que possui apenas uma parte separada. (Se a rede tiver partes separadas, sempre é possível unir essas partes conectando-as a um nó suplementar).

O primeiro passo da análise será escolher um nó arbitrário de referência. Normalmente escolhe-se como nó de referência a *terra* do circuito. Designaremos o nó de referência por N_0 , e os demais nós do circuito, também chamados de *nós independentes*, por N_1, N_2, \dots, N_n onde $n = n_t - 1$.

3.1.1. Equações Nodais e Matriz de Incidência Reduzida

Começaremos o estudo do método da Análise Nodal enunciando uma importante propriedade das equações nodais de um circuito:

A PLK implica que as n equações nodais correspondentes aos nós independentes de um circuito são *linearmente independentes* (LI).

Demonstração:

Considere as n_t equações nodais da rede η . Cada uma dessas equações expressa a PLK em termo das correntes nos ramos j_1, j_2, \dots, j_b ; portanto, cada uma dessas equações é uma equação algébrica linear homogênea nas variáveis j_1, j_2, \dots, j_b .

Seja $\varepsilon_k = 0$ a representação da equação resultante da aplicação da PLK ao nó N_k da rede η , para $k = 1, 2, \dots, n_t$. Para o nó N_k na Figura 3.1, $\varepsilon_k = 0$ representa:

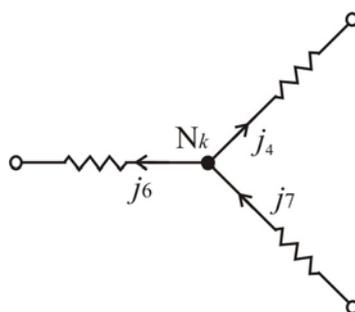
$$j_4 + j_6 - j_7 = 0.$$


Figura 3-1 – Um nó típico para ilustração da PLK.

Observe que, pela definição acima, $\sum_{k=1}^{n_t} \varepsilon_k = 0$. Isto significa que, somando-se todas as equações dos nós da rede, todos os termos da equação resultante se cancelam. (Este fato pode facilmente ser visualizado se observamos que a contribuição da corrente de cada ramo orientado na equação de seu nó inicial será simétrica à contribuição dessa mesma corrente na equação de seu nó final). Conclui-se, portanto, que as n_t equações nodais obtidas para a rede η são *linearmente dependentes* (LD).

Mostraremos agora que as n equações $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \dots, \varepsilon_n = 0$ (lembrando que $n = n_t - 1$) são LI.

Suponha em primeiro lugar que as n equações acima são LD. Isso implicaria que, após uma eventual reordenação das equações, existisse uma combinação linear das primeiras k expressões $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ ($k < n$) com respectivos coeficientes não nulos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tal que:

$$\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_k \varepsilon_k = 0 \quad (3.1)$$

Considere agora o conjunto de todos os nós N_1, N_2, \dots, N_k correspondentes a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ em (3.1). Considere ainda o conjunto dos nós restantes de η , mostrado

na Figura 3.2. Dado que η é conectada, existe pelo menos um ramo l que conecta um nó do primeiro conjunto a um nó do outro. Logo, o termo da corrente j_l aparecerá em uma e somente uma das expressões $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$, haja vista que o ramo l está conectado a apenas um nó do primeiro conjunto. Assim, não pode haver cancelamento da corrente j_l na soma $\sum_{i=1}^k \alpha_i \varepsilon_i$, o que contradiz a equação (3.1). Este argumento é válido para qualquer combinação linear possível. Portanto a afirmação de que as expressões $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ são LD é falsa, e fica demonstrado que quaisquer n equações nodais da rede serão LI. ♦

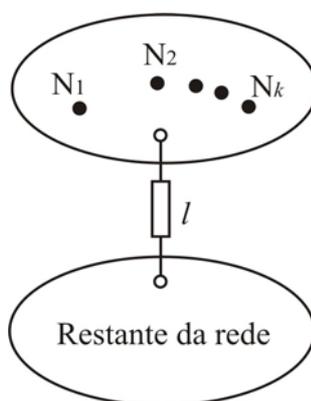


Figura 3-2 – Ilustração utilizada para provar que as n equações da PLK são LI.

Mostraremos agora a expressão matricial da PLK para todos os nós de η à exceção do nó de referência. Observe que a PLK afirma que a soma das correntes que saem de cada nó é igual a zero. A PLK pode ser escrita da forma:

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = 0 \quad (3.2)$$

onde \mathbf{j} é o vetor de correntes nos ramos e possui dimensão $b \times 1$:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{A} = (a_{ik})$ é uma matriz $n \times b$ definida por:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se o ramo } k \text{ sai do nó } i \\ -1 & \text{se o ramo } k \text{ entra no nó } i \\ 0 & \text{se o ramo } k \text{ não incide sobre o nó } i \end{cases} \quad (3.3)$$

Note que o produto $\mathbf{A}\mathbf{j}$ resulta em um vetor de dimensão n , no qual cada elemento expressa a soma das correntes que saem de um nó da rede.

Evidentemente, a regra de definição da matriz \mathbf{A} acima é a mesma dada para a matriz de incidência \mathbf{A}_a definida no capítulo anterior. A única diferença entre essas duas matrizes é que \mathbf{A} possui uma linha a menos que \mathbf{A}_a . Com efeito, a matriz \mathbf{A} pode ser obtida a partir de \mathbf{A}_a excluindo-se a linha correspondente ao nó de referência. Por esse motivo, a matriz \mathbf{A} é chamada *matriz de incidência reduzida*.

Exemplo 3.1:

A título de ilustração, considere o circuito da Figura 3.3, que contém 3 nós e 6 ramos.

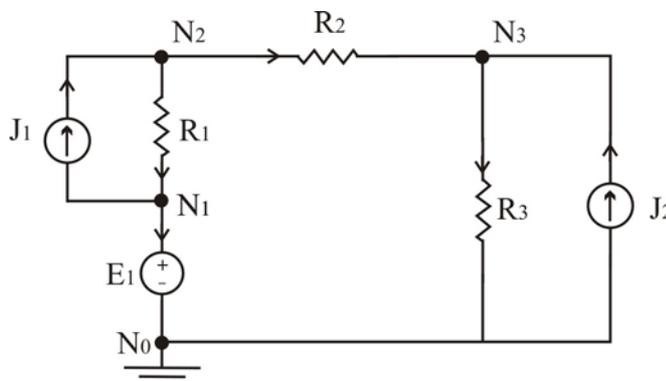


Figura 3-3 - Circuito do exemplo 3.1.

Note que todos os ramos, inclusive o gerador E_1 , são representados de acordo com a convenção do receptor.

Tomando o nó N_0 como nó de referência, a matriz \mathbf{A} , obtida de acordo com (3.3), será:

$$\begin{array}{cccccc}
 E_1 & R_1 & R_2 & R_3 & J_1 & J_2 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{A} = \begin{array}{l} N_1 \rightarrow \\ N_2 \rightarrow \\ N_3 \rightarrow \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Pela equação (3.2), temos:

$$\mathbf{A}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{E1} \\ j_{R1} \\ j_{R2} \\ j_{R3} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

o que corresponde à PLK aplicada aos nós N_1 , N_2 e N_3 :

$$\text{Nó } N_1: \quad j_{E1} - j_{R1} + j_{J1} = 0$$

$$\text{Nó } N_2: \quad j_{R1} + j_{R2} - j_{J1} = 0$$

$$\text{Nó } N_3: \quad -j_{R2} + j_{R3} - j_{J2} = 0$$

3.1.2. Tensões Nodais e Segunda Lei de Kirchhoff

Sejam e_1, e_2, \dots, e_n as tensões nos nós N_1, N_2, \dots, N_n da rede η medidas em relação ao nó de referência. Chamaremos e_1, e_2, \dots, e_n de *tensões nodais*, as quais serão usadas como variáveis da rede na análise nodal.

A SLK assegura que as tensões nodais da rede são definidas sem ambigüidades. Isto é, se calcularmos a tensão em um nó em relação ao nó de referência através da soma algébrica das tensões nos ramos ao longo de um caminho entre o nó de referência e o nó em questão, a SLK assegura que o valor obtido será sempre independente do caminho escolhido entre os dois nós.

Seja v_k a tensão no k -ésimo ramo da rede. O vetor de tensão nos ramos possui dimensão b e é definido como:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}.$$

As tensões nos ramos v_1, v_2, \dots, v_b podem ser tratadas como componentes de um vetor em um espaço vetorial linear b -dimensional. Deste modo, cada conjunto de tensões nos ramos da rede define um ponto no espaço vetorial linear b -dimensional E^b .

Observe que, cada vez que se aplica a SLK a um laço da rede η , obtém-se uma restrição linear para as componentes do vetor \mathbf{v} . Geometricamente falando, isso significa que a equação de cada laço restringe o vetor \mathbf{v} a um hiperplano no espaço E^b .

Mostraremos a seguir que a SLK restringe \mathbf{v} a um subespaço n -dimensional de E^b , e que cada ponto nesse espaço é unicamente representado em termos das tensões nodais e_1, e_2, \dots, e_n .

Em primeiro lugar, observe que, em consequência da SLK, as tensões nodais e_1, e_2, \dots, e_n são linearmente independentes. Para verificar tal fato, basta observar que, dada uma árvore da rede, o caminho entre cada nó e o nó de referência será sempre um subgrafo distinto.

Seja \mathbf{e} o vetor cujas componentes são e_1, e_2, \dots, e_n . Mostraremos agora que o vetor \mathbf{v} é determinado pelo vetor \mathbf{e} pela expressão:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \mathbf{e} \quad (3.4)$$

onde \mathbf{A}^t é a matriz de incidência reduzida transposta.

Demonstração:

Para mostrarmos esse fato, é necessário considerarmos dois tipos de ramos: ramos conectados ao nó de referência e ramos não conectados ao nó de referência.

Para um ramo conectado ao nó de referência, a tensão no ramo será igual a uma tensão nodal ou ao seu negativo.

Para ramos não conectados ao nó de referência, note que sempre existirá um laço que contenha esse ramo (e seus dois nós) e o nó de referência, dado que a rede é conectada. Assim, pela SLK, a tensão no ramo poderá ser expressa como combinação linear de duas tensões nodais. Logo, para os dois casos enunciados acima, a tensão no ramo depende linearmente das tensões nodais.

Para mostrarmos que essa relação de dependência é expressa pela equação (3.3), observe que v_k é a tensão no k -ésimo ramo da rede, para $k = 1, 2, \dots, b$; e que e_i representa a tensão nodal do nó N_i , para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, se o ramo k conecta o nó N_i ao nó de referência, teremos:

$$v_k = \begin{cases} e_i & \text{se o ramo } k \text{ sai do nó } i \\ -e_i & \text{se o ramo } k \text{ entra no nó } i \end{cases}$$

Por outro lado, se o ramo k sai do nó N_i e entra no nó N_j , teremos:

$$v_k = e_i - e_j.$$

Como em um ou outro caso v_k deverá ser expressa como uma combinação linear das tensões nodais e_1, e_2, \dots, e_n , podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{b1} & \cdots & \cdots & c_{bn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

onde cada elemento c_{ki} é igual a 0, 1 ou -1 de acordo com as regras acima.

Note agora que, após alguma consideração dos sinais, podemos escrever:

$$c_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se o ramo } k \text{ sai do nó } i \\ -1 & \text{se o ramo } k \text{ entra no nó } i \\ 0 & \text{se o ramo } k \text{ não incide sobre o nó } i \end{cases} \quad (3.5)$$

Comparando agora as equações (3.3) e (3.5) vemos que $c_{ki} = a_{ik}$ para $k = 1, 2, \dots, b$ e para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, temos que a matriz $\mathbf{C} = (c_{ki})$ é igual à

transposta da matriz de incidência reduzida \mathbf{A} , pelo que fica demonstrada a equação (3.4). ♦

Observação.

Note que, ao escrevermos as equações (3.3) e (3.5) consideramos o sentido dos ramos do grafo de acordo com o sentido da corrente nos ramos do circuito, adotamos implicitamente a convenção do receptor para *todos* os ramos da rede a fim de expressarmos coerentemente as leis de Kirchhoff.

Exemplo 3.2:

Considere novamente a rede da Figura 3.4.

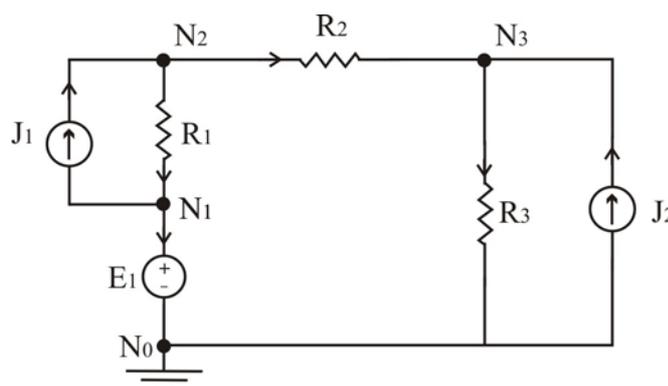


Figura 3-4 - Circuito do exemplo 3.2.

Sejam os vetores de tensão nos ramos e de tensões nodais, respectivamente:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{R1} \\ v_{R2} \\ v_{R3} \\ v_{J1} \\ v_{J2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

De acordo com a equação (3.4), teremos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

ou ainda:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{E1} = e_1 \\ v_{R1} = -e_1 + e_2 \\ v_{R2} = e_2 - e_3 \\ v_{R3} = e_3 \\ v_{J1} = e_1 - e_2 \\ v_{J2} = -e_3 \end{array} \right.$$

Note finalmente que o sentido das tensões e correntes nos geradores foi estabelecido de acordo com a convenção do receptor. Isso implica que, para fornecer potência ao sistema, os valores de tensão e de corrente nos geradores deverão ter sinais opostos.

3.1.3. Formulação da Rede

As equações:

$$\mathbf{A} \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (\text{PLK}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^t \mathbf{e} \quad (\text{SLK}) \quad (3.4)$$

são as duas equações fundamentais da Análise Nodal. Ambas são obtidas a partir do grafo da rede e das Leis de Kirchhoff, o que faz com que sejam independentes da natureza dos elementos da rede.

As variáveis envolvidas na solução da rede são as tensões e correntes nos resistores, as tensões nos geradores de corrente e as correntes nos geradores de tensão.

O equacionamento elementar da rede pelo método da Análise Nodal consiste em combinar as equações (3.2) e (3.4) com as relações constitutivas dos ramos, de modo a obter-se n equações nas n variáveis e_1, e_2, \dots, e_n .

Não obstante, esse sistema de n equações torna-se inconsistente ou indeterminado quando a rede possui geradores independentes de tensão, haja vista que, em um gerador de tensão, não existe uma relação que permita determinar a corrente no ramo em função de suas tensões nodais.

Essa limitação sugeriu uma sistematização do método de solução, introduzida por Ho e outros em 1975, que ficou conhecida como o método da Análise Nodal Modificada.

A idéia básica na Análise Nodal Modificada é dividir os ramos da rede em dois grupos: ramos *tipo impedância* e ramos *tipo admitância*. Um ramo será do tipo impedância quando sua corrente for utilizada como incógnita da rede. Simultaneamente, cada ramo tipo impedância deverá fornecer ao sistema uma nova equação, oriunda da aplicação da SLK a esse ramo, de modo que o sistema permaneça determinado.

Assim sendo, a Análise Nodal Modificada utiliza como variáveis: as tensões nodais e as correntes nos ramos tipo impedância. As equações que aparecem na formulação da Análise Nodal Modificada são de dois tipos:

- Equações da PLK para os nós independentes;
- Equações da SLK para os ramos tipo impedância.

Com isso o sistema passa a ter número de equações igual ao número de incógnitas, e sua solução pode ser determinada.

O método da Análise Nodal Modificada consagrou-se por sua ampla utilização em programas computacionais de simulação de circuitos eletrônicos. Uma das principais vantagens do método é que sua formulação pode ser facilmente obtida por inspeção direta da rede, praticamente para quaisquer tipos de elementos (bipolos ou quadripolos) incluídos no circuito. Entretanto, não mostraremos aqui o procedimento genérico de obtenção das equações para quaisquer tipos de elementos. No domínio do problema que estamos considerando, os ramos tipo impedância serão somente geradores independentes de tensão, e os ramos tipo admitância serão resistores ou geradores independentes de corrente.

A seguir, faremos uma abordagem formal da Análise Nodal Modificada aplicada ao nosso problema, e em seguida apresentaremos um método direto de obtenção da formulação por inspeção da rede.

Aplicação a Redes Resistivas Lineares

Seja η uma rede resistiva linear invariante no tempo com b ramos e n_t nós. Admite-se que η é conexa e não separável. Cada ramo de η é constituído por um dos seguintes bipolos elementares: ou por um resistor, ou por uma fonte independente de tensão, ou por uma fonte independente de corrente. Designaremos por m , p e q , respectivamente: o número de fontes independentes de tensão, o número de resistores e o número de fontes independentes de corrente da rede η .

Dados os valores das fontes independentes, a solução completa da rede η consiste em calcular p tensões e p correntes nos seus resistores, m correntes em seus geradores de tensão e q tensões em seus geradores de corrente.

Seja \mathbf{A} a matriz de incidência reduzida de η . Ordenaremos as colunas de \mathbf{A} de modo que estas correspondam, em seqüência da esquerda para a direita, primeiro aos geradores de tensão, depois aos resistores, e por último aos geradores de corrente da rede.

Particionamos assim a matriz \mathbf{A} em três sub-matrizes:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_E \mid \mathbf{A}_R \mid \mathbf{A}_J] \quad (3.6)$$

onde as colunas de \mathbf{A}_E , \mathbf{A}_R e \mathbf{A}_J correspondem respectivamente aos ramos que contém os geradores de tensão, os resistores e os geradores de corrente da rede.

Particionaremos o vetor \mathbf{j} das correntes nos ramos da rede igualmente em três sub-vetores:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_J \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde \mathbf{j}_E , \mathbf{j}_R e \mathbf{j}_J são os vetores de corrente nos geradores de tensão, nos resistores e nos geradores de corrente da rede, respectivamente.

Segundo essa notação, a expressão matricial da PLK dada pela equação (3.2) é escrita da forma:

$$[\mathbf{A}_E \mid \mathbf{A}_R \mid \mathbf{A}_J] \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_J \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

ou, equivalentemente:

$$\mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \mathbf{j}_R + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Utilizando o mesmo critério adotado acima, particionamos o vetor \mathbf{v} das tensões nos ramos da rede da seguinte forma:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

e reescrevemos a equação (3.4) da forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_E^t \\ \mathbf{A}_R^t \\ \mathbf{A}_J^t \end{bmatrix} \mathbf{e}. \quad (3.11)$$

A relação constitutiva de cada resistor k será expressa por uma função linear do tipo:

$$j_k = G_k v_k, \quad \text{para } k = 1, \dots, p. \quad (3.12)$$

Em notação matricial, podemos escrever para todos os resistores de η :

$$\mathbf{j}_R = \mathbf{G}\mathbf{v}_R \quad (3.13)$$

onde \mathbf{G} é chamada *matriz de condutância dos ramos*. Note que \mathbf{G} é uma matriz diagonal de ordem p da forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & G_p \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) em (3.9), obtemos:

$$\mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{v}_R + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

Mas por (3.11) temos que:

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{A}_R^t \mathbf{e}. \quad (3.16)$$

E substituindo (3.16) em (3.15):

$$\mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t \mathbf{e} + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Ainda da equação (3.11), obtemos a relação:

$$\mathbf{A}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E. \quad (3.18)$$

Combinando agora as equações (3.17) e (3.18) em um sistema, temos:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t \mathbf{e} + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E \end{cases} \quad (3.19)$$

ou, na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t & \mathbf{A}_E \\ \hline \mathbf{A}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_J \mathbf{j}_J \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Chamando agora:

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t \quad (3.21)$$

e

$$\mathbf{i}_s = -\mathbf{A}_j \mathbf{j}_j, \quad (3.22)$$

obtemos finalmente:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_n & \mathbf{A}_E \\ \hline \mathbf{A}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

ou, de forma ainda mais compacta, fazendo:

$$\mathbf{T}_{nm} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_n & \mathbf{A}_E \\ \hline \mathbf{A}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right]; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

temos:

$$\mathbf{T}_{nm} \mathbf{x} = \mathbf{u} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{T}_{nm} é chamada *matriz da análise nodal modificada*, \mathbf{x} é o vetor de variáveis da rede e \mathbf{u} é o vetor de fontes independentes.

O sistema de equações (3.23) contém $(n+m)$ variáveis, representadas pelo vetor \mathbf{e} de tensões nodais e pelo vetor \mathbf{j}_E de correntes nos geradores de tensão da rede.

O bloco superior de equações escalares de (3.23) contém n equações provenientes da PLK aplicada a os nós da rede – também chamadas de *equações nodais*.

O vetor \mathbf{i}_s é chamado *vetor das fontes de corrente equivalentes*. Note que cada elemento de \mathbf{i}_s representa, para cada nó, a injeção líquida de corrente no nó proporcionada pelas fontes de corrente.

A matriz \mathbf{G}_n é uma matriz quadrada de ordem n , chamada *matriz das condutâncias nodais*.

O bloco inferior de equações escalares do sistema contém outras m equações, obtidas através da aplicação da SLK nos ramos dos geradores de tensão. Deste modo, o sistema possui $(n+m)$ equações, e pode ser resolvido para as variáveis \mathbf{e} e \mathbf{j}_E . As tensões nos geradores independentes de corrente podem ser obtidas a partir da equação (3.11), pela qual $\mathbf{v}_j = \mathbf{A}_j^t \mathbf{e}$.

Exemplo 3.3:

Considere novamente o circuito representado na Figura 3.5.

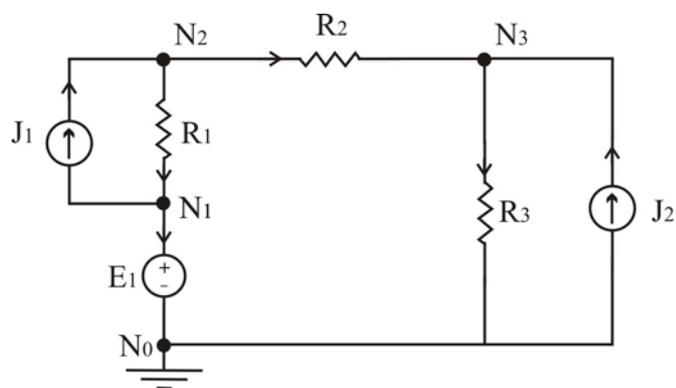


Figura 3-5 - Circuito do exemplo 3.3.

Seja \mathbf{G} sua matriz de condutâncias, dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \end{bmatrix}.$$

A matriz de incidência reduzida da rede será, de acordo com a ordem fixada dos ramos:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_E \mid \mathbf{A}_R \mid \mathbf{A}_J] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right].$$

A equação da rede será:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_n & \mathbf{A}_E \\ \hline \mathbf{A}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_n = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}.$$

E ainda:

$$\mathbf{i}_s = -\mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J1} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos escrever o equacionamento completo da rede da forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} G_1 & -G_1 & 0 & 1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ j_{E1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J1} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \\ v_{E1} \end{bmatrix}.$$

Existência e Unicidade da Solução

Analisaremos agora sob que condições (3.23) tem solução. Em primeiro lugar, consideraremos o caso em que a rede não contém geradores independentes de tensão. Note que a equação (3.23) reduz-se a:

$$\mathbf{G}_n \mathbf{e} = \mathbf{i}_s. \quad (3.26)$$

Lema.

Qualquer circuito resistivo contendo apenas resistores lineares de condutância positiva e fontes independentes de corrente possui solução única.

Demonstração.

Dado que todas as condutâncias da rede são positivas, note que a matriz das condutâncias da rede \mathbf{G} será uma matriz diagonal positivo-definida, isto é:

$$\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a}^t \mathbf{G} \mathbf{a} > 0, \quad (3.27)$$

onde \mathbf{a} é um vetor de dimensões apropriadas.

Para qualquer vetor de tensões nodais $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, note que:

$$\mathbf{e}^t \mathbf{G}_n \mathbf{e} = \mathbf{e}^t (\mathbf{A}_R \mathbf{G} \mathbf{A}_R^t) \mathbf{e} = (\mathbf{A}_R^t \mathbf{e})^t \mathbf{G} (\mathbf{A}_R^t \mathbf{e}). \quad (3.28)$$

Mas por (3.16) $\mathbf{v}_R = \mathbf{A}_R^t \mathbf{e}$. Assim temos que:

$$\forall \mathbf{v}_R \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_R^t \mathbf{G} \mathbf{v}_R > 0. \quad (3.29)$$

Note ainda que, como as linhas de \mathbf{A}_R são LI, o vetor $\mathbf{v} = \mathbf{A}_R^t \mathbf{e} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{e} = \mathbf{0}$.

Conseqüentemente, $\mathbf{v}_R = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{e} = \mathbf{0}$. Logo, a partir de (3.27) deduzimos que:

$$\forall \mathbf{e} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e}^t \mathbf{G}_n \mathbf{e} > 0 \quad (3.30)$$

que significa que \mathbf{G}_n é igualmente positivo-definida.

Logo, $\det(\mathbf{G}_n) > 0$, e pela regra de Cramer, o sistema $\mathbf{G}_n \mathbf{e} = \mathbf{i}_s$ possui uma única solução dada por:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{G}_n)^{-1} \mathbf{i}_s. \quad (3.31)$$

Consideraremos o caso geral, em que a rede contém também geradores independentes de tensão. Repetiremos a equação da rede:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_n & \mathbf{A}_E \\ \hline \mathbf{A}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{array} \right]. \quad (3.32)$$

Observe que o bloco superior de equações escalares é a expressão da PLK aplicada aos nós independentes da rede. Note ainda que m variáveis foram adicionadas ao sistema representando as correntes nos m geradores de tensão. Dado que o posto de \mathbf{G}_n é igual a n (pois \mathbf{G}_n é não-singular), conclui-se que o bloco superior de equações contém n equações linearmente independentes.

Para que o sistema seja determinado, é necessário que o bloco inferior de equações escalares contenha outras m equações linearmente independentes. Para que isso ocorra, basta que as linhas de \mathbf{A}_E^t (ou colunas de \mathbf{A}_E) sejam LI.

Note que cada coluna de \mathbf{A}_E contém um elemento igual a 1 na linha correspondente ao nó inicial do ramo; um elemento igual a -1 na linha correspondente ao nó final do ramo; e todos os outros elementos iguais a 0. Dado que, por hipótese, a rede não contém laços formados exclusivamente por geradores de tensão, observe que as colunas de \mathbf{A}_E serão necessariamente LI. Segue, portanto,

que o sistema (3.32) é possível e determinado, e que sua solução, utilizando agora a notação introduzida em (3.24), é dada por:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{T}_{nm})^{-1} \mathbf{u}. \quad (3.33)$$

Obtenção da Formulação por Inspeção da Rede

Como foi dito anteriormente, uma forte vantagem do método de formulação pela Análise Nodal Modificada é que as equações da rede podem ser sistematicamente obtidas por inspeção do circuito.

O processo descrito a seguir envolve a classificação dos ramos e sua inclusão na formulação da Análise Nodal Modificada. Os ramos do tipo admitância poderão ser resistores ou geradores independentes de corrente, e os ramos tipo impedância identificam-se com as fontes independentes de tensão. Como resultado, queremos obter a matriz \mathbf{T}_{nm} , o vetor \mathbf{u} e a identificação das variáveis contidas no vetor \mathbf{x} .

Descreveremos o processo em duas etapas: inclusão dos ramos tipo admitância e inclusão dos ramos tipo impedância.

Inclusão dos ramos tipo admitância.

Para incluir os ramos tipo admitância na formulação da Análise Nodal Modificada, adota-se o processo descrito a seguir.

A sub-matriz \mathbf{G}_n (correspondente às primeiras n linhas e n colunas de \mathbf{T}_{nm}) pode ser determinada diretamente do circuito pela seguinte regra:

O elemento (j, j) da diagonal principal é dado pela soma das condutâncias incidentes no nó j da rede, sendo chamado *condutância própria* do nó j .

O elemento (i, j) da matriz, com $i \neq j$, é dado pelo negativo da soma das condutâncias dos ramos que interligam diretamente os nós i e j , sendo chamado *condutância mútua* entre os nós i e j .

Se a rede tiver $n + 1$ nós, os índices i e j variam de 1 a n .

O vetor \mathbf{i}_s (correspondente às primeiras n linhas do vetor \mathbf{u}) pode ser obtido a partir da seguinte regra:

A j -ésima linha do vetor das fontes de corrente equivalentes é dada pela soma algébrica das correntes de geradores de corrente independentes que incidem no nó j (não de referência) da rede. A corrente é tomada com sinal positivo ao *entrar* no nó, e negativamente no caso oposto.

Se a rede tiver $n + 1$ nós, o índice j varia de 1 a n .

Os primeiros n elementos do vetor \mathbf{x} serão as tensões nodais do circuito, que coincidem com o vetor \mathbf{e} .

Inclusão dos ramos tipo impedância.

Na inclusão de um ramo tipo impedância, o primeiro passo será acrescentar uma variável j_l ao vetor \mathbf{x} , correspondente à corrente no respectivo ramo.

As subseqüentes alterações em \mathbf{T}_{nm} e em \mathbf{u} serão ditadas pelas Leis de Kirchhoff para dar coerência ao sistema após a inclusão da nova variável. No caso da inclusão de um gerador independente de tensão que tem como nós inicial e final, respectivamente, N_i e N_f , segue-se a seguinte regra:

Acrescentamos uma nova linha (de índice l) e uma nova coluna na matriz \mathbf{T}_{nm} , cujos elementos serão dados por:

$$\mathbf{T}_{nm}(l,i) = 1;$$

$$\mathbf{T}_{nm}(i,l) = 1;$$

$$\mathbf{T}_{nm}(l,f) = -1;$$

$$\mathbf{T}_{nm}(f,l) = -1;$$

Acrescentamos mais um elemento ao vetor \mathbf{u} , igual à tensão do gerador adicionado v_l .

Exemplo 3.4:

No circuito da Figura 3.6, as condutâncias próprias dos nós são:

$$\text{Nó } N_1: \quad \mathbf{T}_{nm}(1,1) = G_1$$

$$\text{Nó } N_2: \quad \mathbf{T}_{nm}(2,2) = G_1 + G_2$$

$$\text{Nó } N_3: \quad \mathbf{T}_{nm}(3,3) = G_2 + G_3$$

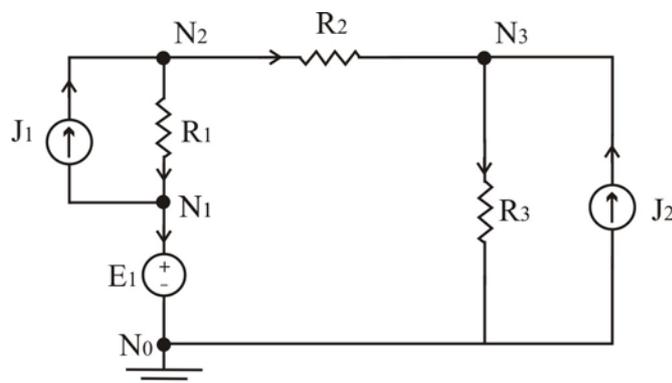


Figura 3-6 - Circuito do exemplo 3.4.

E as condutâncias mútuas entre nós são dadas por:

$$\text{Nós } N_1 \text{ e } N_2: \quad \mathbf{T}_{nm}(1,2) = \mathbf{T}_{nm}(2,1) = -G_1$$

$$\text{Nós } N_1 \text{ e } N_3: \quad \mathbf{T}_{nm}(1,3) = \mathbf{T}_{nm}(3,1) = 0$$

$$\text{Nós } N_2 \text{ e } N_3: \quad \mathbf{T}_{nm}(2,3) = \mathbf{T}_{nm}(3,2) = -G_2$$

Observe ainda que a injeção líquida de corrente em cada nó é:

$$\text{Nó } N_1: \quad \mathbf{u}(1) = -j_{J1}$$

$$\text{Nó } N_2: \quad \mathbf{u}(2) = j_{J1}$$

$$\text{Nó } N_3: \quad \mathbf{u}(3) = j_{J2}$$

Finalmente, introduzimos a fonte de tensão E_1 na formulação. Sejam j_{E1} e v_{E1} a corrente e a tensão no gerador E_1 . Os vetores de variáveis da rede e de fontes independentes serão, respectivamente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ j_{E1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -j_{J1} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \\ v_{E1} \end{bmatrix}.$$

Dado que o gerador E_1 está entre os nós N_0 e N_1 , temos ainda que:

$$\mathbf{T}_{nm}(4,1) = -1;$$

$$\mathbf{T}_{nm}(1,4) = -1;$$

Escrevendo tudo numa mesma equação matricial, obtemos finalmente a formulação da rede:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} G_1 & -G_1 & 0 & 1 \\ -G_1 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 + G_3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ j_{E1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J1} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \\ v_{E1} \end{bmatrix},$$

que concorda com o resultado do exemplo 3.3.

Aplicação a Redes Resistivas Não lineares

Aplicaremos agora a formulação da análise nodal desenvolvida nos itens anteriores a redes resistivas não lineares.

Seja η uma rede resistiva não linear invariante no tempo com b ramos e n_t nós. Admite-se que η é conexa e não separável. Cada ramo de η é constituído por um dos seguintes bipolos elementares: ou por um resistor não linear, ou por uma fonte independente de tensão, ou por uma fonte independente de corrente. Designaremos por m , p e q , respectivamente: o número de fontes de tensão, o número de resistores e o número de fontes de corrente da rede η .

As relações características dos resistores não lineares podem representadas por funções não lineares do tipo: $j_k = g_k(v_k)$ para $k = 1, \dots, p$.

Seja:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & g_p \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

uma matriz diagonal de operadores tal que:

$$\mathbf{j}_R = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}_R) = \begin{bmatrix} g_1(v_1) \\ g_2(v_2) \\ \vdots \\ g_b(v_p) \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Note que Γ expressa vetorialmente as relações constitutivas de cada resistor da rede η . Fazendo as modificações necessárias, a equação (3.19), para uma rede não linear, é escrita da forma:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \Gamma(\mathbf{A}_R^t \mathbf{e}) + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E \end{cases} \quad (3.36)$$

ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_J \mathbf{j}_J \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

onde \mathbf{f} é uma função não linear de múltiplas variáveis.

A equação (3.37) é um sistema de $(n+m)$ equações não lineares nas $(n+m)$ incógnitas da rede. Resolvendo para os vetores \mathbf{e} e \mathbf{j}_E , obtém-se a solução completa da rede. As tensões nos geradores independentes de corrente poderão ser obtidas pela equação (3.11), e as tensões e correntes nos resistores são obtidas utilizando (3.16) e (3.13), respectivamente.

Exemplo 3.5:

Na Fig. 3-7, sejam R_1 , R_2 e R_3 resistores não lineares controlados por tensão, cujas relações constitutivas são expressas respectivamente pelas funções: $j_1 = g_1(v_1)$, $j_2 = g_2(v_2)$ e $j_3 = g_3(v_3)$.

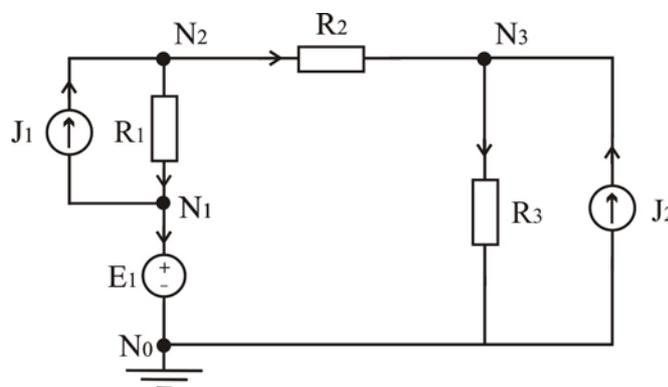


Figura 3-7 – Circuito do exemplo 3.5.

Por (3.36) temos que:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{A}_R \Gamma(\mathbf{A}_R^t \mathbf{e}) + \mathbf{A}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E \end{cases}$$

onde Γ corresponde à definição (3.34). Substituindo as matrizes calculadas nos exemplos anteriores, obtemos a formulação da rede não linear:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} j_{E1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Gamma \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -j_{J1} \\ j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix} \\ e_1 = v_{E1} \end{cases}$$

Finalmente, observe que um sistema de equações não lineares desse tipo geralmente não possui solução analítica. A solução da rede requererá o emprego de métodos numéricos, tais como o que apresentaremos no Capítulo 4.

3.2. A Análise de Cortes

O método de formulação da rede pela análise de cortes é de certa forma uma generalização do método da análise nodal, uma vez que a PLK aplicada aos nós da rede se trata de um caso particular da PLK aplicada aos seus cortes.

Na análise nodal, n tensões nodais tomadas em relação ao nó de referência são escolhidas como variáveis da rede, e a PLK é aplicada a todos os nós (com exceção do nó de referência) para obter n equações linearmente independentes em termos dessas tensões nodais.

Na análise dos cortes, uma árvore será escolhida previamente, e as n tensões nos ramos da árvore serão usadas como variáveis da rede. A aplicação da PLK aos cortes fundamentais da árvore escolhida nos permitirá escrever n equações linearmente independentes em termos das n tensões dos ramos da árvore.

3.2.1. Implicações da Primeira Lei de Kirchhoff

Considere o grafo de uma rede η conexa, com b ramos e n_t nós. Seja T uma árvore arbitrária de η . Existem $n = n_t - 1$ ramos da árvore e $l = b - n_t + 1$ ligações. Sejam os ramos de η numerados da seguinte forma: os ramos da árvore de 1 até n , e em seguida as ligações, de $n + 1$ até b .

Observe que cada ramo da árvore define um único corte fundamental. Todos os ramos de um corte fundamental serão ligações, exceto o próprio ramo da árvore que definiu o corte.

Considere o grafo mostrado na Figura 3.8. Os ramos da árvore estão representados em negrito, e os cortes aparecem como linhas pontilhadas.

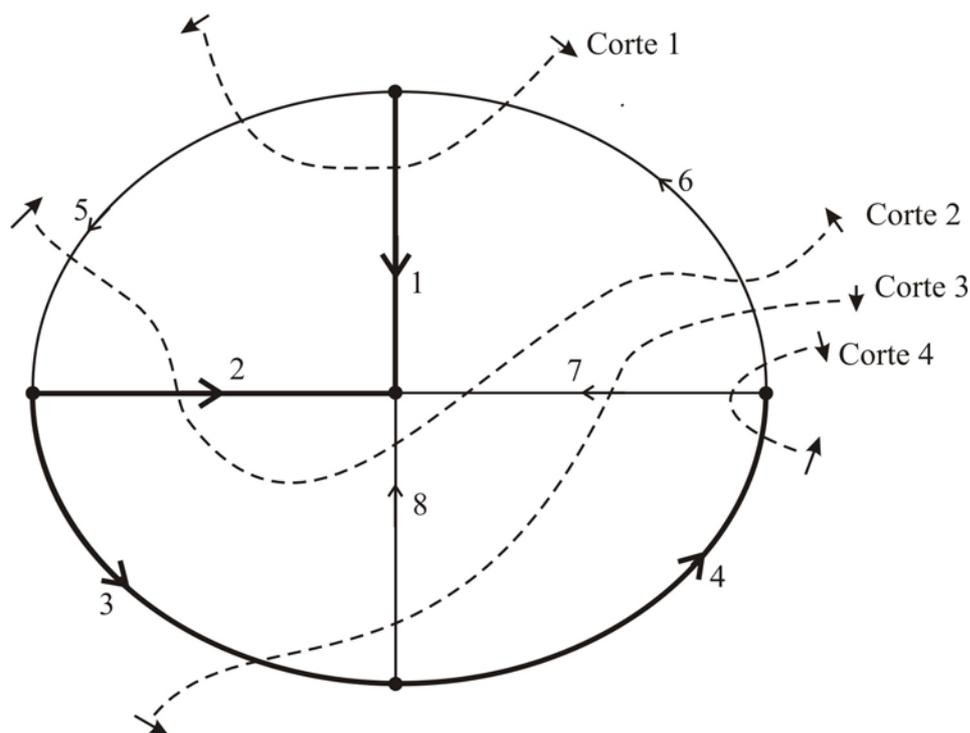


Figura 3-8 - Cortes fundamentais de uma árvore em um grafo.

Em primeiro lugar, mostraremos que as n equações obtidas a partir da PLK aplicada aos cortes fundamentais associados à árvore T são linearmente independentes. Dado que cada uma dessas equações expressa a PLK em termos de j_1, j_2, \dots, j_b , estas tratam-se de equações lineares homogêneas nessas mesmas variáveis.

Note que um corte separa o grafo da rede em dois subgrafos distintos. Diz-se que dois ramos orientados (pertencentes ao corte) possuem o mesmo sentido quando ambos saem de um mesmo subgrafo e, atravessando o corte, chegam ao outro subgrafo. Caso os ramos tenham origem em subgrafos diferentes, diz-se que esses ramos possuem sentidos opostos. Ao escrevermos o equacionamento da PLK, a *direção de referência do corte* será definida como sendo a direção do ramo da árvore que deu origem ao corte.

A expressão matricial da PLK no corte será:

$$\mathbf{Q} \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

onde \mathbf{j} é o vetor de correntes nos ramos, e \mathbf{Q} será chamada *matriz fundamental de corte*.

Exemplo 3.6:

Na Fig. 3-8, numeramos os cortes da seguinte forma: o primeiro corte será associado ao ramo 1, o segundo ao ramo 2, e assim por diante. As equações da PLK para cada um dos cortes serão:

$$\text{Corte 1:} \quad j_1 + j_5 - j_6 = 0$$

$$\text{Corte 2:} \quad j_2 - j_5 + j_6 + j_7 + j_8 = 0$$

$$\text{Corte 3:} \quad j_3 - j_6 - j_7 + j_8 = 0$$

$$\text{Corte 4:} \quad j_4 - j_6 - j_7 = 0$$

O que, na forma matricial, corresponde a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ou $\mathbf{Q} \mathbf{j} = \mathbf{0}$, onde \mathbf{Q} é a *matriz fundamental de corte* da árvore T , de dimensão $n \times b$.

Se q_{ik} é o (k, i) -ésimo elemento da matriz \mathbf{Q} , temos:

$$q_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Se o ramo } k \text{ pertence ao corte fundamental } i \\ & \text{e se sua direção coincide com a direção de} \\ & \text{referência do corte } i; \\ -1 & \text{Se o ramo } k \text{ pertence ao corte fundamental } i \\ & \text{e se sua direção opõe-se à direção de} \\ & \text{referência do corte } i; \\ 0 & \text{Se o ramo } k \text{ não pertence ao corte fundamental } i. \end{cases} \quad (3.39)$$

Note que, em consequência da numeração dos ramos adotada, a matriz \mathbf{Q} tem a forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{b \text{ ramos}} \\ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_n & \mathbf{M} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_n & \mathbf{M} \end{array}} \right\} n \text{ conjuntos de corte} \\ \underbrace{\hspace{2em}} \quad \underbrace{\hspace{2em}} \\ 1 \text{ a } n \quad (n+1) \text{ a } b \end{array} \quad (3.40)$$

Onde $\mathbf{1}_n$ é a matriz identidade de ordem n e \mathbf{M} é uma matriz retangular de n linhas e l colunas. Note que a matriz \mathbf{Q} tem posto n , já que esta contém a matriz identidade $\mathbf{1}_n$. Logo, as n equações dos cortes fundamentais em termos das correntes nos ramos são linearmente independentes.

3.2.2. Implicações da Segunda Lei de Kirchhoff

As n tensões nos ramos da árvore e_1, e_2, \dots, e_n serão agora as variáveis da rede.

Observe que as tensões nos ramos v_1, v_2, \dots, v_b podem ser consideradas como componentes de um vetor \mathbf{v} em um espaço vetorial E^b . A Segunda Lei de Kirchhoff restringirá o vetor de tensão nos ramos da rede \mathbf{v} a um subespaço n -dimensional de E^b , e cada ponto nesse subespaço poderá ser unicamente representado em função das n tensões nos ramos da árvore e_1, e_2, \dots, e_n de acordo com a seguinte relação:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^t \mathbf{e} \quad (3.41)$$

onde \mathbf{Q}^t é a matriz fundamental de corte transposta.

Demonstração:

Seja \mathbf{C} uma matriz de dimensões apropriadas (b linhas e n colunas) que satisfaça a seguinte igualdade:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \mathbf{e}. \quad (3.42)$$

Para provar (3.41), queremos mostrar que $\mathbf{C} = \mathbf{Q}^t$.

Consideremos as tensões em todos os ramos da rede. Para os ramos que pertencem à árvore, temos que:

$$v_k = e_k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.43)$$

Por outro lado, a tensão em cada ligação será uma combinação linear das tensões nos ramos da árvore. Para visualizar esse fato, note que cada ligação forma um único laço com um determinado conjunto de ramos da árvore, chamado laço fundamental associado à ligação. Aplicando a SLK a esse laço, vemos que a tensão na ligação fica unicamente determinada pelas tensões nos ramos da árvore que pertencem a esse laço fundamental.

Note ainda que uma ligação necessariamente pertencerá a todos os cortes fundamentais associados aos ramos da árvore que pertencem ao seu laço fundamental.

Sendo assim, podemos escrever para a tensão na k -ésima ligação:

$$v_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} \cdot e_i, \quad \text{para } k = n + 1, \dots, b. \quad (3.44)$$

onde, após alguma consideração dos sinais, concluímos que c_{ki} é dado por:

$$c_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{Se o ramo } k \text{ pertence ao corte fundamental } i \\ & \text{e se sua direção coincide com a direção de} \\ & \text{referência do corte } i; \\ -1 & \text{Se o ramo } k \text{ pertence ao corte fundamental } i \\ & \text{e se sua direção opõe-se à direção de} \\ & \text{referência do corte } i; \\ 0 & \text{Se o ramo } k \text{ não pertence ao corte fundamental } i. \end{cases} \quad (3.45)$$

Observe ainda que equação (3.44) aplica-se a não somente às ligações, mas a todos os ramos da rede, haja vista que o k -ésimo ramo da árvore pertence somente ao corte k que ele mesmo originou, e que, evidentemente, sua direção coincide com a direção de referência do corte. Logo, a equação (3.44) conduz ao mesmo resultado da equação (3.43), com $c_{kk} = 1$ para todos os ramos da árvore.

Comparando (3.45) com (3.39), concluímos que $c_{ki} = q_{ik}$, e portanto a matriz C , definida pela relação $\mathbf{v} = C \mathbf{e}$, é igual a matriz fundamental de corte transposta \mathbf{Q}^t .

Exemplo 3.7:

Considere novamente a rede da Figura 3.8. Podemos escrever as seguintes equações:

$$v_5 = v_1 - v_2 = e_1 - e_2$$

$$v_6 = -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 = -e_1 + e_2 - e_3 - e_4$$

$$v_7 = v_2 - v_3 - v_4 = e_2 - e_3 - e_4$$

$$v_8 = v_2 - v_3 = e_2 - e_3$$

Na forma matricial, essas equações ficam:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^t \mathbf{e}$$

3.2.3. Formulação da Rede

Na análise de cortes, as duas equações básicas derivadas das Leis de Kirchhoff são:

$$\mathbf{Q} \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^t \mathbf{e}. \quad (3.47)$$

Ambas são obtidas a partir do grafo da rede e das Leis de Kirchhoff somente, o que faz com que sejam independentes da natureza dos elementos da rede. Estas equações devem ser combinadas com as relações constitutivas dos ramos a fim de obtermos a formulação completa do sistema.

As variáveis envolvidas na solução da rede são as tensões e correntes nos resistores, as tensões nos geradores de corrente e as correntes nos geradores de tensão. Seguiremos agora um processo análogo ao desenvolvido no item 2.3 para a

Análise Nodal a fim de obtermos a formulação da rede pelo método da análise de cortes.

Aplicação a Redes Resistivas Lineares

Seja η uma rede resistiva linear invariante no tempo com b ramos e n_i nós. Admite-se que η é conexa e não separável. Cada ramo de η é constituído por um dos seguintes bipolos elementares: ou por um resistor linear, ou por uma fonte independente de tensão, ou por uma fonte independente de corrente.

Dados os valores das fontes independentes, a solução completa de η consiste em calcular as tensões e correntes nos resistores, as correntes nos geradores de tensão e as tensões nos geradores de corrente.

Sejam m o número de fontes de tensão, t o número de resistores pertencentes à árvore, p o número de resistores nas ligações, e q o número de fontes de corrente da rede. Seja ainda \mathbf{Q} a matriz fundamental de corte da rede obtida a partir de uma árvore T qualquer.

Reordenaremos agora as colunas de \mathbf{Q} de acordo com seus respectivos ramos. Dispostemos as colunas da matriz de modo que, da esquerda para a direita, estas correspondam primeiro às fontes de tensão, depois aos resistores e finalmente às fontes de corrente da rede. Observando essa ordem, é possível particionar \mathbf{Q} da seguinte forma:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_E \mid \mathbf{Q}_R \mid \mathbf{Q}_J]. \quad (3.48)$$

Onde \mathbf{Q}_E , \mathbf{Q}_R e \mathbf{Q}_J são as sub-matrizes cujas colunas correspondem respectivamente às fontes de tensão, aos resistores e às fontes de corrente da rede.

Observando o mesmo critério de ordenação dos ramos da rede, particionamos analogamente os vetores \mathbf{v} e \mathbf{j} de tensões e correntes nos ramos da seguinte forma:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_J \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Utilizando esta notação, escrevemos a equação da PLK:

$$[\mathbf{Q}_E \mid \mathbf{Q}_R \mid \mathbf{Q}_J] \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_R \\ \mathbf{j}_J \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

ou, equivalentemente:

$$\mathbf{Q}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{Q}_R \mathbf{j}_R + \mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

Analogamente, a equação da SLK se escreve da forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_R \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_E^t \\ \mathbf{Q}_R^t \\ \mathbf{Q}_J^t \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad (3.52)$$

onde \mathbf{e} corresponde ao vetor de tensões nos ramos da árvore T .

As relações constitutivas dos resistores fornecem-nos ainda:

$$\mathbf{j}_R = \mathbf{G} \mathbf{v}_R \quad (3.53)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & G_{t+p} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

é a matriz de condutância dos ramos, definida em (3.14).

Pela equação (3.52) temos que:

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{Q}_R^t \mathbf{e}. \quad (3.55)$$

Usando (3.55) e (3.53) em (3.51) obtemos:

$$\mathbf{Q}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{Q}_R \mathbf{G} \mathbf{Q}_R^t \mathbf{e} + \mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (3.56)$$

Por (3.52), temos ainda que:

$$\mathbf{Q}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E. \quad (3.57)$$

Juntando agora (3.56) e (3.57) em uma mesma equação, obtemos:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_R \mathbf{G} \mathbf{Q}_R^t & \mathbf{Q}_E \\ \hline \mathbf{Q}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Observe que a equação acima é análoga à equação (3.20) obtida para a Análise Nodal. As variáveis do sistema são as tensões nos ramos da árvore, representadas pelo vetor \mathbf{e} , e as correntes nos geradores de tensão \mathbf{j}_E . Os valores das fontes de tensão e de corrente, contidos respectivamente nos vetores \mathbf{v}_E e \mathbf{j}_J são parâmetros de entrada da rede, portanto conhecidos.

Para obter a solução completa da rede, a aplicação das equações (3.52) e (3.53) permite calcular as tensões nos geradores de corrente, bem como as tensões e correntes nos resistores.

Chamando:

$$\mathbf{G}_q = \mathbf{Q}_R \mathbf{G} \mathbf{Q}_R^t \quad (3.59)$$

e

$$\mathbf{i}_s = -\mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J, \quad (3.60)$$

obtemos:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_q \mathbf{e} + \mathbf{Q}_E \mathbf{j}_E = \mathbf{i}_s \\ \mathbf{Q}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E \end{cases}. \quad (3.61)$$

ou ainda:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_q & \mathbf{Q}_E \\ \hline \mathbf{Q}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

A matriz \mathbf{G}_q é chamada matriz de condutâncias dos cortes, e o vetor \mathbf{i}_s é o vetor de fontes de corrente equivalentes.

A demonstração de que o sistema (3.62) é possível e determinado é análoga à demonstração apresentada no item 2.3, e, portanto, será aqui omitida.

Exemplo 3.8:

Na Figura 3.9 representa-se o grafo orientado correspondente à rede dos exemplos anteriores. A árvore do circuito é representada pelos ramos em negrito, e as linhas pontilhadas indicam os conjuntos fundamentais de corte da rede.

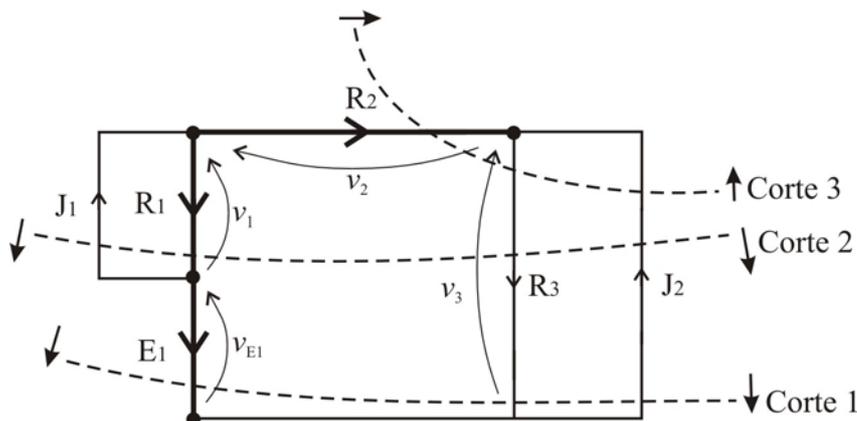


Figura 3-9– Grafo orientado do exemplo 3.8 e seus conjuntos fundamentais de corte para uma dada árvore.

$$\begin{array}{c}
 E_1 \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad J_1 \quad J_2 \\
 \mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_E \mid \mathbf{Q}_R \mid \mathbf{Q}_J] = \left[\begin{array}{ccc|cc}
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1
 \end{array} \right] \begin{array}{l}
 E_1 \text{ (Corte 1)} \\
 R_1 \text{ (Corte 2)} \\
 R_2 \text{ (Corte 3)}
 \end{array}
 \end{array}$$

A matriz fundamental de corte da rede será:

Seja \mathbf{G} a matriz de condutâncias da rede, dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \end{bmatrix}.$$

Por (3.62), equação da rede será:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{G}_q & \mathbf{Q}_E \\ \hline \mathbf{Q}_E^t & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$\mathbf{G}_q = \mathbf{Q}_R \mathbf{G} \mathbf{Q}_R^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_q = \begin{bmatrix} G_3 & G_3 & -G_3 \\ G_3 & G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}.$$

Temos ainda que:

$$-\mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J2} \\ j_{J1} + j_{J2} \\ -j_{J2} \end{bmatrix}.$$

Logo, o equacionamento completo da rede corresponderá a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} G_3 & G_3 & -G_3 & 1 \\ G_3 & G_1 + G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & -G_3 & G_2 + G_3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{R1} \\ v_{R2} \\ j_{E1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J2} \\ j_{J1} + j_{J2} \\ -j_{J2} \\ v_{E1} \end{bmatrix}.$$

Formulação Alternativa

Observe que na dedução da equação (3.62) não fizemos nenhuma restrição à escolha da árvore T que deu origem à matriz \mathbf{Q} . Mostraremos agora que uma escolha adequada de T pode simplificar (3.62) reduzindo o número de variáveis da rede.

Escolheremos agora uma árvore T de modo que todas as fontes de tensão da rede apareçam como ramos da árvore, e todas as fontes de corrente figurem como ligações no grafo da rede.

Mostraremos a seguir que é sempre possível encontrar uma árvore que satisfaça tais requisitos.

Como não existe nenhum laço na rede constituído exclusivamente por geradores de tensão, note que é possível encontrar uma árvore da rede que contenha todos os ramos dos geradores de tensão (de acordo com a definição de árvore dada no item 2.4.2).

Suponha que a árvore encontrada contenha, além de todos os geradores de tensão da rede, algum gerador de corrente. Por hipótese, o conjunto fundamental de corte associado ao gerador de corrente conterá algum resistor da rede, pois não existem conjuntos de corte constituídos exclusivamente por geradores de corrente. Logo a árvore encontrada poderá ser modificada, substituindo-se o gerador de corrente por um resistor pertencente ao seu conjunto fundamental de corte. Assim, a árvore resultante conterá todos os geradores de tensão e nenhum gerador de corrente da rede.

Por fim, como é sempre possível encontrar uma árvore T que satisfaça essas propriedades, ressaltamos que tal escolha não implica perda de generalidade na formulação da rede descrita adiante.

Antes de prosseguirmos, introduziremos alguma notação. Sejam E , R , e J os subconjuntos dos ramos da rede que contém, respectivamente, as fontes de tensão, os resistores e as fontes de corrente. T denota ramos da árvore e L ligações. $T(R)$ denotará o subconjunto dos resistores da árvore, ao passo que $L(R)$ será o subconjunto das ligações resistivas, e assim por diante. Finalmente, $T(ER)$ indicará a união dos subconjuntos $T(E)$ e $T(R)$, que contém todos os ramos da árvore.

Seja \mathbf{Q} a matriz fundamental de corte da rede. Se X é um subconjunto dos ramos da árvore T , e se Y é um subconjunto dos ramos de ligação, definiremos $\mathbf{Q}_{X,Y}$ como sendo a sub-matriz de \mathbf{Q} formada pela intercessão das linhas de \mathbf{Q} que correspondem aos ramos do conjunto X , com as colunas de \mathbf{Q} que correspondem aos elementos do conjunto Y .

Por exemplo, $\mathbf{Q}_{T(ER),L(R)}$ denota uma sub-matriz de dimensão $(m + t) \times p$ formada a partir da intercessão das linhas correspondentes às fontes de tensão e aos resistores da árvore, com as colunas correspondentes às ligações resistivas.

As colunas de \mathbf{Q} são dispostas de modo que, da esquerda para a direita, estas correspondam primeiro às fontes de tensão, depois aos resistores da árvore, aos

resistores das ligações e finalmente às fontes de corrente da rede. Observando essa ordem, observe que a matriz \mathbf{Q} poderá ser particionada como segue:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1, \dots, E_m & r_1, \dots, r_t & r_{t+1}, \dots, r_{t+p} & J_1, \dots, J_q \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1}_m & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{T(E), L(R)} & \mathbf{Q}_{T(E), L(J)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1}_t & \mathbf{Q}_{T(R), L(R)} & \mathbf{Q}_{T(R), L(J)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{1}_m \\ \mathbf{0} \end{array}} \right\} T(E) \\ \left. \vphantom{\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_t \end{array}} \right\} T(R) \end{array} \end{array} \quad (3.63)$$

Onde $\mathbf{1}_m$ e $\mathbf{1}_t$ são matrizes identidade de ordem t e m , respectivamente. Note ainda que, de acordo com a notação definida:

$$\mathbf{Q}_{T(ER),R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{T(E),L(R)} \\ \hline \mathbf{1}_t & \mathbf{Q}_{T(R),L(R)} \end{array} \right] \quad (3.64)$$

e

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} = \left[\mathbf{1}_t \mid \mathbf{Q}_{T(R),L(R)} \right]. \quad (3.65)$$

Observando novamente o critério de ordenação dos ramos da rede, particionamos agora os vetores \mathbf{v} e \mathbf{j} de tensões e correntes nos ramos de forma análoga:

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E \\ \mathbf{j}_{RT} \\ \mathbf{j}_{RL} \\ \mathbf{j}_J \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \\ \mathbf{v}_{RL} \\ \mathbf{v}_J \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Onde os índices RT e RL identificam respectivamente os resistores da árvore e resistores das ligações.

A equação da PLK escreve-se da forma:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{T(E),L(R)} & \mathbf{Q}_{T(E),L(J)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{Q}_{T(R),L(R)} & \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{j}_E}{\mathbf{j}_{RT}} \\ \frac{\mathbf{j}_{RL}}{\mathbf{j}_J} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.67)$$

O bloco inferior de equações escalares de (3.67) fornece:

$$\mathbf{j}_{RT} + \mathbf{Q}_{T(R),L(R)} \mathbf{j}_{RL} + \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \quad (3.68)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_R + \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \quad (3.69)$$

onde

$$\mathbf{j}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_{RT} \\ \mathbf{j}_{RL} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Por outro lado, expressão da SLK será:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_E}{\mathbf{v}_{RT}} \\ \frac{\mathbf{v}_{RL}}{\mathbf{v}_J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{Q}^t_{T(E),L(R)} & \mathbf{Q}^t_{T(R),L(R)} \\ \mathbf{Q}^t_{T(R),L(J)} & \mathbf{Q}^t_{T(R),L(J)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_E}{\mathbf{v}_{RT}} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Donde temos que:

$$\mathbf{v}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{RT} \\ \mathbf{v}_{RL} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_E}{\mathbf{v}_{RT}} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Substituindo (3.72) e a relação constitutiva dos resistores (3.53) na equação (3.69) obtemos finalmente que:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{v}_E}{\mathbf{v}_{RT}} \end{bmatrix} = -\mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J. \quad (3.73)$$

Ou ainda:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}^t_{T(R),R} \mathbf{v}_{RT} = -\mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J - \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}^t_{T(E),R} \mathbf{v}_E \quad (3.74)$$

Note que (3.74) representa um sistema de t equações nas t variáveis \mathbf{v}_{RT} . Observe que $\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}^t_{T(R),R}$ é uma matriz quadrada de ordem t , simétrica e

positivo-definida (vide demonstração da equação (3.30)). Logo, (3.74) possui uma única solução.

Para obter a solução completa da rede, a aplicação das equações (3.52) e (3.53) permite calcular as tensões nos geradores de corrente, bem como as tensões e correntes nos resistores. A corrente nos geradores de tensão é obtida do bloco superior de equações escalares de (3.66), pelo que:

$$\mathbf{j}_E = -\mathbf{Q}_{T(E),L(R)}\mathbf{j}_{RL} - \mathbf{Q}_{T(E),L(J)}\mathbf{j}_J. \quad (3.75)$$

Observe que a redução do número de variáveis da rede na equação (3.74) foi possível graças à escolha conveniente da árvore T . Com a escolha de uma árvore que contém todas as fontes de tensão e nenhuma fonte de corrente, o bloco inferior de equações escalares do sistema (3.67) resulta em um sistema de t equações nas quais não aparecem as m variáveis das correntes nos geradores de tensão.

Note que, na Análise Nodal, para cada gerador de tensão é acrescentada uma variável ao equacionamento da rede, resultando em um total de $n + m$ variáveis; ao passo que na Análise de Cortes, através de uma escolha adequada da árvore, para cada gerador de tensão podemos retirar uma variável do equacionamento da rede, resultando em um total de $t = n - m$ variáveis. No entanto, observe que a busca de uma árvore com essas características pode ser computacionalmente onerosa, especialmente para redes grandes contendo muitos geradores de tensão.

Exemplo 3.9:

Considere novamente o grafo orientado da Figura 3.9. Note que a matriz fundamental de cortes, convenientemente particionada, será:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{T(E),L(R)} & \mathbf{Q}_{T(E),L(J)} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{Q}_{T(R),L(R)} & \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Note que:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}_{T(R),R}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{l} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}_{T(R),R}^t = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}.$$

Observe ainda que:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G} \mathbf{Q}_{T(E),R}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_3 \\ G_3 \end{bmatrix}$$

e que:

$$\mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{J1} \\ j_{J2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{J1} - j_{J2} \\ j_{J2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, a formulação completa da rede será, pela equação (3.74):

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -j_{J1} - j_{J2} \\ j_{J2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_3 \\ -G_3 \end{bmatrix} v_{E1}.$$

Aplicação a Redes Resistivas Não Lineares

Apresentaremos agora o equacionamento da Análise de Cortes para uma rede resistiva não linear. O processo de extensão do método é análogo ao feito na seção 2.3.4, e consiste basicamente na substituição da matriz de condutâncias \mathbf{G} pela matriz de operadores não lineares $\mathbf{\Gamma}$, definida em (3.34), a qual expressa vetorialmente as relações constitutivas de cada resistor da rede η .

Feitas as alterações necessárias nas relações constitutivas dos resistores, a equação (3.58) no caso de uma rede não linear é alterada para:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_R \mathbf{\Gamma}(\mathbf{Q}_R^t \mathbf{e}) + \mathbf{Q}_E \mathbf{j}_E + \mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_E^t \mathbf{e} = \mathbf{v}_E \end{cases} \quad (3.76)$$

ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{j}_E \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_J \mathbf{j}_J \\ \mathbf{v}_E \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

onde \mathbf{f} é uma função não linear de múltiplas variáveis.

Analogamente, a equação (3.73) aplicada a redes não lineares fica:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{\Gamma} \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J. \quad (3.78)$$

Exemplo 3.9:

Na Figura 3.10, sejam R_1 , R_2 e R_3 resistores não lineares controlados por tensão, cujas relações constitutivas são expressas respectivamente pelas funções: $j_1 = g_1(v_1)$, $j_2 = g_2(v_2)$ e $j_3 = g_3(v_3)$. Novamente, escolheremos os ramos E_1 , R_1 e R_2 como árvore da rede em coerência com os exemplos anteriores.

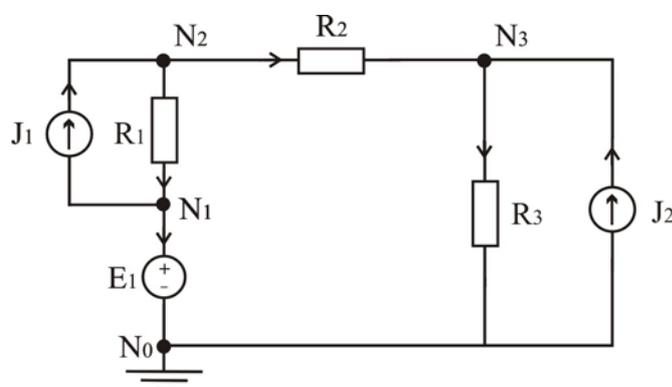


Figura 3-10 - Circuito do exemplo 3.9.

Substituindo as matrizes calculadas nos exemplos anteriores em (3.76), obtemos a formulação da rede não linear:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{E1} \\ v_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} j_{E1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -j_{J2} \\ -j_{J1} - j_{J2} \\ +j_{J2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Observe que a segunda equação do sistema (3.76) reduzir-se-á à identidade: $v_{E1} = v_{E1}$.

Note ainda que as não linearidades introduzidas a partir das relações constitutivas dos resistores freqüentemente impedem que esse tipo sistema de equações não lineares tenha uma solução analítica. Nesse caso, métodos numéricos devem ser empregados. No capítulo seguinte apresentaremos um método de solução que pode ser empregado com garantia de convergência, desde que as relações constitutivas dos resistores da rede sejam expressas por funções monotonicamente

crescentes e que estas satisfaçam as condições de Lipschitz [27] no domínio dos Reais, isto é: $\forall v \in R \rightarrow \exists K > 0$ talque $\frac{di}{dv} < k$.

Observações.

Faremos agora alguns comentários sobre a equação (3.78) que nos serão úteis no desenvolvimento do Capítulo 4.

Em primeiro lugar, note que o vetor de tensões nos ramos da árvore $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}$ contém implícitas as tensões nos geradores de tensão, que são valores conhecidos.

A expressão $\mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}$ é aplicação direta da SLK. Como resultado desta multiplicação, teremos o vetor cujas componentes são as tensões em todos os resistores da rede.

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}. \quad (3.79)$$

A aplicação do operador $\Gamma(\mathbf{v}_R)$ fornece, através das relações constitutivas dos resistores não lineares, a o vetor \mathbf{i}_R , cujas componentes são as correntes em todos os resistores da rede.

$$\mathbf{i}_R = \Gamma(\mathbf{v}_R). \quad (3.80)$$

Observe ainda que a multiplicação $\mathbf{Q}_{T(R),R} \cdot \mathbf{i}_R$ fornece um vetor \mathbf{i}_{cs} cujas componentes são iguais ao somatório da corrente nos resistores da rede em cada um dos conjuntos fundamentais de corte dos resistores da árvore.

$$\mathbf{i}_{cs} = \mathbf{Q}_{T(R),R} \cdot \mathbf{i}_R. \quad (3.81)$$

Observando agora o lado direito da equação, note que o resultado do produto $\mathbf{Q}_{T(R),L(I)} \cdot \mathbf{j}_J$ nos dá um vetor cujas componentes são iguais ao somatório da corrente fornecida pelas fontes de corrente da rede em cada um dos conjuntos fundamentais de corte dos resistores da árvore.

$$\mathbf{j}_{cs} = \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J \quad (3.82)$$

Finalmente, note que a equação (3.78) trata-se da aplicação da PLK nos conjuntos fundamentais de corte dos resistores da árvore. Em cada um destes cortes, o somatório das correntes nos resistores e nas fontes de corrente será igual a zero.

$$\mathbf{j}_{cs} + \mathbf{i}_{cs} = \mathbf{0} \quad (3.83)$$

O vetor \mathbf{j}_{cs} pode ser interpretado como sendo o vetor de fontes de corrente equivalentes para cada conjunto de corte dos resistores da árvore. Em outras palavras, sempre poderemos, *sem que se altere a solução da rede*, substituir todas as fontes de corrente por fontes de corrente equivalentes, dispostas em paralelo com os resistores da árvore, cujos valores (respeitando-se a orientação de cada corte), serão dados pelas componentes de \mathbf{j}_{cs} .

Note ainda que inúmeros arranjos de fontes de corrente na rede podem resultar em um mesmo vetor \mathbf{j}_{cs} . Matematicamente, dizemos que a matriz $\mathbf{Q}_{T(R),L(J)}$ representa uma transformação linear sobrejetora de \mathbf{j}_J em \mathbf{j}_{cs} . Entretanto, para um dado vetor \mathbf{j}_{cs} , a solução da rede será a mesma para todos os possíveis vetores \mathbf{j}_J que geram este mesmo \mathbf{j}_{cs} . Na teoria dos circuitos, isso se traduz em que, em qualquer circuito, substituindo-se os geradores por geradores equivalentes, não se altera a solução do mesmo.

3.3. Sumário

Neste capítulo desenvolvemos, a partir das Leis de Kirchhoff, dois métodos distintos para a formulação de redes elétricas: o método da Análise Nodal e o método da Análise de Cortes.

Para cada método, discutimos separadamente a formulação de redes resistivas lineares contendo resistores, geradores independentes de tensão e geradores independentes de corrente, e discutimos as condições de existência e unicidade da solução da rede para essa família de circuitos.

Na apresentação do método da Análise Nodal, introduzimos o método da Análise Nodal Modificada para a obtenção da formulação da rede por inspeção direta do circuito.

Na Análise de Cortes, mostramos ainda que a escolha adequada de uma árvore pode conduzir a uma formulação alternativa simplificada, com sistemas de equações de ordem inferior.

Estendemos finalmente cada um dos métodos à formulação de redes resistivas não lineares, definindo um operador não linear de condutâncias para os resistores da rede.

Capítulo 4

TEORIA DAS REDES RESISTIVAS LINEARES POR PARTES

Neste capítulo apresentaremos a teoria das redes resistivas lineares por partes, que constituem uma categoria particular dentre as redes resistivas não lineares genéricas.

O primeiro trabalho sobre análise de redes resistivas lineares por partes foi apresentado em 1965 por Katzenelson [6]. Katzenelson desenvolveu um método para encontrar a solução de redes constituídas por resistores com curvas características lineares por partes monotonicamente crescentes. No mesmo trabalho, Katzenelson provou que, para essa classe de redes, seu método sempre converge para a solução em um número finito de passos, tratando-se portanto de uma eficiente ferramenta de análise.

Em 1971, Kuh e Hajj [7] entenderam a aplicabilidade do método de Katzenelson à análise de redes resistivas não lineares arbitrárias com solução única para quaisquer possíveis entradas. No mesmo trabalho, os autores desenvolveram

ainda um método de cálculo das características de entrada e saída de redes resistivas não lineares com múltiplas soluções. Os dois métodos apresentaram bons resultados, ainda que sem garantia de convergência.

Em 1972, Kuh e Fujisawa [30] apresentaram um importante trabalho sobre o tratamento formal da teoria das redes resistivas lineares por partes, no qual se destacam importantes resultados sobre as condições de existência e unicidade da solução.

Chien e Kuh [22] propuseram em 1977 um método de análise de redes LPP que parte da subdivisão do domínio da função n -dimensional da rede em diversos simplexes. Tal artifício apresentou vantagens principalmente no processo ultrapassagem de fronteiras pelo algoritmo, que se reduz à substituição de vértices em um simplex.

Stevens e Lin [21] em 1981 desenvolveram um método de análise de redes LPP utilizando a Teoria do Pivot Complementar, cuja principal contribuição reside na determinação de soluções múltiplas de redes mais gerais.

Em 1989 Huang e Liu [17] apresentaram um algoritmo simples para a obtenção todas as soluções de redes LPP. Em 1994, Brzobohaty *et al.* [15] apresentaram um trabalho na modelagem multidimensional de redes lineares por partes. Pejovic e Maksimovic [14] publicaram, em 1996, um algoritmo de solução de redes lineares incluindo elementos com características descontínuas.

Como um importante avanço na teoria das redes LPP, Van Bokhoven e Leenaerts [13] obtiveram fórmulas explícitas para solução de redes resistivas LPP em 1999.

Mais recentemente, em 2002, Camlibel e Heemels apresentaram relevantes estudos [10, 11] sobre a análise dinâmica de redes LPP. Com efeito, esta parece ser atualmente uma das mais promissoras fronteiras de desenvolvimento da teoria de redes lineares por partes.

Não obstante os diversos resultados obtidos nos últimos anos no estudo das redes LPP, neste trabalho, concentrar-nos-emos basicamente sobre o algoritmo de

Katzenelson, tendo em vista sua prova matemática de convergência para a solução da rede.

Neste capítulo, inicialmente, definiremos resistores lineares por partes, e deduziremos em seguida propriedades importantes de redes constituídas por resistores lineares por partes e fontes independentes. Apresentaremos em seguida o método de Katzenelson [6] para encontrar a solução de redes lineares por partes em um número finito de passos e, ao final, discutiremos alguns aspectos computacionais do algoritmo de Katzenelson.

4.1. Redes Resistivas Lineares Por Partes (LPP)

Redes resistivas lineares por partes são redes não lineares que podem ser caracterizadas por equações do tipo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}, \quad (4.1)$$

onde:

- \mathbf{f} é uma função contínua[§] linear por partes de $R^n \mapsto R^n$;
- \mathbf{x} é um vetor em R^n que representa um determinado conjunto de variáveis da rede; e
- \mathbf{y} é um vetor arbitrário em R^n cujas componentes representam as entradas da rede.

O problema geral da interpolação linear por partes multidimensional é complexo, e não será aqui tratado. No entanto, como observaram Fujisawa e Kuh [30], a interpolação linear por partes de uma rede resistiva n -dimensional pode reduzir-se ao problema da interpolação linear por partes da relação constitutiva não linear de cada ramo.

Por esse motivo, analisaremos mais detidamente no item seguinte resistores lineares por partes com curvas características monotonicamente crescentes, que

[§] Restringiremos este estudo a redes lineares por partes expressas por um mapeamento contínuo de $R^n \mapsto R^n$. Para a consideração de redes LPP contendo elementos com curvas características descontínuas, remetemos o leitor à referência [14].

constituem aproximações dos resistores não lineares mais genéricos enunciados no Capítulo 1.

4.2. Resistores Lineares por Partes (LPP)

Um resistor linear por partes (ou resistor LPP) é um resistor cuja relação constitutiva pode ser expressa por uma função contínua linear por partes de $R \mapsto R$ [31].

Deste ponto em diante, a relação constitutiva de cada resistor LPP será descrita por uma função G_k tal que:

$$j_k = G_k(v_k), \quad (4.2)$$

onde $G_k(\cdot)$ é uma função contínua, linear por partes e *monotonicamente crescente* de $R \mapsto R$, onde k é um índice que se estende a todos os resistores da rede.

Restringir-nos-emos aos resistores controlados por tensão, por dois motivos: em primeiro lugar, porque a maioria dos elementos não lineares utilizados na prática é do tipo controlado por tensão [30]; e em segundo lugar, simplesmente para manter a coerência com os métodos de formulação da rede apresentados no Capítulo 3. Observe que a extensão para resistores controlados por corrente pode ser facilmente obtida por analogia.

A Fig. 4-1 ilustra a curva característica de um resistor linear por partes controlado por tensão.

Cada segmento de reta da curva característica de um resistor LPP é chamado *região linear* (RL), e os pontos de fronteira de cada região linear são chamados *pontos de quebra* (PQ).

Convencionaremos que os pontos de quebra e as regiões lineares de um resistor LPP são numerados em ordem crescente, da esquerda para direita. Assim, na Fig. 4.1 o resistor possui 5 pontos de quebra, e 4 regiões lineares. Note que, se um resistor LPP possui x pontos de quebra, sua curva característica apresentará $(x - 1)$ regiões lineares.

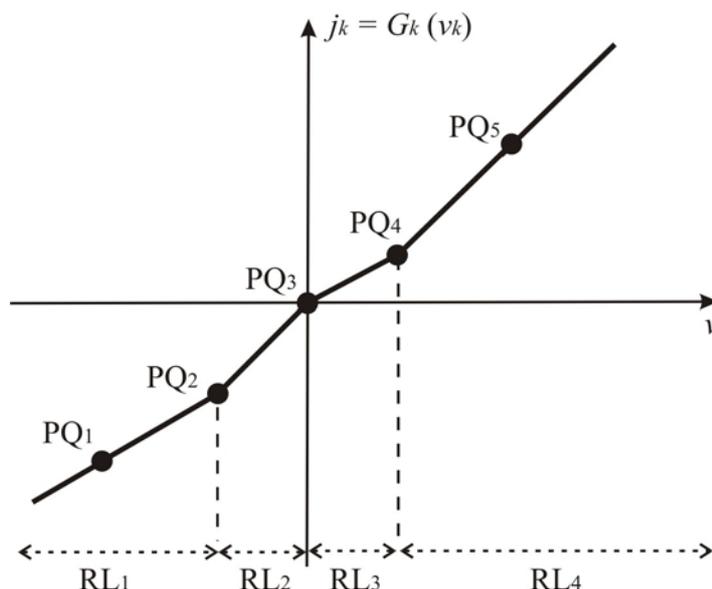


Figura 4-1 – Curva característica de um resistor linear por partes controlado por tensão.

Note ainda que os pontos da curva característica à esquerda do primeiro ponto de quebra (PQ_1) pertencem à primeira região linear (RL_1), e os pontos à direita do último ponto de quebra (PQ_5) pertencem à última região linear da curva característica (RL_4).

Assume-se que, para cada resistor LPP, G_k possui um número finito de pontos de quebra em qualquer intervalo finito. Segue então das propriedades acima que, em cada intervalo finito, a derivada de G_k será sempre positiva e limitada tanto inferior quanto superiormente, e que seu limite inferior será sempre positivo.

Exemplo 4.1:

Em análise de redes resistivas não lineares, a aproximação das características não lineares dos resistores por funções lineares por partes é um recurso frequentemente utilizado. Em alguns casos, a utilização de modelos de resistores LPP pode simplificar sensivelmente a análise da rede, através da aproximação local da rede não linear por uma rede linear equivalente. Exemplo típico de simplificação da rede por uma aproximação LPP é a aproximação da curva característica de um diodo retificador ideal, representada na Fig. 4-2.

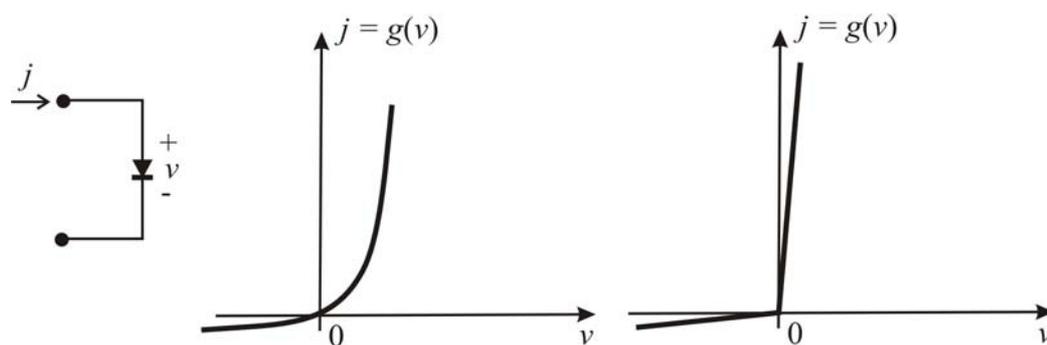


Figura 4-2 – Curva característica do diodo retificador e sua aproximação linear por partes.

De modo geral, note que, dados dois ou mais pontos de operação de um resistor não linear (obtidos diretamente da sua curva característica, ou mesmo empiricamente, através de medições em laboratório), é sempre possível obter uma aproximação LPP de sua curva característica através de uma interpolação linear desses pontos, como sugere a Fig. 4-3.

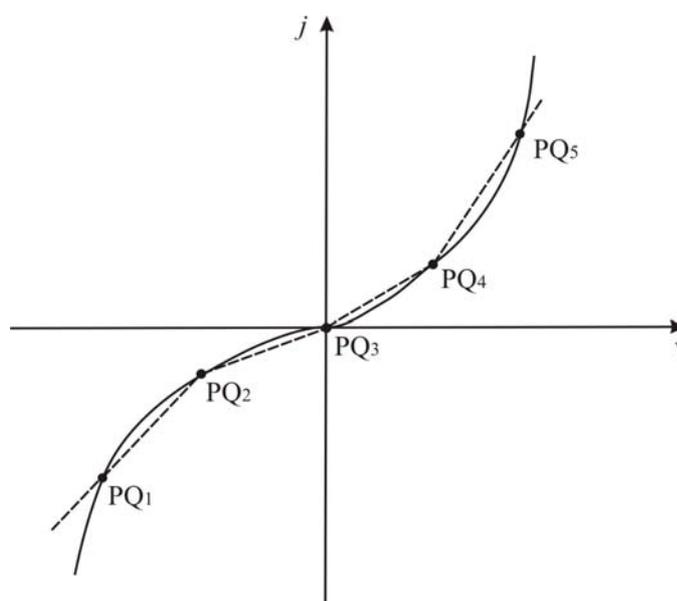


Figura 4-3 – Aproximação LPP de um resistor não linear por interpolação linear de alguns pontos de sua curva característica.

4.2.1. Bipolo Linear Equivalente de uma Região

Considere um resistor LPP R_k cuja curva característica é esboçada na Fig. 4-4 em torno da região linear i . Sejam A e B os pontos de fronteira da região i , de modo que:

$$A = (v_a, j_a) = (v_a, G_k(v_a)),$$

e

$$B = (v_b, j_b) = (v_b, G_k(v_b)).$$

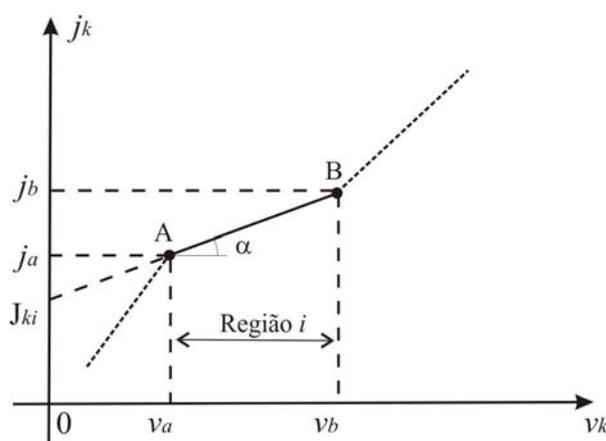


Figura 4-4 - Curva Característica de um Resistor LPP.

Observe que, dentro dos limites da região i , isto é, para $v_a \leq v_k \leq v_b$, a relação constitutiva do resistor R_k é dada por:

$$j_k = G_k(v_k) = G_{ki}v_k + J_{ki} \quad (4.3)$$

onde

$$G_{ki} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{j_b - j_a}{v_b - v_a} \quad (4.4)$$

e

$$J_{ki} = j_a - G_{ki}v_a. \quad (4.5)$$

Note ainda que a relação constitutiva da equação (4.3) vale igualmente para o bipolo linear representado na Fig. 4-5.

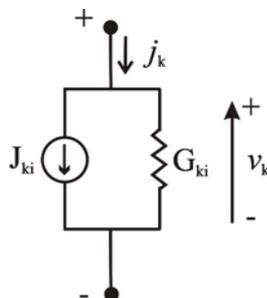


Figura 4-5 – Bipolo linear equivalente de uma região.

Assim sendo, observe que, para cada região linear de um resistor LPP, podemos associar um bipolo linear equivalente como o apresentado na Fig. 4-5.

4.3. Mapeamento LPP no R^n

Com a finalidade de deduzir propriedades importantes das redes LPP, Katzenelson utilizou em seu citado trabalho dois recursos que permitem visualizar melhor as características da rede. O primeiro deles é a formulação da rede pelo Método Alternativo da Análise de Cortes, já enunciado acima no item 3.2.3.

O segundo recurso utilizado por Katzenelson consiste em fazer uma redução prévia das fontes de corrente da rede, de modo que cada conjunto fundamental de corte possua não mais que uma única fonte de corrente, equivalente à associação das fontes de corrente da rede original. Em outras palavras, Katzenelson calcula a associação das fontes de corrente da rede original para cada conjunto de corte da rede, e, em seguida, substitui as fontes originais pelas fontes de corrente equivalentes.

Para manter a coerência com o trabalho de Katzenelson, utilizaremos estes mesmos artifícios neste capítulo. No entanto, salientamos que um e outro recurso não são necessários para o funcionamento do método de solução da rede.

Com relação à formulação da rede pelo Método Alternativo da Análise de Cortes, note que, se a rede possui solução única, pouco importa a escolha das variáveis da rede, desde que se chegue a essa solução, podendo ser empregada a

Análise Nodal Modificada, apresentada no Capítulo 3, ou ainda outros tipos de formulação, tais como a Análise de Malhas ou a Análise de Laços.

Quanto à redução prévia das fontes de corrente da rede, mostramos em 3.2.3 que a simples formulação da rede pelo Método Alternativo da Análise de Cortes já incorpora tal redução, isto é, independentemente da redução ou não da rede, as equações obtidas serão as mesmas.

Consideremos uma rede LPP η , constituída por resistores LPP e fontes independentes de tensão e de corrente.

Seja uma árvore τ de η tal que τ contenha todas as fontes de tensão e nenhuma fonte de corrente da rede η . Seja \mathbf{Q} a matriz fundamental de cortes da rede obtida a partir árvore τ .

Sejam \mathbf{v}_E e \mathbf{j}_J , respectivamente, os vetores das fontes independentes de tensão e das fontes independentes de corrente (entradas da rede), e seja \mathbf{v}_{RT} o vetor das tensões nos resistores da árvore (variáveis da rede).

A equação da rede LPP será:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{\Gamma} \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{\Gamma}$ é o operador vetorial não linear que expressa as relações constitutivas dos resistores LPP de η ; e $\mathbf{Q}_{T(R),R}$, $\mathbf{Q}_{T(ER),R}$ e $\mathbf{Q}_{T(R),L(J)}$ são as submatrizes de \mathbf{Q} definidas no item 3.2.3.

Note que, se fizermos a redução das fontes de corrente da rede de modo que não haja mais que uma fonte de corrente pertencente a cada conjunto de corte, o vetor das fontes de corrente equivalentes para cada conjunto de fundamental de corte será expresso por:

$$\mathbf{j}_{cs} = \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \cdot \mathbf{j}_J \quad (4.7)$$

A equação (4.6) será portanto rescrita da forma:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{\Gamma} \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{j}_{cs} \quad (4.8)$$

Dado que os resistores da rede possuem funções características lineares por partes e monotonicamente crescentes de $R \mapsto R$, temos que, em decorrência do Teorema da Existência e Unicidade da Solução enunciado no Capítulo 1, a rede η possuirá, a cada instante, uma única solução para cada conjunto de entradas da rede: $(\mathbf{v}_E, \mathbf{j}_{cs})$.

Existe, portanto, uma função (característica da rede) que faz o mapeamento de $(\mathbf{v}_E, \mathbf{j}_{cs})$ em \mathbf{v}_{RT} . O domínio dessa função é o espaço $V_E \times J_{cs}$, onde V_E e J_{cs} denotam, respectivamente, os espaços vetoriais correspondentes a \mathbf{v}_E e \mathbf{j}_{cs} .

Por outro lado, a equação (4.8) implica que, dados os valores de $(\mathbf{v}_E, \mathbf{v}_{RT})$, podemos calcular diretamente o valor do vetor \mathbf{j}_{cs} . Isto é, existe uma função que faz o mapeamento de $(\mathbf{v}_E, \mathbf{v}_{RT})$ em \mathbf{j}_{cs} , cujo domínio é $V_E \times V_{RT}$, onde V_{RT} é o espaço vetorial correspondente ao domínio de \mathbf{v}_{RT} .

Fixemos agora o vetor \mathbf{v}_E . Do que foi dito acima, temos que, para um dado vetor \mathbf{v}_E , o mapeamento $\mathbf{j}_{cs} \mapsto \mathbf{v}_{RT}$ se trata de uma função bijetora de J_{cs} em V_{RT} .

Além disso, foi provado em [9] que os mapeamentos $\mathbf{j}_{cs} \mapsto \mathbf{v}_{RT}$ e $\mathbf{v}_{RT} \mapsto \mathbf{j}_{cs}$ são contínuos e satisfazem as condições de Lipschitz [32] em qualquer conjunto limitado dos seus respectivos domínios, isto é, para quaisquer pontos $\mathbf{v}_{RT}^{(1)}$ e $\mathbf{v}_{RT}^{(2)}$ existe uma constante positiva K tal que:

$$\|\mathbf{j}_{cs}^{(2)} - \mathbf{j}_{cs}^{(1)}\| < K \cdot \|\mathbf{v}_{RT}^{(2)} - \mathbf{v}_{RT}^{(1)}\|,$$

onde $\mathbf{j}_{cs}^{(1)}$ e $\mathbf{j}_{cs}^{(2)}$ são, respectivamente, as imagens de $\mathbf{v}_{RT}^{(1)}$ e $\mathbf{v}_{RT}^{(2)}$.

Foi ainda demonstrado em [30] que nosso mapeamento LPP é um *homeomorfismo*, ou seja, a função $f: \mathbf{v}_{RT} \mapsto \mathbf{j}_{cs}$ e sua inversa $f^{-1}: \mathbf{j}_{cs} \mapsto \mathbf{v}_{RT}$ são funções contínuas e bijetoras. Os espaços V_{RT} e J_{cs} são também chamados conjuntos *homeomorfos*.

A rede resistiva η da Fig. 4-6 será utilizada para demonstrar a próxima propriedade de interesse **.

** A formulação completa desta rede foi descrita no Exemplo 3.9.

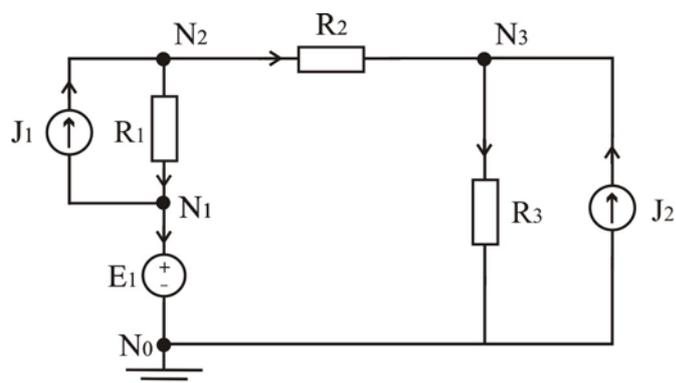


Figura 4-6 - Rede resistiva.

Sejam v_1 , v_2 e v_3 respectivamente as tensões nos resistores R_1 , R_2 e R_3 . Seja e_k^n a tensão do n -ésimo ponto de quebra na função característica do resistor R_k . Seja ainda N_k o número de pontos de quebra do resistor R_k .

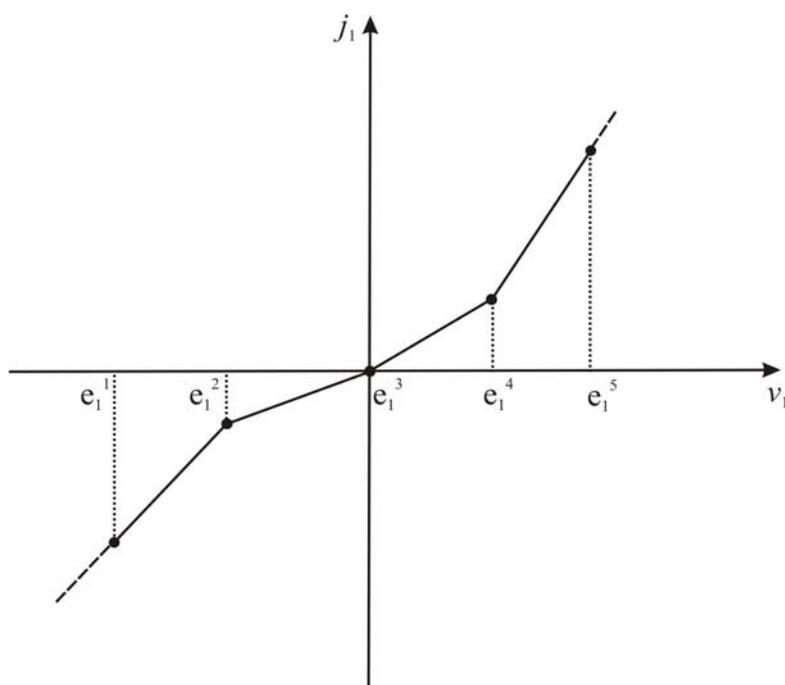


Figura 4-7 - Curva característica do resistor R_1 com $N_1 = 5$.

Escolhamos uma árvore τ de η constituída pelos ramos E_1 , R_1 e R_2 , destacados em negrito na Fig. 4-8. Note que, sendo o ramo E_1 uma fonte de tensão, \mathbf{v}_{RT} e \mathbf{j}_{cs} serão vetores bidimensionais:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{j}_{cs} = \begin{bmatrix} j_{cs1} \\ j_{cs2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{j1} - j_{j2} \\ j_{j2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (\rightarrow \text{Corte 2}) \\ (\rightarrow \text{Corte 3}) \end{array}$$

e os espaços V_{RT} e J_{cs} serão planos, como mostra a Fig. 4-9.

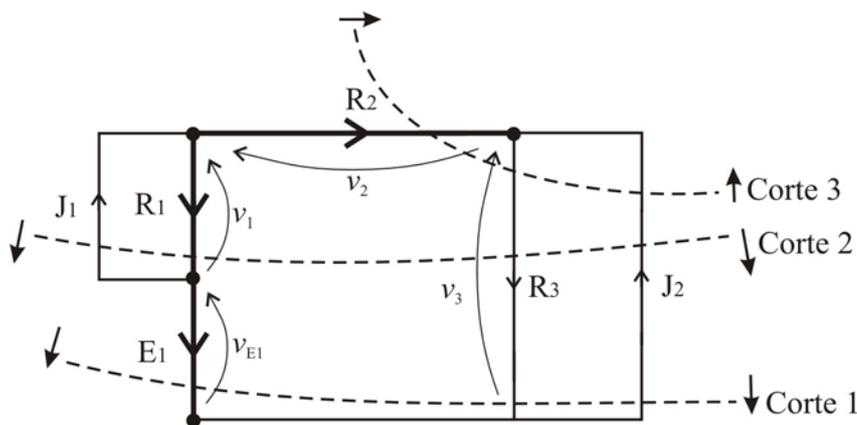


Figura 4-8 - Conjuntos fundamentais de corte.

Note o gerador é representado de acordo com a convenção do receptor na formulação da rede.

Considere o espaço vetorial V_{RT} . Note que, em V_{RT} , o lugar geométrico de todos os pontos para os quais $v_1 = e_1^n$, para $n = 1, \dots, N_1$ (onde N_1 é o número de pontos de quebra da curva característica do resistor R_1), consiste em um conjunto de retas paralelas ao eixo v_2 , como se representa na Fig. 4-10. Similarmente, o lugar geométrico de todos os pontos para os quais $v_2 = e_2^n$, para $n = 1, \dots, N_2$, consiste em um conjunto de retas paralelas ao eixo v_1 .

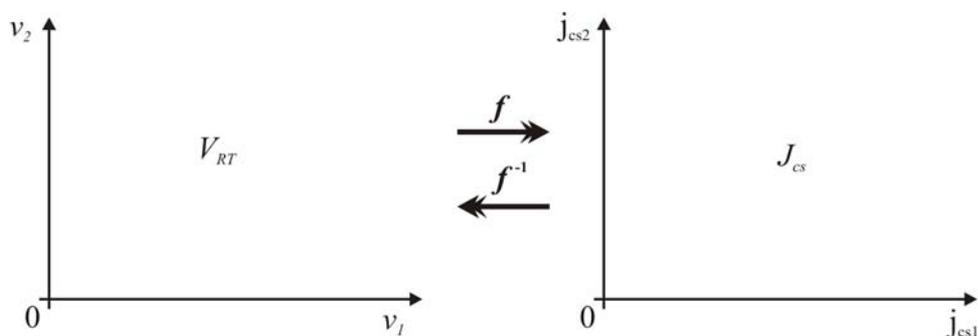


Figura 4-9 - Espaços vetoriais V_{RT} e J_{cs} .

Para calcular o lugar geométrico análogo no espaço V_{RT} , para o resistor R_3 (que está fora da árvore), note que pela SLK temos:

$$v_3 = v_{E1} + v_1 - v_2. \quad (4.9)$$

onde v_{E1} é a tensão da fonte E_1 .

Isolando v_2 e fazendo $v_3 = e_3^n$, com $n = 1, 2, \dots, N_3$, temos:

$$v_2 = v_1 + (v_{E1} - e_3^n). \quad (4.10)$$

Assim, obtemos que o lugar geométrico para R_3 são retas com coeficiente angular igual a 1, e que cruzam o eixo v_2 nos pontos $(0, v_{E1} - e_3^n)$.

A Fig. 4-10 mostra os lugares geométricos definidos acima no espaço V_{RT} . Note que essas retas dividem o plano V_{RT} em diversas regiões.

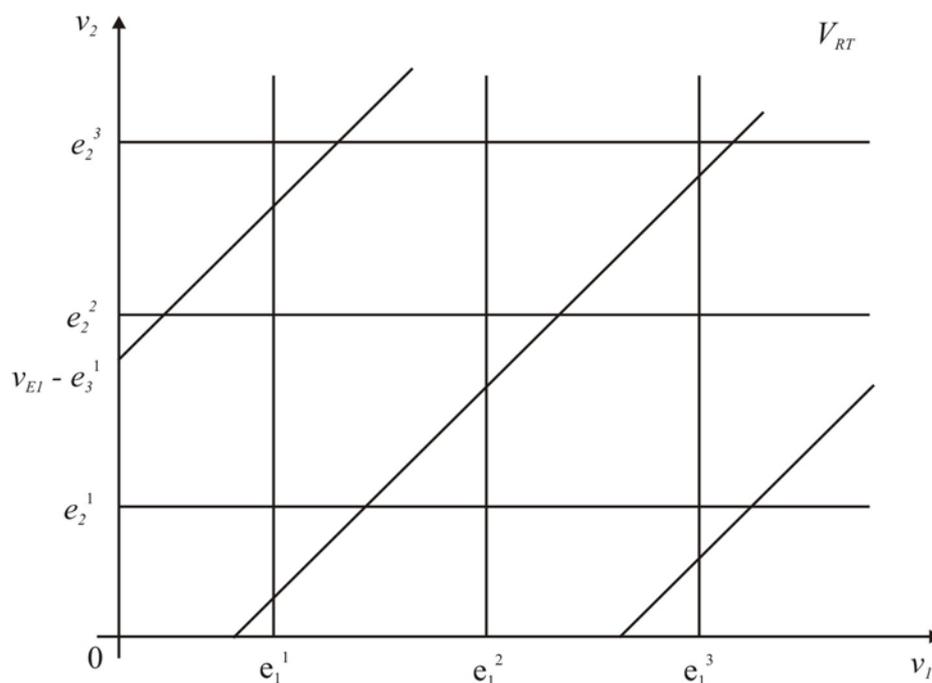


Figura 4-10 - Divisão do espaço V_{RT} em regiões lineares

Generalizando para o caso de redes de maiores dimensões, note que tais lugares geométricos serão hiperplanos que dividirão o espaço V_{RT} em regiões similares.

A propriedade interessante dessas regiões é que, dentro de cada uma delas, o mapeamento $\mathbf{v}_{RT} \mapsto \mathbf{j}_{cs}$ é linear.

Isso se deve ao fato de que, dentro de cada região, os resistores da rede comportam-se linearmente, uma vez que os limites de cada região foram determinados pelos pontos de quebra dos resistores.

Essa propriedade será intensamente utilizada pelo algoritmo de solução da rede descrito mais adiante.

4.4. Rede Linear Equivalente de uma Região

Do que foi dito acima, a cada região de V_{RT} é possível associar uma rede linear, chamada *rede linear equivalente da região*. Essa rede terá uma topologia idêntica à da rede original, sendo cada resistor LPP substituído por seu bipolo linear equivalente na região de V_{RT} considerada (vide item 4.2.1).

A Fig. 4-11 ilustra uma rede linear equivalente obtida para o circuito da Fig. 4-6.

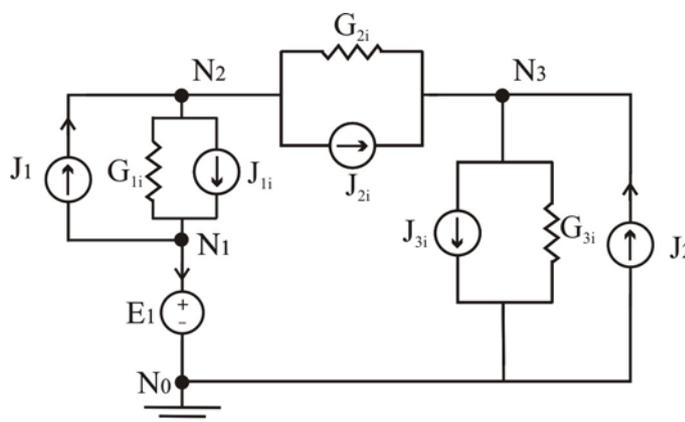


Figura 4-11 - Circuito da Fig. 4-6 com a substituição de seus bipolos lineares equivalentes.

Conforme a discussão do item 4.2.1, a equação característica do bipolo linear equivalente para um resistor k em uma dada região A_i do espaço V_{RT} será da forma:

$$j_k = G_k(v_k) = G_{ki}v_k + J_{ki} \quad (4.11)$$

onde G_{ki} e J_{ki} são, respectivamente, os coeficientes angular e linear do trecho da curva característica do resistor LPP correspondente à região A_i . Alternativamente, G_{ki}

e J_{ki} podem ser interpretados como os valores da condutância linear e da fonte de corrente na representação dos bipolos lineares na Fig. 4-10.

Escrevendo a equação (4.11) na forma matricial para os $(n+p)$ resistores da rede, temos:

$$\mathbf{j}_R = \mathbf{G}_i \mathbf{v}_R + \mathbf{j}_i \quad (4.12)$$

onde

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{1i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{(n+p)i} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{j}_i = \begin{bmatrix} J_{1i} \\ \vdots \\ J_{(n+p)i} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

\mathbf{G}_i será a matriz de condutâncias da rede linear equivalente na região A_i , e \mathbf{j}_i será o vetor das fontes de corrente originadas na linearização dos resistores LPP.

De acordo com a equação (3.69), a PLK aplicada aos conjuntos fundamentais de corte dos resistores da árvore estabelece que:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_R + \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.12) e (4.7) em (4.14) temos:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} (\mathbf{G}_i \mathbf{v}_R + \mathbf{j}_i) + \mathbf{j}_{cs} = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Mas pela equação (3.72), note que:

$$\mathbf{v}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{RT} \\ \mathbf{v}_{RL} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Substituindo em (4.15) temos:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \left(\mathbf{G}_i \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} + \mathbf{j}_i \right) + \mathbf{j}_{cs} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

Expandindo a equação (4.17) obtemos:

$$\left(\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}^t_{T(R),R} \right) \mathbf{v}_{RT} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_i + \left(\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}^t_{T(E),R} \right) \mathbf{v}_E + \mathbf{j}_{cs} = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Note que a equação (4.18) trata-se da PLK, que iguala a zero a soma das correntes que fluem através dos cortes fundamentais determinados pelos ramos

resistivos da árvore. As primeiras três parcelas correspondem à contribuição das correntes nos resistores LPP, e a quarta parcela corresponde à contribuição das fontes de corrente. Finalmente, note que $\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(R),R}^t$ é uma matriz quadrada, simétrica e positivo-definida, e que o sistema (4.18) pode ser resolvido para \mathbf{v}_{RT} .

4.5. O Algoritmo de Katzenelson

Passaremos agora à descrição do algoritmo de Katzenelson para solução de redes resistivas LPP.

Observe que a formulação da rede LPP pode ser escrita simbolicamente como:

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{j}_{cs} \quad (4.19)$$

onde \mathbf{f} denota um mapeamento de $V_E \times V_{RT}$ em J_{cs} , e $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}$ denota um vetor cujas componentes são as componentes de \mathbf{v}_E e de \mathbf{v}_{RT} dispostas na ordem que a notação sugere, ou seja, em primeiro as componentes de \mathbf{v}_E , seguidas das componentes de \mathbf{v}_{RT} . A equação (4.19) será usada deste ponto em diante como uma notação abreviada para as equações da rede.

4.5.1. A Curva de Solução

Considere os espaços V_{RT} e J_{cs} . Seja $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ um ponto de partida escolhido no espaço V_{RT} . O ponto correspondente no espaço J_{cs} será dado por:

$$\mathbf{j}_{cs}^{(0)} = \mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT}^{(0)} \end{bmatrix}\right) \quad (4.20)$$

Note que a solução da rede será um ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ que satisfaça a equação:

$$\mathbf{f}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT}^{(sol)} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{j}_{cs}^{(sol)}, \quad (4.21)$$

onde $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ é o conhecido vetor de fontes de corrente equivalentes, entrada da rede.

Considere agora os pontos $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda)}$ que são soluções da seguinte equação:

$$\mathbf{f}\left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda)} \end{array}\right]\right) = \mathbf{j}_{cs}^{(0)} + \lambda \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}) \quad (4.22)$$

onde $\{\lambda \in R \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Igualando λ a todos os valores possíveis entre 0 e 1, o lado direito da equação (4.22) descreverá uma linha reta no espaço J_{cs} que sai do ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ e chega até $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$.

Para um dado \mathbf{v}_E , a equação (4.22) descreve um mapeamento dessa linha reta do espaço J_{cs} no espaço V_{RT} .

A imagem inversa da linha $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$ no espaço V_{RT} terá as seguintes propriedades:

- Para $\lambda = 0$, $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda)} = \mathbf{v}_{RT}^{(0)}$, e para $\lambda = 1$, $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda)} = \mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$;
- Dado que o mapeamento \mathbf{f}^{-1} é contínuo, a imagem da linha $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$ no espaço V_{RT} será uma curva contínua que sai do ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ e chega até $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$;
- Dado que dentro de cada região o mapeamento \mathbf{f}^{-1} é linear, dentro de cada região de V_{RT} esta curva coincide com um segmento de reta.

A Fig. 4-12 exemplifica tal caminho, denominado *curva de solução*.

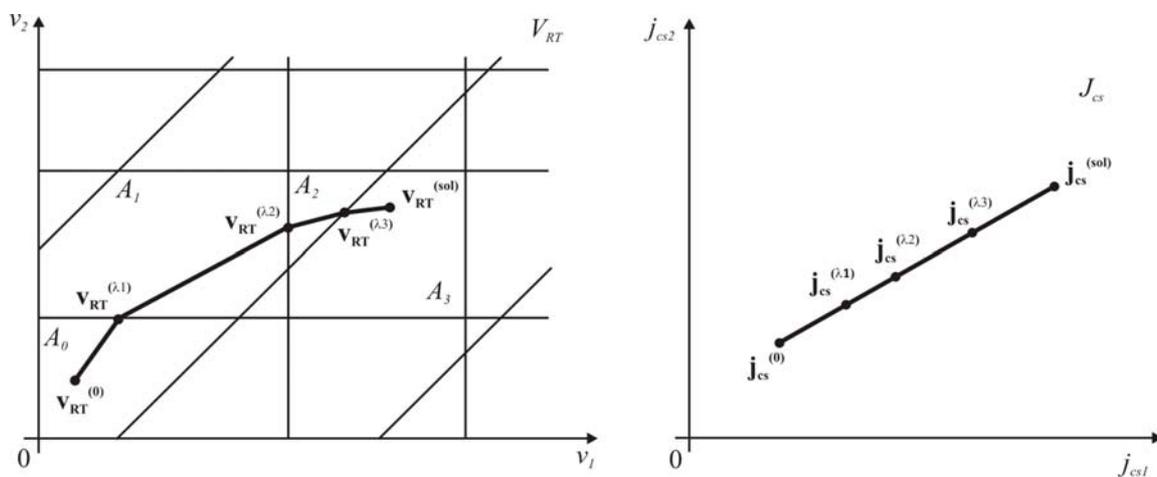


Figura 4-12 - Curva de solução no espaço V_{RT} e sua imagem no espaço J_{cs} .

4.5.2. Solução da Rede pelo Traçado da Curva

O algoritmo de Katznelson calcula a solução da rede LPP traçando a curva de solução desde um ponto inicial arbitrariamente escolhido $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ até a solução da rede $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$. Esta operação será descrita a seguir.

A curva de solução será traçada utilizando o fato de que, dentro de cada região, o mapeamento $\mathbf{v}_{RT} \mapsto \mathbf{j}_{cs}$ é uma função bijetora e linear. Com efeito, o mapeamento, dentro de cada região, coincide com a função da rede linear equivalente dessa região.

O primeiro passo do algoritmo consiste na escolha de um ponto de partida $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ em uma região qualquer A_0 . Logo em seguida, pela equação (4.20), determina-se o correspondente ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ no espaço J_{cs} .

Note que, pela função linear da rede equivalente da região A_0 , a imagem da linha $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$ no espaço V_{RT} seria um segmento de reta que ligaria $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ ao ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)}$, que pode ser calculado pela equação (4.18), fazendo $\mathbf{j}_{cs} = \mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ e utilizando os parâmetros que caracterizam a região linear A_0 : \mathbf{G}_0 e \mathbf{j}_0 . Em outras palavras, $\mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)}$ é simplesmente a solução da rede linear da região A_0 para um dado $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$.

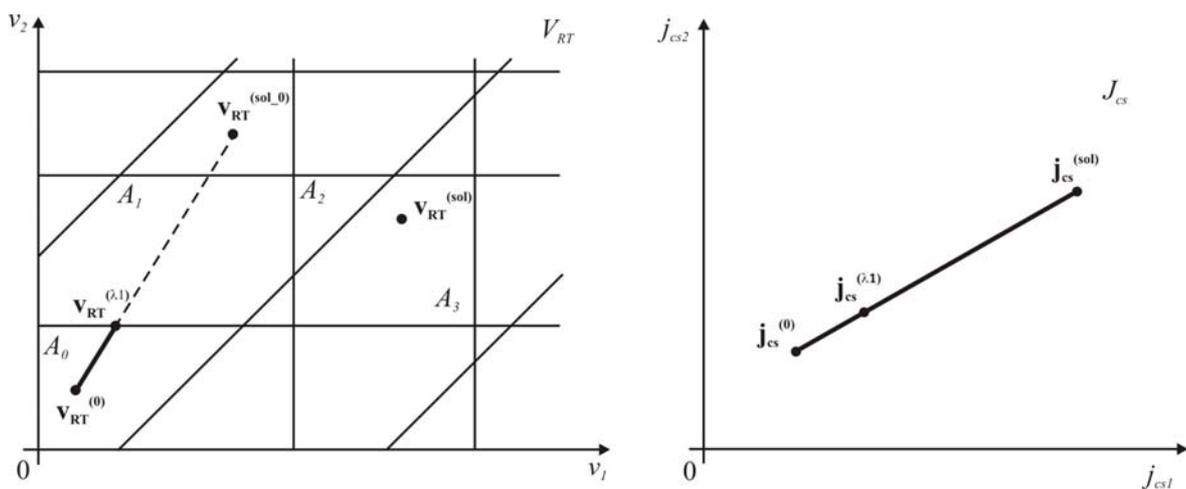


Figura 4-13 - Traçado da curva de solução dentro da região A_0 .

O mapeamento linear de A_0 , que coincide localmente com o mapeamento LPP da rede, será utilizado para traçar a curva de solução dentro desta região. Queremos portanto determinar qual o último ponto do segmento $(\mathbf{v}_{RT}^{(0)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)})$ que pertence ainda à região A_0 e à curva de solução.

Seja $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$ o ponto de intercessão da curva de solução com a fronteira da região A_0 . Considerando a linha $(\mathbf{v}_{RT}^{(0)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)})$, teremos:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)} = \mathbf{v}_{RT}^{(0)} + \lambda_1 \cdot (\mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)} - \mathbf{v}_{RT}^{(0)}), \quad (4.23)$$

onde $\{\lambda_1 \in R \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1\}$.

Em palavras, λ_1 expressa a fração do segmento de reta $(\mathbf{v}_{RT}^{(0)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol-0)})$ que será percorrida pela curva de solução na região A_0 até que esta cruze alguma fronteira.

Computacionalmente, o algoritmo calculará λ_1 observando a tensão em cada resistor LPP da rede, identificando, em suas curvas características, eventuais mudanças de região linear. Detalharemos este procedimento mais adiante, no item 4.7.2.

Note ainda que a imagem de $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$ no espaço J_{cs} será um ponto

$$\mathbf{j}_{cs}^{(1)} = \mathbf{j}_{cs}^{(0)} + \lambda_1 \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}), \quad (4.24)$$

situado em algum lugar sobre o segmento $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$.

Ao cruzar a fronteira, o algoritmo passa a considerar o ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$ encontrado como pertencente à região seguinte, digamos, A_1 . O próximo ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_2)}$ será calculado a partir de $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$, da mesma forma que $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$ foi calculado a partir de $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$.

O processo continua desta forma até que, em uma certa região A_n , encontremos $\lambda_n = 1$, indicando que o ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_n)} = \mathbf{v}_{RT}^{(sol-n)}$ (interior a A_n) é a imagem do ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ e, portanto, a solução da rede.

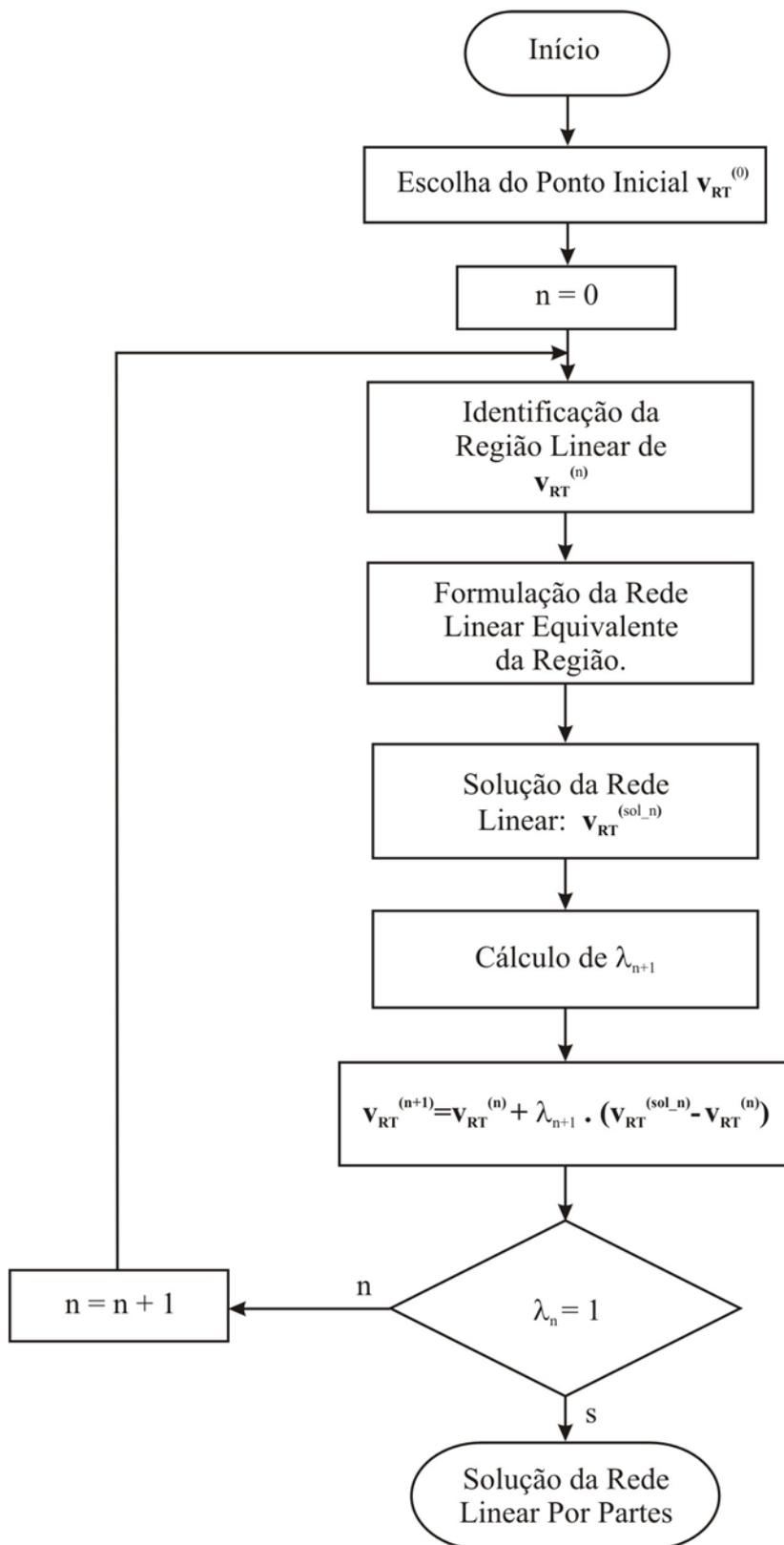


Figura 4-14 - Fluxograma do Algoritmo de Katzenelson

4.6. Prova de Convergência

Neste item provaremos que o algoritmo de Katznelson converge para a solução da rede LPP em um número finito de iterações. Será provado que o traçado da curva de solução cruza um número finito de fronteiras, e que, portanto, o algoritmo converge em um número finito de passos.

Por simplicidade, considere novamente a rede da Fig. 4-6. No espaço J_{cs} , a imagem da curva de solução é uma linha reta que liga o ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ a $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$.

Considere as fronteiras da região A_0 no espaço V_{RT} . Estas fronteiras são segmentos lineares. Logo, dado que o mapeamento de $\mathbf{v}_{RT} \mapsto \mathbf{j}_{cs}$ é contínuo e linear dentro de cada região, e como cada região contém suas fronteiras, as fronteiras de A_0 podem ser mapeadas como segmentos de reta no espaço J_{cs} .

Ora, se a curva de solução e uma fronteira possuem pontos em comum no espaço V_{RT} , uma de duas possibilidades existe:

- a curva de solução e a fronteira possuem um único ponto em comum; ou
- a curva de solução e a fronteira possuem em comum um segmento finito.

O primeiro caso corresponde ao cruzamento de uma fronteira. No segundo, a curva de solução permanece dentro de uma região, haja vista que cada região inclui também as suas fronteiras.

Seja S_1 um conjunto de J_{cs} definido por:

$$S_1 = \left\{ \mathbf{j}_{cs} \mid \left\| \mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs} \right\| < \left\| \mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)} \right\| + \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\} \quad (4.25)$$

Seja S_2 a imagem inversa de S_1 no espaço V_{RT} . O conhecido teorema de análise [32] estabelece que, se o mapeamento é contínuo, a imagem de um conjunto compacto (isto é, limitado e fechado) será também um conjunto compacto. Logo, S_2 é compacto, dado que S_1 é compacto e que o mapeamento é contínuo.

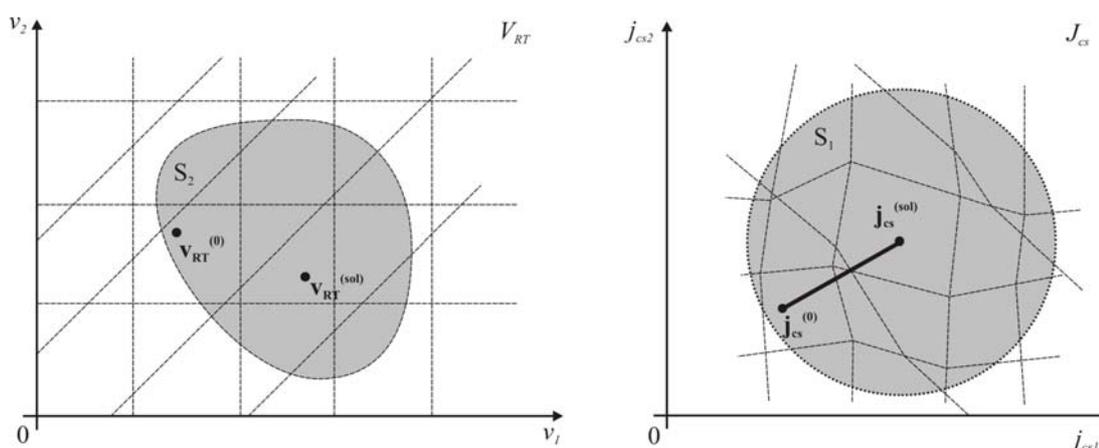


Figura 4-15 - Ilustração para a prova de convergência do algoritmo.

Por hipótese, a curva característica de cada resistor LPP possui um número finito de pontos de quebra. Logo, podemos afirmar que S_2 contém um número finito de regiões.

Conseqüentemente, o conjunto S_1 conterá um número finito de segmentos.

No entanto, a imagem da curva solução no espaço J_{cs} é um segmento de reta que liga os pontos $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ e $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$.

Observe que as imagens da curva de solução e de cada fronteira mapeada no J_{cs} são segmentos de reta, e que, portanto, só se podem cruzar em um único ponto, uma única vez.

Como a imagem da curva de solução poderá cruzar cada fronteira mapeada no J_{cs} uma única vez, haverá um número finito de pontos de cruzamento. Logo, a solução será atingida em um número finito de passos.

4.7. Aspectos Computacionais do Algoritmo

Discutiremos agora alguns aspectos computacionais do algoritmo, começando pelo cálculo da variável λ citada no item 4.5.2.

Apresentaremos ainda o método da modificação de matrizes sugerido pelo próprio Katzenelson para melhoria da performance computacional do algoritmo.

Finalmente, discutiremos o problema do ponto multi-fronteira e algumas estratégias pertinentes a sua solução.

4.7.1. Cálculo de λ

Ao enunciarmos a estrutura do algoritmo no item 4.5.2, dissemos que o cálculo de λ seria feito com base nos valores de tensão dos resistores LPP da rede. Descreveremos esse processo a seguir.

Suponha que o algoritmo, em determinado passo, se encontre em uma região A_x sobre um ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(x)}$. Seja $\mathbf{v}_{RT}^{(sol_x)}$ solução da rede linear equivalente associada à região A_x .

Dentro da região A_x , a curva de solução coincidirá com um trecho do segmento de reta dado por:

$$\left\{ \mathbf{v}_{RT} \in V_{RT} \mid \mathbf{v}_{RT} = \mathbf{v}_{RT}^{(x)} + \lambda \cdot \Delta \mathbf{v}_{RT}^{(x)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}, \quad (4.26)$$

onde

$$\Delta \mathbf{v}_{RT}^{(x)} = \mathbf{v}_{RT}^{(sol_x)} - \mathbf{v}_{RT}^{(x)}. \quad (4.27)$$

Queremos determinar o maior valor de λ para o qual \mathbf{v}_{RT} pertence ainda à região A_x . Em outras palavras, queremos determinar o valor da variável λ_{x+1} , que exprimirá a fração do segmento $(\mathbf{v}_{RT}^{(x)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol_x)})$ que pode ser percorrida a partir de $\mathbf{v}_{RT}^{(x)}$ sem que se ultrapasse qualquer fronteira de A_x .

Determinaremos o valor de λ_{x+1} observando individualmente a situação de cada resistor LPP. Pela equação (3.72), no ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(x)}$, a tensão nos resistores da rede será dada por:

$$\mathbf{v}_R^{(x)} = \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \left[\frac{\mathbf{v}_E}{\mathbf{v}_{RT}^{(x)}} \right]. \quad (4.28)$$

Analogamente, as componentes do vetor $\Delta \mathbf{v}_{RT}^{(x)}$ em cada resistor da rede podem ser calculadas por:

$$\Delta \mathbf{v}_R^{(x)} = \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \left[\frac{\mathbf{v}_E}{\Delta \mathbf{v}_{RT}^{(x)}} \right] \quad (4.29)$$

Para cada resistor R_k , calculamos assim sua tensão atual v_k e a pretensa variação dessa tensão Δv_k . Associaremos a cada resistor R_k uma variável auxiliar λ_k .

Situemos agora v_k na curva característica LPP do resistor R_k , tal como na Fig. 4-16. Se a tensão $(v_k + \Delta v_k)$ permanecer dentro da mesma região linear de sua curva característica, faça $\lambda_k = 1$.

Se, no entanto, a variação Δv_k acarretar uma mudança de região na curva característica de R_k faça:

$$\lambda_k = \frac{e_k^n - v_k}{\Delta v_k}, \quad (4.30)$$

onde e_k^n é a tensão do n -ésimo ponto de quebra do resistor, ultrapassado na variação de tensão Δv_k .

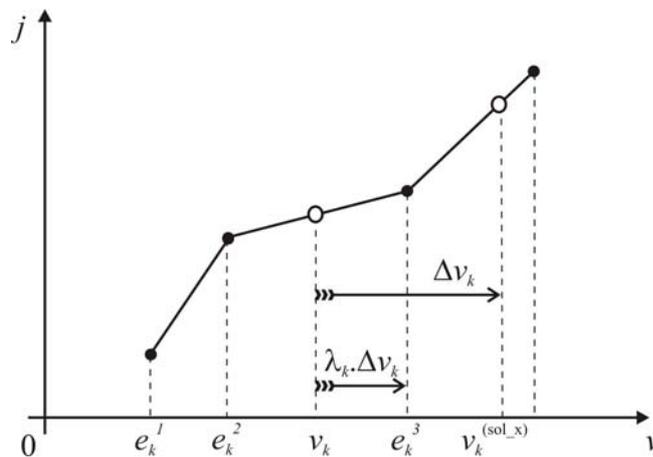


Figura 4-16 – Ilustração referente à obtenção de λ_k .

A variável λ_{x+1} será, ao cabo deste processo:

$$\lambda_{x+1} = \min_k(\lambda_k), \quad (4.31)$$

onde k é um índice que se estende a todos os resistores da rede.

4.7.2. Traçado da curva de solução utilizando matrizes Jacobianas Inversas

Mostraremos a seguir que a solução da rede linear equivalente em cada região pode ser substituída, no traçado da curva de solução, pelo cálculo da inversa da matriz Jacobiana de cada região linear. Esta propriedade será utilizada com vantagem

pelo algoritmo ao introduzirmos o método da modificação de matrizes no item seguinte.

Considere uma região linear A_i de uma rede LPP. Temos que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_{RT}) = (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(R),R}^t) \mathbf{v}_{RT} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_i + (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(E),R}^t) \mathbf{v}_E = -\mathbf{j}_{cs} \quad (4.32)$$

Note que, para a região linear A_i , a matriz Jacobiana da rede será uma matriz constante dada por:

$$\mathbf{G}_{Ai} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}_{RT}} = (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(R),R}^t). \quad (4.33)$$

Substituindo em (4.32) temos:

$$\mathbf{G}_{Ai} \mathbf{v}_{RT} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_i + (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(E),R}^t) \mathbf{v}_E = -\mathbf{j}_{cs}. \quad (4.34)$$

Considere um ponto inicial $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ em uma região A_0 , e as entradas do circuito \mathbf{v}_E e $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$. A imagem de $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ no espaço J_{cs} será:

$$\mathbf{j}_{cs}^{(0)} = -\mathbf{G}_{A0} \mathbf{v}_{RT}^{(0)} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_0 + (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_0 \mathbf{Q}_{T(E),R}^t) \mathbf{v}_E. \quad (4.35)$$

Note ainda que:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)} = -\mathbf{G}_{A0}^{-1} (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_0 + (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_0 \mathbf{Q}_{T(E),R}^t) \mathbf{v}_E) \quad (4.36)$$

e que:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(0)} = -\mathbf{G}_{A0}^{-1} (\mathbf{j}_{cs}^{(0)} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{j}_0 + (\mathbf{Q}_{T(R),R} \mathbf{G}_0 \mathbf{Q}_{T(E),R}^t) \mathbf{v}_E) \quad (4.37)$$

Assim temos:

$$\Delta \mathbf{v}_{RT} = \mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)} - \mathbf{v}_{RT}^{(0)} = -\mathbf{G}_{A0}^{-1} \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}) \quad (4.38)$$

Após o cálculo de λ_1 , teremos ainda:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)} = \mathbf{v}_{RT}^{(0)} - \lambda_1 \cdot \mathbf{G}_{A0}^{-1} \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}) \\ \mathbf{j}_{cs}^{(1)} = \mathbf{j}_{cs}^{(0)} + \lambda_1 \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}) \end{cases} \quad (4.39)$$

Observe que na próxima região, o algoritmo calculará:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_2)} = \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)} - \lambda_2 \cdot \mathbf{G}_{A1}^{-1} \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(1)}) \\ \mathbf{j}_{cs}^{(2)} = \mathbf{j}_{cs}^{(1)} + \lambda_2 \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(1)}) \end{cases} \quad (4.40)$$

e assim por diante.

Do que foi exposto acima, conclui-se que, como a função LPP da rede é contínua, para traçar a continuação da curva de solução em uma nova região A_i , será suficiente o cálculo da matriz Jacobiana inversa de sua rede linear equivalente: $\mathbf{G}_{A_i}^{-1}$.

4.7.3. Método de Obtenção das Matrizes Jacobianas Inversas

O processo de obtenção de $\mathbf{G}_{A_i}^{-1}$ pela inversão direta de \mathbf{G}_{A_i} em cada região é computacionalmente caro, especialmente para redes de grande porte, nas quais \mathbf{G}_{A_i} será uma matriz de grandes dimensões. No entanto, esse inconveniente pode ser habilmente contornado após a primeira iteração do algoritmo, através do artifício que apresentaremos em seguida, o qual obtém a matriz Jacobiana inversa da nova região a partir da matriz Jacobiana inversa da região anterior.

Considere novamente a curva de solução da Fig. 4-17. O algoritmo calculará $\mathbf{G}_{A_0}^{-1}$ no primeiro passo pelo método convencional de inversão de matrizes. Contudo, no passo seguinte, $\mathbf{G}_{A_1}^{-1}$ poderá ser obtida a partir de $\mathbf{G}_{A_0}^{-1}$ pelo método de modificação de matrizes, o qual propicia diretamente a obtenção da inversa de uma matriz que seja a modificação de uma outra cuja inversa é conhecida.

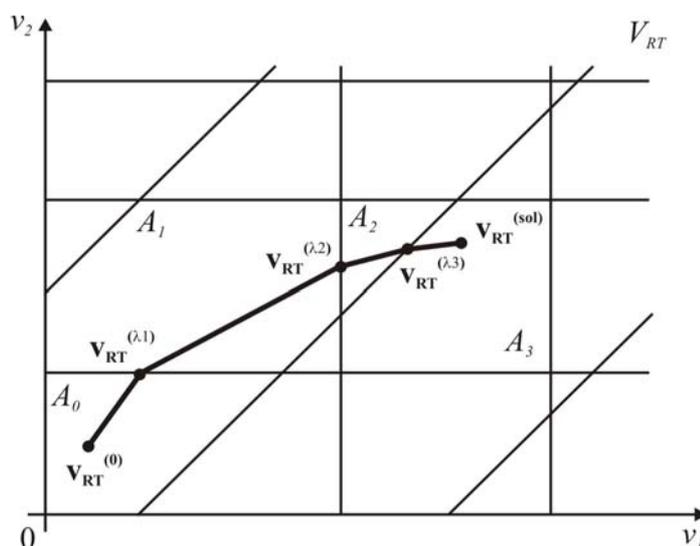


Figura 4-17 - Curva de Solução.

A fórmula que utilizaremos é a seguinte:

$$(\mathbf{F} + \mathbf{IHK})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{I}(\mathbf{KF}^{-1}\mathbf{I} + \mathbf{H}^{-1})^{-1}\mathbf{KF}^{-1} \quad (4.41)$$

onde \mathbf{F} , \mathbf{I} , \mathbf{H} e \mathbf{K} são matrizes de dimensões compatíveis e a inversa de \mathbf{H} supostamente existe.

Note que se \mathbf{I} é um vetor coluna e se \mathbf{K} é um vetor linha; se \mathbf{H} é uma matriz 1×1 e se a inversa de \mathbf{F} é conhecida, o cálculo do lado direito da equação (4.41) requererá não mais que a inversão de uma matriz 1×1 .

No exemplo da Fig. 4-17, dado que uma só fronteira tenha sido cruzada na passagem de A_0 para A_1 , as redes lineares equivalentes para as duas regiões diferirão apenas pelas características de um bipolo linear equivalente. Seja ΔG_2 a diferença no valor da condutância G_2 , alterada na mudança de região.

Temos que:

$$\mathbf{G}_{A_0} = \mathbf{Q}_{T(R),R} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{T(R),R}^t \quad (4.42)$$

e que:

$$\mathbf{G}_{A_1} = \mathbf{Q}_{T(R),R} \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 + \Delta G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{T(R),R}^t \quad (4.43)$$

Podemos escrever que:

$$\mathbf{G}_{A_1} = \mathbf{G}_{A_0} + \mathbf{Q}_{T(R),R} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{T(R),R}^t \quad (4.44)$$

ou ainda que:

$$\mathbf{G}_{A_1} = \mathbf{G}_{A_0} + \mathbf{c}_2 \cdot \Delta G_2 \cdot \mathbf{c}_2^t, \quad (4.45)$$

onde \mathbf{c}_i denota um vetor coluna igual à i -ésima coluna da matriz $\mathbf{Q}_{T(R),R}$.

Fazendo:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{K} = \mathbf{c}_2^t \\ \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_{A0}^{-1} \\ \mathbf{H} = [\Delta G_2] \end{cases} \quad (4.46)$$

teremos:

$$\mathbf{G}_{A1}^{-1} = \mathbf{G}_{A0}^{-1} - \mathbf{G}_{A0}^{-1} \mathbf{c}_2 \left(\mathbf{c}_2^t \mathbf{G}_{A0}^{-1} \mathbf{c}_2 + \frac{1}{\Delta G_2} \right)^{-1} \mathbf{c}_2 \mathbf{G}_{A0}^{-1}. \quad (4.47)$$

Note que, quando a curva de solução cruza uma fronteira, o uso de (4.47) requer apenas a inversão de uma matriz 1×1 (ou seja, um escalar), visto que

$\left(\mathbf{c}_2^t \mathbf{G}_{A0}^{-1} \mathbf{c}_2 + \frac{1}{\Delta G_2} \right)$ possui dimensão 1×1 .

Seguindo este método, apenas uma inversão de matriz é realizada, para a região inicial, quando o algoritmo inicia. As matrizes Jacobianas inversas das regiões seguintes são obtidas sucessivamente pela modificação da matriz correspondente à região anterior.

Finalmente, observe que o processo da modificação de matrizes gasta apenas uma pequena fração do tempo requerido por uma inversão matricial direta, conferindo grande agilidade ao processamento do algoritmo.

Observação.

O método de modificação de matrizes, embora reduza consideravelmente o tempo de processamento, pode, no entanto, apresentar problemas de propagação de erros numéricos no algoritmo.

Para tirar proveito da redução do tempo de processamento sem comprometer a qualidade da solução final, um artifício interessante pode ser a reinversão da matriz \mathbf{G}_{An}^{-1} a cada x iterações. Isto é, para corrigir eventuais erros numéricos, de x em x iterações o algoritmo ignora o método de modificação de matrizes e calcula \mathbf{G}_{An}^{-1} diretamente, como se estivesse reiniciando a partir do ponto atual o traçado da curva de solução.

4.7.4. O Problema do Ponto de Intercessão de Fronteiras

Sempre que a curva de solução intercepta uma fronteira, continua seu curso na região adjacente. A identificação da região adjacente é inequívoca quando a curva de solução cruza uma fronteira de cada vez, como mostra a Fig. 4-12.

Não obstante, a identificação da próxima região pode apresentar alguma dificuldade no caso da curva de solução atingir um ponto de intercessão de duas ou mais fronteiras, como sugere a Fig. 4-17.

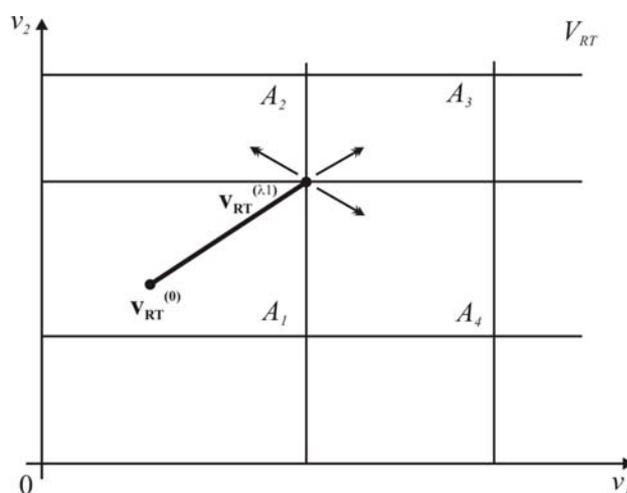


Figura 4-18 - Ponto de intercessão de fronteiras.

Katzenelson [6] afirma que, nesse caso, a próxima região pode ser identificada por um mero procedimento de busca, no qual o algoritmo tenta continuar o traçado da curva em cada uma das regiões adjacentes até lograr resultado positivo.

Observe que, uma vez determinado o segmento que une os pontos $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ e $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ no espaço J_{cs} , a curva de solução está também univocamente determinada no espaço V_{RT} . O algoritmo de Katzenelson limita-se a traçar esta curva em V_{RT} conforme o procedimento acima descrito.

Se, ao tentar identificar a próxima região linear da curva de solução, o algoritmo escolhe a região errada, não poderá prosseguir o traçado da curva nessa região e retornará ao ponto de intercessão de fronteiras até encontrar a região correta.

A probabilidade da curva de solução interceptar um ponto de intercessão de fronteiras é considerada pequena. Contudo, quando tal ocorre, o procedimento de

busca da próxima região pode se tornar muito longo, especialmente para redes muito grandes, em que pode haver pontos de intercessão nos quais incidam muitas fronteiras. Observe que, ao atingir um ponto de intercessão de n fronteiras no espaço V_{RT} , o algoritmo terá que descobrir qual será a próxima região adjacente dentre $2^{(n-1)}$ possibilidades.

Vários autores propuseram métodos para solucionar o problema do ponto de intercessão de fronteiras (freqüentemente referenciado na literatura como “*the corner problem*”) contornando o custoso procedimento de busca da região correta dentre todas as regiões adjacentes.

Chien e Kuh [22] propuseram um método de análise de redes LPP que parte da subdivisão do domínio da função n -dimensional da rede em diversos simplex. A interpolação LPP multidimensional é realizada utilizando os vértices dos simplex. Tal artifício simplifica o processo ultrapassagem de fronteiras pelo algoritmo, que se reduz à substituição de um vértice antigo por um novo vértice no simplex “atual”, isto é, onde se encontra momentaneamente a curva de solução. Não obstante, Chien e Kuh omitiram em seu trabalho o tratamento do ponto de intercessão de fronteiras, admitindo que tal situação muito raramente ocorrerá.

Segundo Vlash [8], experiências em problemas práticos mostram que, mesmo ignorando completamente o problema do ponto de intercessão de fronteiras, o algoritmo é capaz de corrigir-se nas iterações subseqüentes e chegar à solução.

Nesta seção apresentaremos três métodos de solução para o problema do ponto de intercessão de fronteiras: o método de Seitelman-Katzenelson, o método de Kuh-Fujisawa e o Método da Reinicialização.

O Método de Seitelman-Katzenelson

Considere a situação em que a curva de solução, saindo da região A_1 , atingiu um ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$ pertencente às s fronteiras: H_1, H_2, \dots, H_s . O problema consiste em identificar a próxima região que a curva de solução deverá percorrer, sem empregar o método direto de busca em todas as $2^{(s-1)}$ regiões adjacentes.

O método de Seitelman-Katzenelson [4] propõe que o algoritmo dê um pequeno “salto” $\delta \mathbf{v}_{RT}$ sobre as fronteiras:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(sk)} = \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)} + \delta \mathbf{v}_{RT}, \quad (4.48)$$

chegando assim em um novo ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ que satisfaça às seguintes condições:

- $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ está “perto” de $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)}$; e
- $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ está mais perto da solução (em norma) do que o ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)}$.

O algoritmo considera então $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ como sendo um novo ponto de partida e reinicia o algoritmo, calculando $\mathbf{j}_{cs}^{(sk)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{RT}^{(sk)})$, e continuando o traçado da curva de solução a partir de $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$, como sugere a Fig. 4-19.

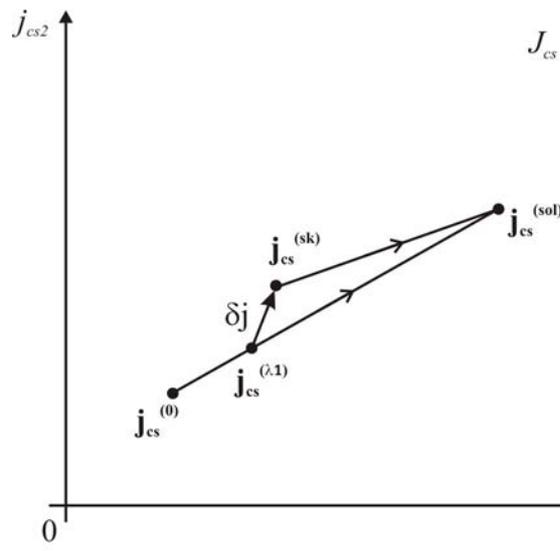


Figura 4-19 - Efeito do salto do método de Seitzman-Katzenelson no espaço J_{cs} .

O novo ponto inicial não requererá uma nova inversão da matriz de condutâncias nodais[6], e poderá continuar o traçado da curva utilizando matrizes Jacobianas inversas. A obtenção da matriz Jacobiana inversa da nova região poderá ser obtida por uma ou mais aplicações sucessivas do método de modificação de matrizes descrito no item 4.7.3.

O novo ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ pode ser calculado como segue:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(sk)} = \mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)} + k \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(\lambda 1)}) \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{j}_{cs}^{(\lambda 1)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)}) \quad (4.50)$$

e k é dado por:

$$k = \frac{\min(k_i)}{\|\mathbf{G}^*\|}. \quad (4.51)$$

A variável k_i representa a menor derivada da curva característica do i -ésimo resistor, e a minimização indicada é feita dentre todos os resistores da rede.

A matriz \mathbf{G}^* é a matriz de condutâncias dos cortes de uma rede linear obtida a partir da rede original pela substituição de cada resistor não linear por uma condutância igual à maior derivada da curva característica do resistor substituído.

Finalmente, $\|\mathbf{G}^*\|$ denota a norma quadrada da matriz \mathbf{G}^* .

O Teorema de Seitzman-Katzenelson [4] afirma que, a equação (4.48), escrita da forma:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(n+1)} = \mathbf{v}_{RT}^{(n)} + k \cdot (\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(n)}), \quad (4.52)$$

onde k é dado por (4.50), converge para a solução da rede independentemente do ponto inicial arbitr7ado. Em outras palavras:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(sol)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{RT}^{(n)} \quad (4.53)$$

Mais ainda, foi provado em [4] que o passo descrito pela equação (4.51) converge de modo a diminuir o erro a cada iteração.

Assim, o uso de (4.51) implica que:

$$\|\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(sk)}\| < \|\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(\lambda 1)}\| \quad (4.54)$$

onde

$$\mathbf{j}_{cs}^{(sk)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}). \quad (4.55)$$

Logo, o novo ponto inicial $\mathbf{v}_{RT}^{(sk)}$ está mais próximo, em norma, da solução $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ do que $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)}$. Desta forma o ponto de intercessão de fronteiras é ultrapassado.

Consideraremos agora a convergência do algoritmo de Katzenelson modificado, incorporando os “saltos” descritos acima sempre que o algoritmo cruzar um ponto de intercessão de fronteiras. Será provado que o algoritmo converge em um número finito de passos.

Dado que (4.48) descreve um processo iterativo convergente, segue que o algoritmo modificado também converge para a solução da rede.

O fato de que a solução é atingida em um número finito de passos será demonstrado da seguinte forma: considere a solução da rede $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ localizada em uma certa região A . Dado que o algoritmo converge, a curva de solução entrará dentro de qualquer vizinhança de $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ em um número finito de passos. Quando a curva de solução estiver dentro de A , a solução é atingida em uma única iteração. Logo, o algoritmo termina em um número finito de passos.

Caso o ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ esteja localizado sobre uma fronteira, a região A é considerada como sendo a união de todas as regiões adjacentes ao ponto, e a demonstração procede da mesma forma.

O Método de Kuh-Fujisawa

Suponha que, em uma certa iteração k , a curva de solução atinja um ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(k)}$ pertencente a ‘ s ’ fronteiras (hiperplanos), H_1, H_2, \dots, H_s .

Queremos encontrar a próxima região onde a curva de solução continua. Como o problema é local em $\mathbf{v}_{RT}^{(k)}$, podemos esquecer as demais fronteiras além de H_1, H_2, \dots, H_s .

A curva de solução será a imagem inversa do segmento que une $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ a $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ no espaço J_{cs} :

$$\Delta \mathbf{j} = \mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)}. \quad (4.56)$$

Seja L uma linha reta com a mesma direção de $\Delta \mathbf{j}$ no espaço J_{cs} . Logo, a imagem inversa de L conterá duas semi-retas, sendo que uma das quais é paralela a

$\mathbf{v}_{RT}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{RT}^{(k)}$ e pertence à mesma região de $\mathbf{v}_{RT}^{(k)}$; e a outra é paralela a $\mathbf{v}_{RT}^{(k)} - \mathbf{v}_{RT}^{(k-1)}$ e pertence à mesma região que $\mathbf{v}_{RT}^{(k-1)}$, como mostra a Fig. 4-16.

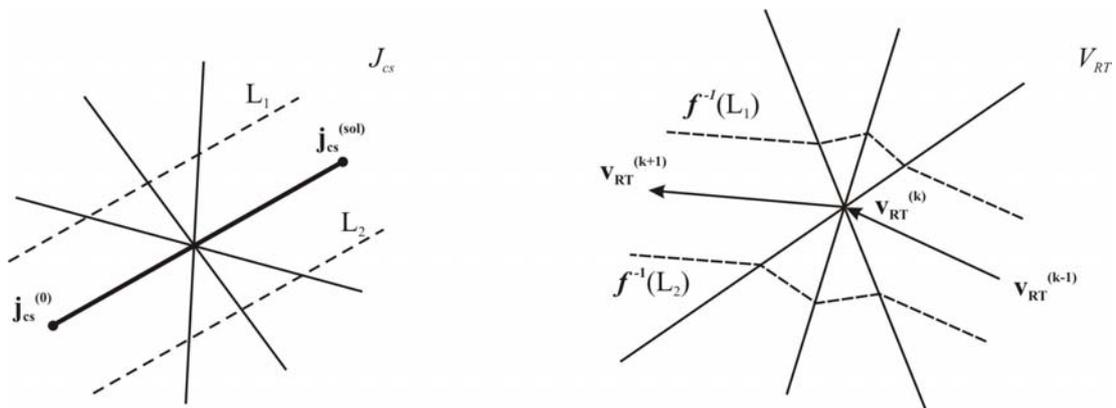


Figura 4-20 - Ilustração do Método de Kuh-Fujisawa.

O método de Kuh-Fujisawa [30] consiste em construir uma linha reta L , cuja imagem inversa cruze uma e somente uma fronteira de cada vez, e, pelo traçado da imagem inversa de L , determinar o próximo vetor $\mathbf{v}_{RT}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{RT}^{(k)}$.

Para a construção de L , seus autores sugerem o processo de perturbação descrito a seguir.

1. Escolha arbitrariamente um ponto $\mathbf{z}_1 \in A_1$, onde $\mathbf{v}_{RT}^{(k-1)} \in A_1$. L será uma reta no espaço J_{cs} que passa pelo ponto $\mathbf{f}(\mathbf{z}_1)$ e orientada com a mesma direção do vetor $\Delta \mathbf{j}$. Traçaremos a imagem inversa de L em A_1 , no espaço V_{RT} , a partir do ponto \mathbf{z}_1 .
2. Note que uma pequena perturbação aplicada a L pode ser encontrada tal que sua imagem inversa atinja uma e somente uma fronteira ao sair da região A_1 . Sejam \mathbf{z}_1^{M1} e L^{M1} \mathbf{z}_1 e L modificados, respectivamente. Assumamos que a imagem inversa de L^{M1} atinja uma fronteira, digamos, H_1 , em um ponto \mathbf{z}_2^{M1} , e entre em uma região A_2 .
3. Traçamos a imagem inversa de L^{M1} na região A_2 a partir do ponto \mathbf{z}_2^{M1} . Se a imagem inversa não atingir nenhuma fronteira, então a região A_2 é aquela procurada, na qual estará a extensão da curva de solução. Caso contrário, uma

pequena perturbação aplicada a L^{M1} pode ser encontrada tal que sua imagem inversa atinja uma e somente uma fronteira de A_2 .

4. Sejam z_2^{M2} e L^{M2} , respectivamente z_1^{M1} e L^{M1} modificados. Assumamos que a imagem inversa de L^{M2} atinja uma e somente uma fronteira, digamos, H_2 no ponto z_3^{M2} , e entre em uma região adjacente A_3 . Observe que a segunda modificação $M2$ deve ser suficientemente pequena, de modo que a imagem inversa de L^{M2} cruze H_1 do mesmo modo que o fazia anteriormente a imagem inversa de L^{M1} . Assim, a imagem inversa de L^{M2} cruzará sucessivamente as fronteiras H_1 e H_2 .
5. Em geral, teremos $z_x^{M(x-1)}$, e $L^{M(x-1)}$, cuja imagem inversa cruza sucessivamente as fronteiras $H_1, H_2, \dots, H_{(x-1)}$. Traçamos a imagem inversa, de $L^{M(x-1)}$ na região $A_{(x)}$ a partir do ponto $z_x^{M(x-1)}$. Se a imagem inversa não atingir nenhuma fronteira, então a região $A_{(x)}$ é a região procurada, e o processo de busca termina. Caso contrário, uma pequena perturbação pode ser achada tal que a imagem inversa de $L^{M(x)}$ atinja uma e somente uma fronteira da região $A_{(x)}$, cruzando sucessivamente $H_1, H_2, \dots, H_{(x-1)}$ da mesma forma que também o fez $L^{M(x-1)}$.
6. O processo não pode continuar indefinidamente, porque o número de regiões é finito. Logo, após um número finito de passos, a região onde estará a continuação da curva de solução é encontrada.

Em síntese, Kuh e Fujisawa afirmam que é possível encontrar um ponto z de modo que a imagem inversa de L não encontre nenhum ponto de intercessão de fronteiras. A região procurada será aquela em que a imagem inversa de L continuar finalmente o seu traçado.

No entanto, os autores não abordaram mais concretamente os aspectos computacionais do método, deixando em aberto o procedimento de obtenção das “pequenas perturbações” descritas anteriormente.

Em nossas implementações computacionais, levando em conta que o cruzamento de um ponto de intercessão de fronteiras é um caso considerado difícil de

ocorrer, propusemos, no método de Kuh-Fujisawa, que o ponto \mathbf{z} fosse calculado a partir de uma modificação de $\mathbf{v}_{RT}^{(k)}$, como segue:

- Calculamos a tensão em todos os resistores da rede, dada por:

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{Q}^t_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix}.$$

- O passo seguinte consiste em identificar, analisando suas curvas características, quais resistores encontram-se sobre pontos de quebra.
- Altera-se a tensão em cada um dos resistores identificados, fazendo sua tensão igual ao valor médio das tensões dos dois pontos de quebra que delimitam sua região atual.
- Recalculamos o novo ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(k)}$ e o utilizamos para prosseguir com o método.

O Método da Reinicialização

Note que ambos os métodos apresentados acima orientam-se à utilização do método de modificação de matrizes para melhorar a performance do algoritmo, o qual, por sua vez, utiliza as matrizes Jacobianas inversas de cada região para o traçado da curva de solução.

Se prescindirmos do método de modificação de matrizes, dado que o algoritmo de Katzenelson converge independentemente do ponto inicial, note que será suficiente, ao atingir um ponto de intercessão de fronteiras, eleger convenientemente um novo ponto e reiniciar o algoritmo.

Este método, que carece de performance em relação à utilização da técnica de modificação de matrizes, soluciona perfeitamente o problema do ponto de interceção de fronteiras, tendo sido utilizado com sucesso em nossas simulações computacionais.

4.8. Performance Computacional

Enunciaremos agora alguns aspectos relacionados ao tempo que o algoritmo de Katzenelson leva para chegar à solução da rede LPP.

Pela natureza do algoritmo, observe que o tempo de processamento requerido será função principalmente de dois fatores:

- Da dimensão da rede simulada;
- Da distância entre o ponto inicial arbitrado e a solução da rede.

O algoritmo possui, para fins de análise de desempenho, três etapas distintas:

- Tempo de início – que corresponde à obtenção das equações da rede e, principalmente, da inversão da matriz Jacobiana inicial;
- O tempo que a curva de solução leva para cruzar uma região de uma fronteira a outra;
- O tempo que a curva de solução leva para chegar à solução, uma vez atingida a fronteira da última região linear.

Experiências com simulações computacionais [6, 8] evidenciaram que a maior parte do tempo de processamento do algoritmo é gasta no processo do cruzamento de fronteiras pela curva de solução. Utilizaremos este fato adiante, ao apresentarmos o método de refinamento hierárquico para solução de redes não lineares, no Capítulo 5.

Naturalmente, o custo computacional envolvido na inversão de matrizes é tanto maior quanto o for a dimensão da rede calculada. Assim, para redes maiores, recobra especial relevância o método de obtenção rápida das matrizes Jacobianas inversas apresentado acima.

4.9. Sumário

Neste capítulo tratamos sobre a teoria das redes resistivas lineares por partes.

Inicialmente definimos resistores LPP e discutimos a obtenção de bipolos lineares equivalentes para regiões da curva característica de um resistor LPP.

Em seguida, fizemos um estudo sobre as principais propriedades das redes resistivas LPP, o mapeamento LPP no R^n e a obtenção de redes resistivas lineares equivalentes para as diversas regiões lineares do mapeamento.

Após esta introdução, desenvolvemos um estudo sobre o algoritmo de Katzenelson para solução de redes resistivas LPP. Destaques especiais foram dados aos aspectos computacionais do algoritmo, tais como: o cálculo de λ , o traçado da curva de solução utilizando matrizes Jacobianas inversas e o método da inversão de matrizes.

Finalmente, estudamos o problema do ponto de intercessão de fronteiras, apresentando dois métodos de solução consagrados na literatura, e enunciamos alguns aspectos de performance computacional do algoritmo de Katzenelson.

Capítulo 5

MÉTODO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO

Neste capítulo apresentaremos o método de Refinamento Hierárquico na solução de redes resistivas não lineares cujos resistores apresentam características monotonicamente crescentes. O método proposto, a cada passo, realiza uma interpolação LPP cada vez mais aproximada das curvas características dos resistores, e resolve a rede LPP resultante pelo algoritmo de Katzenelson. Mostraremos que a solução da rede não linear pode ser obtida através deste processo iterativo com garantia de convergência em um reduzido tempo de processamento.

5.1. Solução de Redes não Lineares Utilizando Aproximações LPP de seus Elementos

No Capítulo 4, foi demonstrado que o algoritmo de Katzenelson converge para a solução de uma rede LPP qualquer em um número finito de passos. O Método de Refinamento Hierárquico, apoiado na robustez do algoritmo de Katzenelson,

obterá a solução da rede não linear resolvendo, sucessivamente, interpolações LPP cada vez mais próximas da rede não linear original.

Como destacaram Fujisawa e Kuh [30], o problema geral da aproximação linear por partes multidimensional de uma rede pode ser decomposto nos diversos problemas unidimensionais das aproximações LPP de cada um de seus elementos.

Assim, podemos obter uma aproximação LPP da rede não linear original, substituindo cada um dos resistores não lineares por um resistor LPP, cuja curva característica é obtida a partir da interpolação LPP da curva característica do resistor original.

A solução da rede LPP será uma solução aproximada da rede não linear. Observe finalmente que a solução aproximada será tão próxima da solução da rede quanto menor for o erro das interpolações LPP de seus resistores. Por esse motivo, faremos a seguir um breve estudo do erro em uma interpolação LPP unidimensional.

5.2. Análise do Erro em uma Interpolação LPP Unidimensional

Seja f uma função cuja primeira derivada seja contínua no intervalo fechado $[x_0, x_1]$. Admite-se ainda que a derivada segunda de f existe para qualquer valor de x pertencente ao intervalo aberto (x_0, x_1) .

A interpolação linear por partes da função f entre os pontos x_0 e x_1 pode ser expressa pela interpolação de Lagrange do primeiro grau $\pi_1 f(\cdot)$:

$$\pi_1 f(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad (5.1)$$

para $x \in [x_0, x_1]$.

Note que, pela definição acima, $\pi_1 f(x_0) = f(x_0)$ e $\pi_1 f(x_1) = f(x_1)$.

Podemos reescrever (5.1) da forma:

$$\pi_1 f(x) = \Phi_0 f(x_0) + \Phi_1 f(x_1) \quad (5.2)$$

onde

$$\Phi_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad \Phi_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \quad (5.3)$$

Antes de prosseguirmos, note que:

$$\Phi_0 + \Phi_1 = 1, \quad (5.4)$$

e que

$$\Phi_0 x_0 + \Phi_1 x_1 = x. \quad (5.5)$$

Logo, temos que:

$$\Phi_0(x_0 - x) + \Phi_1(x_1 - x) = 0. \quad (5.6)$$

Utilizando a expansão da série de Taylor até o primeiro grau, temos:

$$f(x_0) = f(x) + f'(x).(x_0 - x) + \frac{f''(\psi_0).(x_0 - x)^2}{2}, \quad (5.7)$$

onde $x_0 \leq \psi_0 \leq x$.

$$f(x_1) = f(x) + f'(x).(x - x_1) + \frac{f''(\psi_1).(x_1 - x)^2}{2}, \quad (5.8)$$

onde $x \leq \psi_1 \leq x_1$.

Substituindo (5.7) e (5.8) em (5.2), temos:

$$\begin{aligned} \pi_1 f(x) &= [\Phi_0 + \Phi_1].f(x) + [\Phi_0(x_0 - x) + \Phi_1(x_1 - x)]f'(x) \\ &\quad + \frac{\Phi_0.f''(\psi_0).(x_0 - x)^2}{2} + \frac{\Phi_1.f''(\psi_1).(x_1 - x)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Substituindo (5.4) e (5.6) em (5.9) chegamos a:

$$\pi_1 f(x) = f(x) + \frac{\Phi_0.f''(\psi_0).(x_0 - x)^2}{2} + \frac{\Phi_1.f''(\psi_1).(x_1 - x)^2}{2} \quad (5.10)$$

Substituindo agora os valores de Φ_0 e Φ_1 definidos em (5.3), temos:

$$\pi_1 f(x) = f(x) + \frac{f''(\psi_0)}{2} \cdot \frac{(x_0 - x)^2(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} + \frac{f''(\psi_1)}{2} \cdot \frac{(x_1 - x)^2(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (5.11)$$

ou ainda:

$$\pi_1 f(x) = f(x) + \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} \left[\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f'''(\psi_0) + \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right) f'''(\psi_1) \right] \quad (5.12)$$

Pela equação (5.12), encontramos o erro da interpolação linear da função f entre os pontos x_0 e x_1 :

$$\pi_1 f(x) - f(x) = \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} \left[\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) f'''(\psi_0) + \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \right) f'''(\psi_1) \right] \quad (5.13)$$

onde $\psi_0, \psi_1 \in [x_0, x_1]$.

Procuraremos agora um limitante superior para o erro dado pela equação (5.13). Substituindo $f'''(\psi_0)$ e $f'''(\psi_1)$ pelo máximo valor da derivada segunda de f entre x_0 e x_1 , e considerando a norma do erro, obtemos que:

$$\| \pi_1 f(x) - f(x) \| \leq \frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2} \cdot \max_{x_0 \leq x \leq x_1} (\| f'''(x) \|) \quad (5.14)$$

Finalmente, note que o termo $\frac{(x_1 - x)(x - x_0)}{2}$ é uma função quadrática de x , cujo valor máximo é encontrado em $x_{\max} = -\frac{(x_1 + x_0)}{2}$, sendo $y_{\max} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{4}$.

Logo:

$$\| \pi_1 f(x) - f(x) \| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} \cdot \max_{x_0 \leq x \leq x_1} (\| f'''(x) \|) \quad (5.15)$$

para $x_0 \leq x \leq x_1$.

A equação (5.15) fornece um limitante superior do erro introduzido pela interpolação linear por partes de uma determinada função. Analisaremos a seguir algumas características desse erro.

Em primeiro lugar, note que o erro depende do comportamento da função f no intervalo considerado. Para o caso especial em que f é uma função afim, sua derivada segunda será nula, e nulo também será o erro de interpolação. Em geral, o erro será proporcional ao máximo valor da segunda derivada da função dentro de cada intervalo de interpolação.

Por outro lado, destacamos que o erro de interpolação é proporcional ao quadrado da distância entre os pontos x_0 e x_1 . Esse fato recobra especial relevância, pois, de acordo com o valor da segunda derivada de f em um dado intervalo, podemos controlar o passo da interpolação de modo a diminuir o erro da interpolação linear.

Esses dois fatos associados nos permitem distribuir pontos de quebra, sobre a curva característica de um resistor não linear, de tal modo que o erro da interpolação linear seja tão pequeno quanto desejarmos.

5.3. Janela de Interpolação

Pelo que vimos acima, quanto menor for o intervalo entre os pontos de interpolação (ou pontos de quebra) na curva característica de um resistor não linear, mais próxima estará sua interpolação LPP da curva não linear original.

Conseqüentemente, diminuindo o intervalo entre os pontos de interpolação das curvas características dos resistores não lineares de uma rede, aproximamo-nos da solução da rede não linear.

Dado que a escolha dos pontos de interpolação pode ser feita livremente, podemos fazer com que os intervalos entre esses pontos sejam suficientemente pequenos, de modo a obtermos uma solução tão aproximada quanto queiramos.

O primeiro passo do processo de interpolação de um resistor LPP é o estabelecimento de limites dentro dos quais a curva característica de cada resistor não linear será interpolada. Note que tais limites definirão uma *Janela de Interpolação*, que conterà a parte da curva característica compreendida entre o primeiro e o último pontos de quebra do resistor.

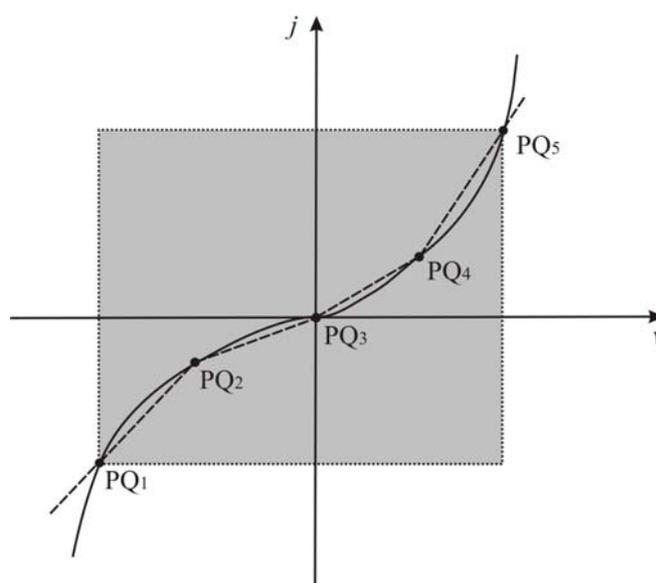


Figura 5-1 - Janela de Interpolação na curva característica de um resistor não linear.

A janela de interpolação deverá ser escolhida de tal modo que contenha todos os possíveis valores de tensão e de corrente nos quais o resistor possa operar enquanto conectado à rede. Assim, note que a janela de interpolação deverá conter o ponto da curva característica do resistor correspondente à solução da rede analisada.

O primeiro problema com o qual nos deparamos é, portanto, a escolha de uma janela de interpolação para cada resistor não linear, de tal sorte que:

- A janela deve ser grande o suficiente para conter a solução;
- A janela deve ser o menor possível, por questões de performance computacional.

Em outras palavras, queremos determinar a priori, antes de resolvermos a rede não linear, limitantes superiores para os valores de tensão e de corrente (em módulo) em cada resistor. Note ainda que, como conhecemos a curva característica monotonicamente crescente de cada resistor não linear, essa janela pode ser expressa pela máxima tensão em que um resistor não linear poderá operar em função das entradas da rede.

Matematicamente, queremos determinar V_{max} , tal que:

$$|v_k| \leq V_{max}. \quad (5.16)$$

Contudo, esta não é uma questão simples, em virtude das características não lineares dos elementos^{††}. Com efeito, Chien e Kuh [22], ao apresentarem o método de subdivisão do espaço n -dimensional em vários simplex para a interpolação linear por partes da função da rede, deixaram em aberto o problema da escolha adequada da janela de interpolação.

Chua [2] apresentou importantes resultados na determinação desses limites, no caso particular em que os resistores não lineares sejam estritamente passivos^{‡‡} e que a rede apresente exclusivamente: ou geradores independentes de tensão ou de geradores independentes de corrente.

Para fins práticos de implementação do Método de Refinamento Hierárquico, optamos por deixar aberta a questão da determinação dos limites da janela de interpolação, arbitrando uma janela suficientemente grande (tipicamente, algumas ordens de grandeza superior aos valores das fontes da rede).

Freqüentemente se pode contar também com o bom senso do usuário na determinação da janela inicial de interpolação. Entretanto, caso a janela inicialmente definida não satisfaça as condições necessárias, o algoritmo poderá automaticamente expandi-la para que esta contenha a solução do sistema.

5.4. Escolha dos Pontos de Quebra

Após a determinação da janela de interpolação, o passo seguinte na interpolação LPP da curva característica de um resistor não linear consiste na escolha dos pontos de quebra.

Como vimos, o erro da interpolação entre dois pontos de quebra será diretamente proporcional à derivada segunda da curva característica nesse intervalo, e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre esses pontos. Logo, a fim de reduzirmos o erro, devemos aumentar o número de pontos de quebra,

^{††} A título de ilustração, note que, nesse caso, não se pode aplicar o teorema da superposição.

^{‡‡} Diz-se que resistor é estritamente passivo sse $v_k \cdot j_k > 0, \forall (v_k, j_k) \neq (0, 0)$.

principalmente nas regiões da curva característica que apresentarem maiores valores na segunda derivada.

Graficamente, significa que necessitaremos de um maior número de pontos de quebra nas regiões de maior curvatura da curva característica. Por exemplo, na curva característica do diodo da Fig. 5-2, serão necessários mais pontos de quebra no joelho do que nos extremos da curva a fim de reduzirmos o erro de interpolação.

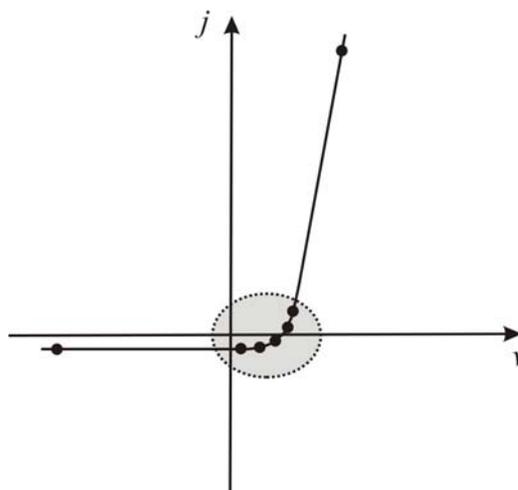


Figura 5-2 - Distribuição dos pontos de quebra em função da segunda derivada da curva característica.

No entanto, a estratégia de concentrar pontos de quebra em função dos valores da derivada segunda da curva característica apresenta inconvenientes computacionais.

Em primeiro lugar, destacamos o custo do cálculo da derivada segunda para todos os resistores da rede.

E depois, com a concentração dos pontos de quebra ao longo da curva em função de sua derivada segunda, teremos aumentado sensivelmente o custo computacional da identificação das regiões lineares, requerida pelo algoritmo de Katzenelson. Para visualizar este fato, observe que, com pontos de quebra uniformemente distribuídos ao longo da curva, a identificação da região linear pode ser facilmente concluída em função da tensão de operação do resistor. Por outro lado, se os pontos de quebra não estão igualmente espaçados (como no caso, dispostos em

função da derivada segunda da curva), a região linear de operação só poderá ser identificada por um procedimento de busca em um laço de repetição.

A solução prática adotada consiste na escolha de um determinado número de pontos de quebra, uniformemente distribuídos sobre a curva característica dentro da janela de interpolação como ilustra a Fig. 5-3.

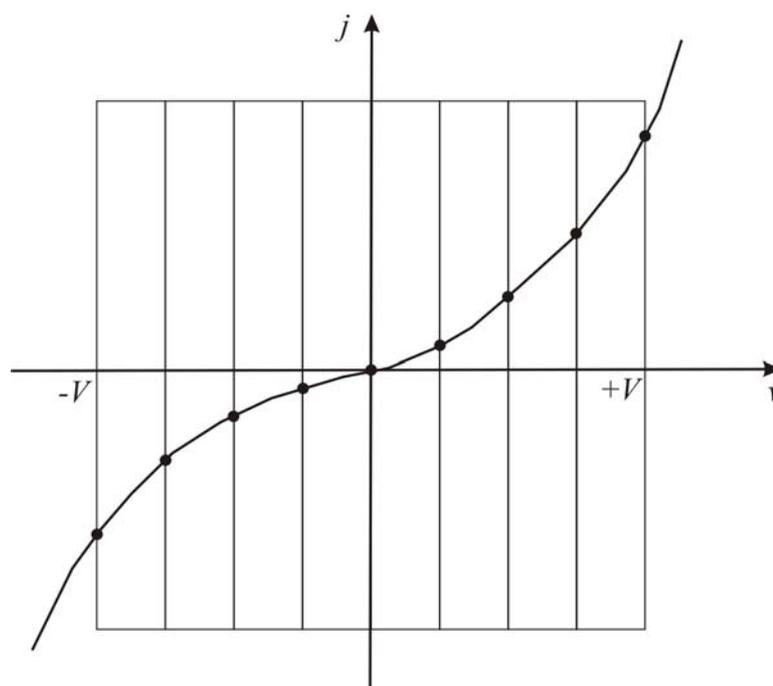


Figura 5-3 - Distribuição uniforme dos pontos de quebra na curva característica.

5.5. O Algoritmo de Refinamento Hierárquico

Até o momento dissemos que a escolha da janela de interpolação será arbitrariamente grande, e que os pontos de quebra deverão ser distribuídos uniformemente ao longo desse intervalo.

Logo, a fim de obtermos uma solução satisfatória da rede não linear, bastaria escolher para cada resistor um número suficiente de pontos de quebra, tal que o erro de interpolação fosse mínimo.

Mais uma vez, encontramos aqui uma limitação computacional. Note que se a janela de interpolação é muito grande, e se necessitamos de uma distância entre

pontos muito pequena, necessariamente teremos um número de pontos de quebra muito elevado.

Computacionalmente, trabalhar com vetores de dimensões muito grandes pode acarretar uma perda de performance, em decorrência da paginação de memória requerida para armazenar esta grande quantidade de dados.

Por exemplo, suponha que uma rede possua 20 resistores não lineares, cujas curvas características serão interpoladas em uma janela de -100 a 100 volts. Façamos a distância entre os pontos de quebra igual a 1mV . Teremos assim 200.000 pontos para cada resistor, o que nos dá um total de 4 milhões de pontos de quebra para a interpolação LPP de todos os resistores da rede.

Se cada ponto for representado por uma variável real de ponto flutuante de 16 bytes (por exemplo, um tipo *float* na linguagem C), necessitaremos de aproximadamente 64 Gb de memória para representar a aproximação LPP dos resistores da rede!

Além da grande quantidade de memória requerida em função do elevado número de pontos de quebra, há ainda outro problema, inerente à aplicação direta do algoritmo de Katzenelson neste caso. Como foi visto, o tempo gasto pelo algoritmo para traçar a curva de solução depende essencialmente do número de fronteiras cruzadas desde o ponto inicial até a solução.

Considere novamente o exemplo anterior. Suponha que a tensão de operação de um determinado resistor seja de 20 volts. Partindo de uma tensão nula, note que a curva de solução terá que cruzar 20 mil fronteiras até chegar à tensão de operação desse resistor, sem mencionar todas as fronteiras cruzadas devido aos demais resistores.

Concluímos assim que a solução da rede por esse processo, embora seja matematicamente precisa, é computacionalmente inviável.

Para resolver esta dificuldade, introduzimos o Método de Refinamento Hierárquico, idealizado originalmente pelo Prof. Flávio Cipparrone, e que será descrito a seguir.

A idéia básica do método consiste em obter inicialmente aproximações grosseiras da solução da rede não linear, e seguir refinando tais resultados até que a solução da rede seja obtida dentro dos limites de tolerância do erro.

O processo de refinamento consiste inicialmente em interpolar os resistores com poucos pontos de quebra dentro da janela de interpolação, e, após a solução da rede LPP obtida, seguir adicionando pontos de quebra às curvas características nas proximidades das tensões de operação calculadas para cada resistor. O processo continua iterativamente até que um critério de parada seja satisfeito. A Fig. 5-4 ilustra o refinamento da interpolação LPP através da adição de pontos de quebra na região linear da solução anterior.

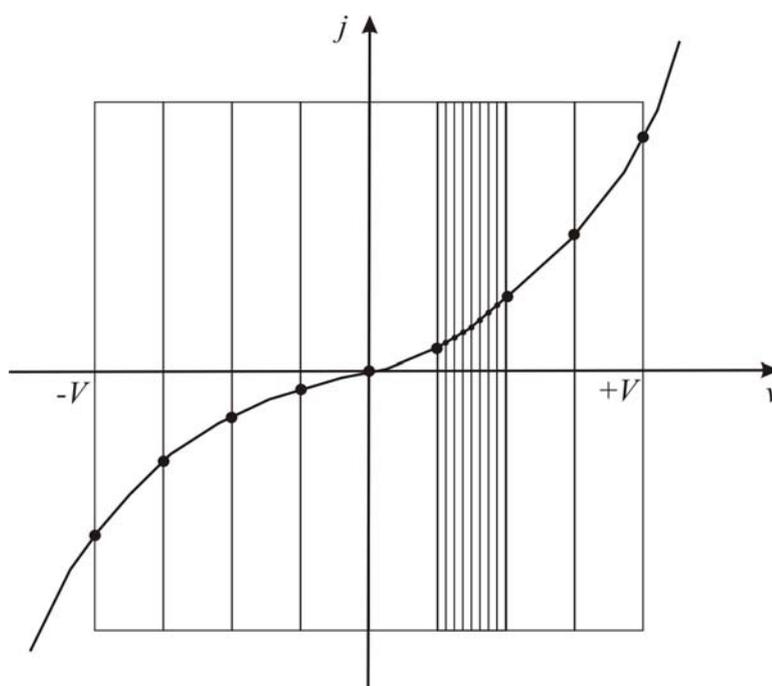


Figura 5-4 - Refinamento da interpolação LPP na curva característica de um resistor.

A eficácia computacional se deve ao fato de que, pelo método detalhado a seguir, haverá um reduzido número de pontos de quebra, e, sobretudo, um reduzido número de fronteiras cruzadas até que se encontre a solução.

Em primeiro lugar, note que a solução aproximada obtida na primeira interpolação LPP (com poucos pontos de quebra), aproxima-se, ainda que

grosseiramente, da solução da rede não linear. Em decorrência do pequeno número de pontos de quebra, esta solução é obtida cruzando poucas fronteiras.

Na iteração seguinte, aproveitamos a solução aproximada da rede e refinamos a interpolação LPP de cada resistor, adicionando pontos de quebra apenas em torno das tensões calculadas para esses elementos. Assim, o refinamento se dá, não em toda a extensão da janela de interpolação inicial, mas apenas nas proximidades da solução final da rede.

Por este artifício, contornamos os percalços computacionais mencionados, reduzindo sensivelmente o número de pontos de quebra e o número de fronteiras ultrapassadas pela curva de solução.

5.6. Critérios de Parada

Seguindo a proposta de Nagel [33], podemos adotar dois critérios de parada para o algoritmo:

$$\text{Num Iterações} = \text{Num Max Iterações} \quad (5.17)$$

e

$$\left\| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right\| < \varepsilon_a \quad (5.18)$$

onde ε_a é a tolerância absoluta arbitrada. O critério (5.18) pode ainda ser substituído pelo seguinte:

$$\left\| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right\| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min \left(\left| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} \right|, \left| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right| \right) \quad (5.19)$$

onde ε_a e ε_r são, respectivamente, a tolerância absoluta e a tolerância relativa^{§§}. No caso da formulação nodal modificada, o vetor de variáveis da rede \mathbf{v}_{RT} é substituído pelo vetor \mathbf{x} .

Os critérios (5.17) e (5.19) são adotados pelo programa SPICE. No entanto, Nagel mostrou que o critério (5.19) pode ser satisfeito sem que as correntes

^{§§} O programa SPICE2 adota $\varepsilon_r = 0,001$ para a tolerância relativa, e $\varepsilon_a = 1\mu\text{V}$ para tensões, e $\varepsilon_a = 1\text{pA}$ para correntes.

calculadas pelas relações constitutivas não lineares ($i = g(v)$) satisfaçam acuradamente a PLK.

A fim de contornar o problema, para as não linearidades controladas por tensão, a versão 2 do SPICE adotou o seguinte critério suplementar de convergência:

$$\left| i^{k+1} - g(v^{k+1}) \right| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min\left(\left| i^{k+1} \right|, \left| g(v^{k+1}) \right|\right) \quad (5.20)$$

Alternativamente, propomos o seguinte método para verificar se a solução da última interpolação LPP satisfaz, simultaneamente e dentro de uma certa tolerância, as Leis de Kirchhoff e as relações constitutivas da rede não linear.

Adotando a formulação alternativa da análise de cortes, temos que, para uma rede não linear genérica:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \Gamma_{nl} \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT}^* \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Q}_{T(R),L(I)} \mathbf{j}_J = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

onde \mathbf{v}_{RT}^* denota a solução do sistema, e Γ_{nl} denota o operador não linear dos resistores.

Observe que a equação (5.21) é a expressão da PLK aplicada aos cortes fundamentais resistivos da rede. Note ainda que, nesta mesma equação, estão implícitas a SLK:

$$\mathbf{v}_R = \mathbf{Q}_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

e as relações constitutivas dos resistores não lineares:

$$\mathbf{j}_R = \Gamma_{nl}(\mathbf{v}_R). \quad (5.23)$$

Definamos agora a função vetorial:

$$\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) = \mathbf{Q}_{T(R),R} \Gamma_{nl} \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Q}_{T(R),L(I)} \mathbf{j}_J. \quad (5.24)$$

Note que, à medida que \mathbf{v}_{RT} aproxima-se de \mathbf{v}_{RT}^* , a função $\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT})$ tenderá para o vetor $\mathbf{0}$, isto é:

$$\lim_{\mathbf{v}_{RT} \rightarrow \mathbf{v}_{RT}^*} \mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (5.25)$$

Dado que a rede possui uma única solução, a equação (5.25) pode ser usada para aferir uma solução aproximada da rede. Assim, podemos estabelecer como primeiro critério de parada do algoritmo:

$$\|\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT})\| < \delta \quad (5.26)$$

onde δ é um número suficientemente pequeno.

Propriedade da imanência da curva de solução na próxima região linear a ser refinada.

5.7. Redefinição da Janela de Interpolação

No item 5.5 estudamos a viabilidade computacional do método de refinamento, que adiciona gradativamente pontos de quebra às curvas características dos resistores nas proximidades da solução.

No entanto, conforme o item 5.4, estabelecemos que os pontos de quebra de cada resistor deverão ser uniformemente distribuídos dentro da janela de interpolação.

Para satisfazer estes dois requisitos, introduziremos, a cada iteração do Método de Refinamento Hierárquico, uma redefinição da janela de interpolação, explicada a seguir.

Considere a primeira iteração do algoritmo de Refinamento Hierárquico, com a primeira interpolação LPP dos resistores. Observe que o algoritmo de Katzenelson converge para a solução da rede LPP em um número finito de iterações.

Seja A a última região atingida pela curva de solução, onde se situa a solução da rede LPP, como mostra a Fig. 5-5.

Pelo conhecido teorema da análise funcional [34], sabemos que se um mapeamento é contínuo, a imagem de um conjunto compacto no domínio será também um conjunto compacto no contradomínio.

Note agora que A é um conjunto compacto, já que é limitado e que contém as suas fronteiras. Logo, como o mapeamento é contínuo, sua imagem no espaço J_{cs} será um conjunto compacto A' , cujas fronteiras serão imagens das fronteiras de A .

Note que, sempre que a curva de solução cruzar uma fronteira de A , sua imagem cruzará uma fronteira de A' no espaço J_{cs} .

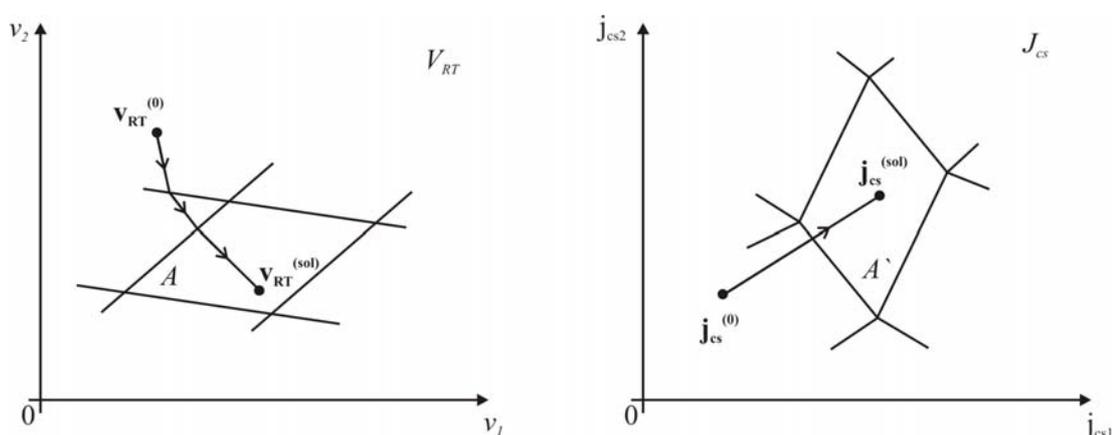


Figura 5-5 - Solução da primeira iteração do Método de Refinamento Hierárquico.

Supondo que a solução desta primeira rede LPP não tenha satisfeito o critério de parada, o algoritmo prosseguirá com o refinamento, como mostra a Fig. 5-6.

O processo de refinamento adicionará novos pontos de quebra à última região atingida na curva característica de cada resistor. Como efeito produzido no espaço V_{RT} , a região A será cortada por vários hiperplanos paralelos às suas fronteiras, como mostra a Fig. 5-6.

Note ainda que as fronteiras da região A permanecem sendo as mesmas neste processo de refinamento, já que, ao adicionar pontos de quebra nas regiões lineares dos resistores, mantivemos os pontos de quebra que delimitavam a região original.

Observe que as imagens dos novos hiperplanos interiores a A serão também mapeadas no interior de A' , como mostra a Fig. 5-6.

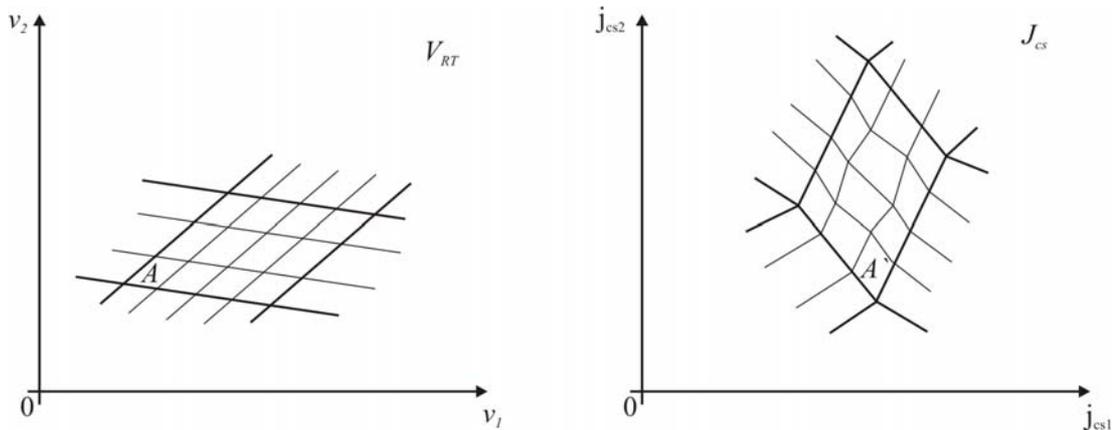


Figura 5-6 - Refinamento: subdivisão da região A .

O próximo passo será resolver esta a nova rede LPP, considerando como o novo ponto de partida a solução da rede LPP obtida na iteração anterior.

$$\mathbf{v}_{RT}^{(0)} \text{ da próxima iteração} = \mathbf{v}_{RT}^{(\text{sol})} \text{ da iteração anterior.} \quad (5.27)$$

Observe que o ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(\text{sol})}$ é determinado apenas pelas fontes de corrente e pela matriz fundamental de cortes da rede:

$$\mathbf{j}_{cs}^{(\text{sol})} = \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \cdot \mathbf{j}_J. \quad (5.28)$$

Sendo função exclusivamente da topologia e do valor das fontes da rede, note que o ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(\text{sol})}$ não será alterado ao realizarmos a nova interpolação LPP. $\mathbf{j}_{cs}^{(\text{sol})}$ permanecerá assim interior à região A' , como mostra a Fig. 5-7.

Como a região A' é mapeada pelo homeomorfismo f na região A , concluímos que a nova solução $\mathbf{v}_{RT}^{(\text{sol})}$ da nova rede LPP permanecerá interior à região A no espaço V_{RT} .

Fazendo $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ da nova iteração igual à solução obtida na iteração anterior (veja Fig. 5-5 e 5-7), podemos calcular sua imagem $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ no espaço J_{cs} .

Entretanto, sendo $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ um ponto interior à região A , e como a região A é mapeada pelo homeomorfismo f na região A' , note que $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$ será também um ponto interior à região A' .

Veja que o novo segmento $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(\text{sol})})$ está inteiramente contido na região A' , como mostra a Fig. 5-7. Isso implica que, na segunda iteração do Método de

Refinamento Hierárquico, a curva de solução estará também inteiramente contida na região A , como mostra a Fig. 5-7.

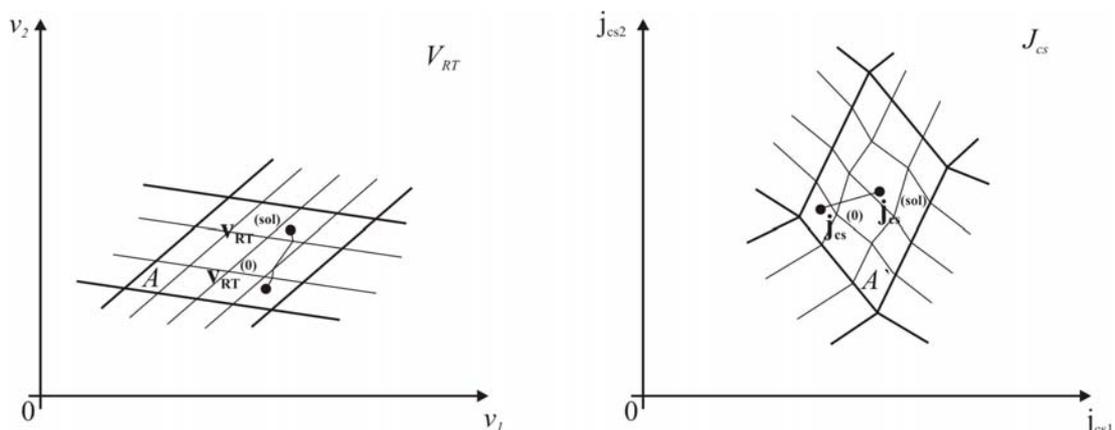


Figura 5-7 - Segunda iteração do Método de Refinamento Hierárquico.

Assim, note que a curva de solução da rede refinada será traçada inteiramente dentro da região na qual foi encontrada a solução da rede LPP anterior.

Trata-se, portanto, de uma propriedade segundo a qual se verifica da imanência da curva de solução na próxima região linear a ser refinada.

Trata-se de uma importante conclusão, pois, com base nesse resultado, poderemos fazer o refinamento da interpolação LPP exclusivamente na última região atingida pela curva de solução.

Logo, a janela de interpolação pode ser redefinida para cada resistor como sendo igual aos limites da última região linear atingida pelo algoritmo.

Note ainda que, caso a solução da última rede LPP esteja sobre uma fronteira entre duas regiões lineares, podemos considerar a união destas duas regiões como sendo a última região atingida, e aplicar este mesmo processo de refinamento.

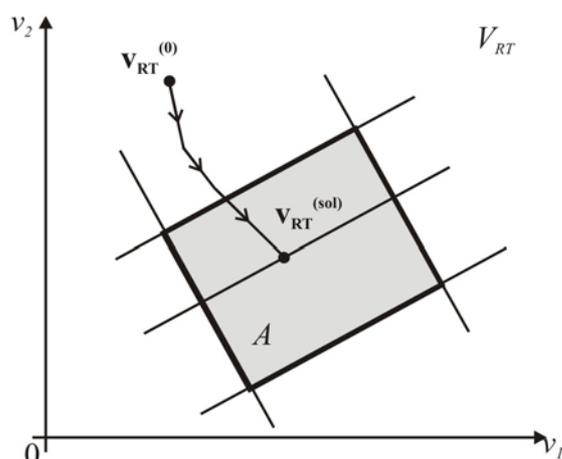


Figura 5-8 - Janela de interpolação no caso da solução estar sobre uma fronteira.

5.8. Convergência do Método

Com base no processo descrito nos itens anteriores, analisaremos agora a convergência do proposto Método de Refinamento Hierárquico.

Em primeiro lugar, note que toda interpolação LPP de uma curva característica monotonicamente crescente na qual $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} j = \pm\infty$ será também monotonicamente crescente e satisfará a condição: $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} j = \pm\infty$.

Logo, pelo Teorema Fundamental das Redes Resistivas, qualquer aproximação LPP da rede não linear em questão terá também uma única solução, que poderá ser encontrada em um número finito de passos pelo algoritmo de Katzenelson.

A cada iteração do Método de Refinamento Hierárquico, conforme o item 5.7, identificamos no espaço J_{cs} uma região cada vez menor em torno do ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$.

Como a cada refinamento diminui a distância entre os pontos de quebra em cada resistor, o erro de interpolação LPP dos resistores diminuirá a cada iteração, conforme as conclusões do item 5.2.

Diminuindo o erro de interpolação LPP de cada resistor, as redes LPP aproximar-se-ão cada vez mais da rede não linear em torno da solução procurada.

Desta forma, a solução da rede LPP convergirá para a solução da rede não linear.

O método iterativo prossegue, até que a solução da k -ésima rede LPP satisfaça, dentro de uma margem de erro aceitável, as Leis de Kirchhoff e as relações constitutivas da rede não linear original.

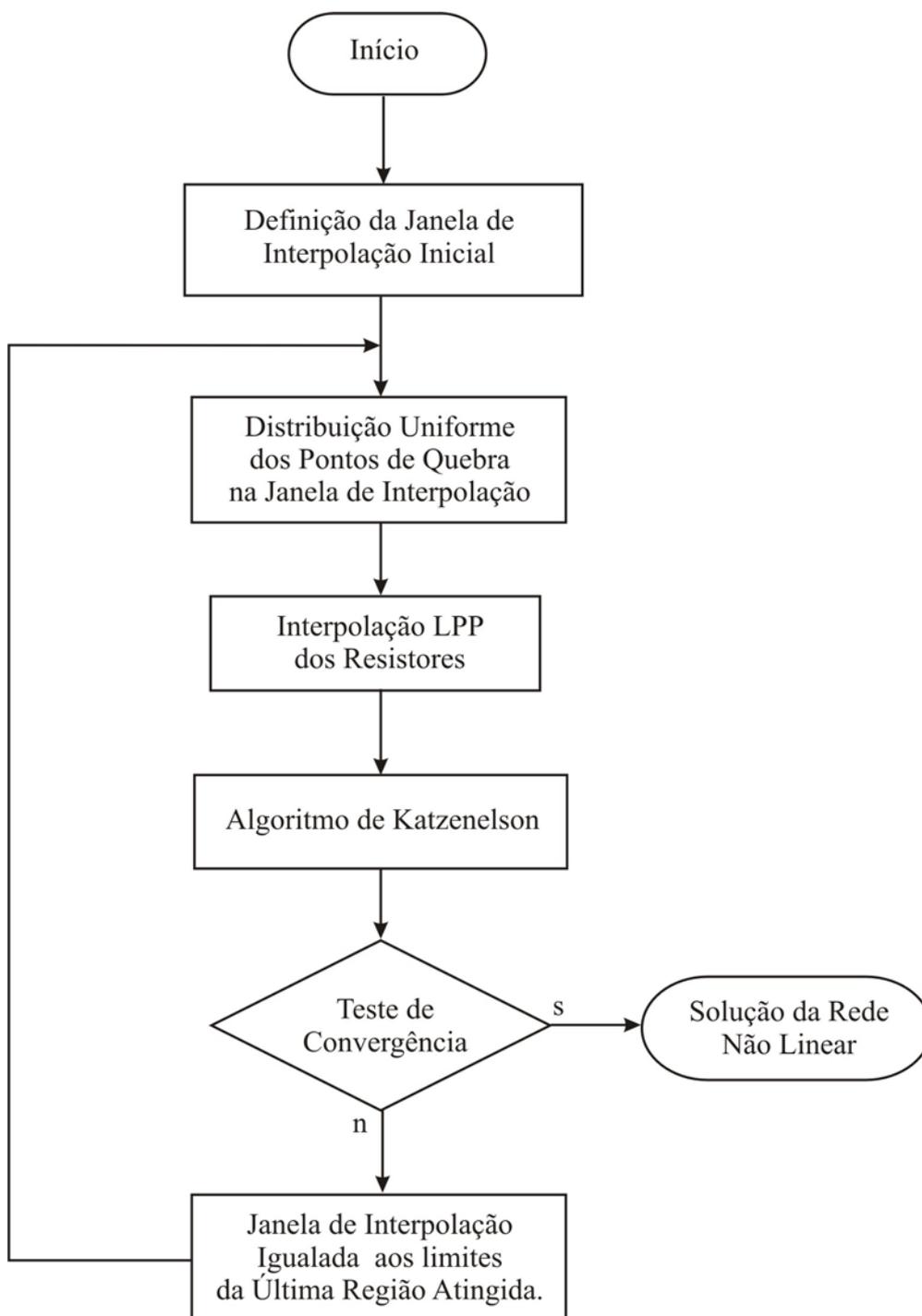


Figura 5-9 - Fluxograma do Método de Refinamento Hierárquico

5.9. Considerações Sobre o Método Proposto

No nosso entender, a principal vantagem do Método de Refinamento Hierárquico está na sua capacidade de obtenção da solução de uma rede não linear com garantia de convergência, com reduzido custo computacional.

A viabilidade do método se deu graças à estratégia de redefinir a janela de interpolação igualando-a à última região atingida na solução do refinamento anterior.

Além do mais, note que a qualquer momento o algoritmo pode ser interrompido de modo a obtermos uma solução aproximada da rede não linear analisada.

Em comparação com o tradicional método de Newton, observamos como vantagens principais: a garantia de convergência e a possibilidade de obtermos soluções aproximadas da rede não linear com um relativamente pequeno custo computacional.

5.10. Sumário

Neste capítulo descrevemos o Método de Refinamento Hierárquico aplicado a solução de redes não lineares. O método baseia-se na interpolação LPP da rede não linear seguida da solução da rede aproximada pelo algoritmo de Katzenelson.

Inicialmente foi feita uma análise do erro em interpolações LPP unidimensionais. Definimos a Janela de Interpolação, e advogamos a favor da distribuição uniforme dos pontos de quebra dentro da mesma.

Para chegar à solução da rede não linear, foi proposto o método de refinamento com base na redefinição da Janela de Interpolação.

Um dos critérios de convergência adotado foi a própria aplicação das Leis de Kirchhoff e das relações constitutivas dos resistores não lineares, conforme a equação (5.26).

Finalmente, demonstramos que o método proposto converge para a solução da rede não linear.

Capítulo 6

SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Neste capítulo apresentaremos simulações computacionais dos métodos e algoritmos discutidos nos capítulos anteriores. Inicialmente, compararemos a solução de redes lineares pela formulação de cortes e pela formulação da análise nodal modificada. Em seguida, mostraremos a aplicação do algoritmo de Katzenelson na solução aproximada de redes não lineares. Finalmente, apresentaremos o Método de Refinamento Hierárquico aplicado à solução de redes não lineares.

6.1. Introdução

As simulações para realização dos testes de desempenho dos algoritmos aqui descritos foram programadas em Matlab 6 e processadas em um Pentium4® com clock de 2.4 GHz e 512Mb de memória RAM. O sistema operacional utilizado foi o Microsoft Windows XP Professional, Versão 2002.

O objetivo primordial das simulações realizadas foi verificar a viabilidade de utilização dos algoritmos propostos neste trabalho como métodos de solução das redes resistivas não lineares que temos estudado.

A entrada de dados para os algoritmos foi feita através de uma matriz de b linhas por 5 colunas, onde b é o número de elementos da rede analisada. Admite-se que todos os nós e todos os ramos da rede estejam previamente numerados. Cada linha da matriz descreve um ramo do circuito e possui as seguintes colunas:

$$[\text{id} \quad \text{typ} \quad \text{Ni} \quad \text{Nf} \quad \text{Valor}] \quad (6.1)$$

onde:

- id é o número do ramo;
- typ é uma constante que determina o tipo do ramo (resistor, gerador independente de corrente ou gerador independente de tensão);
- Ni é o número do nó inicial do ramo;
- Nf é o número do nó final do ramo;
- Valor do elemento.

Os nós inicial e final de todos os ramos são identificados de acordo com a convenção do receptor, explicitada na Fig. 6-1. O nó de referência da rede deve ser identificado pelo número 0.

Convencionamos ainda que um ramo resistivo será identificado por $\text{typ} = 0$, e que os ramos dos geradores independentes de tensão e de corrente serão caracterizados por $\text{typ} = 1$ e $\text{typ} = 2$, respectivamente.

O Valor do elemento adquirirá seu significado em função do tipo do ramo especificado. No caso dos geradores independentes, o valor do ramo corresponde à tensão elétrica em Volts ou à corrente elétrica em Ampères. Para resistores lineares, o valor indicado é o da sua condutância em Siemens, o qual deverá ser sempre maior que zero.

Convencionaremos finalmente na matriz de entrada dos dados que, para os ramos resistivos, um Valor = -1 significa resistor não linear, e um Valor = -2 significa resistor LPP. No caso dos resistores não lineares ou dos resistores LPP, suas funções características deverão ser definidas para o algoritmo de solução.

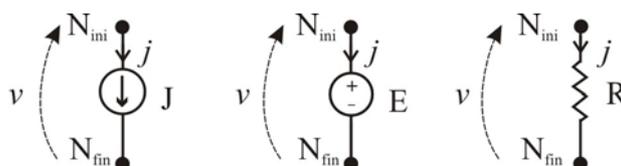


Figura 6-1- Convenção do receptor adotada para todos os ramos.

6.2. Solução de Circuitos Lineares

Consideraremos o circuito representado na Fig. 6-2. As fontes de corrente são de 0,1 A, e a fonte de tensão possui 10V. Atribuímos ainda todos os resistores resistências de 1 k Ω .

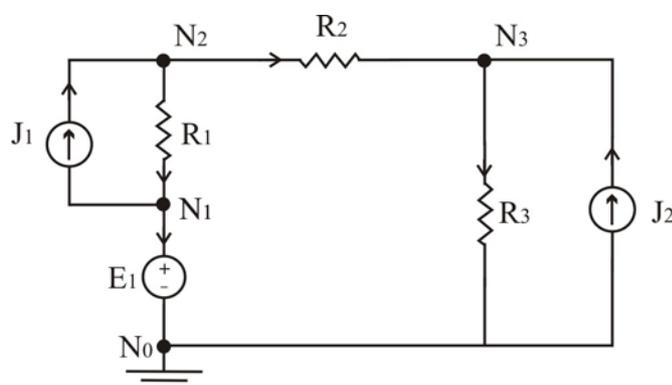


Figura 6-2 – Circuito Linear.

A matriz de entrada de dados da rede será:

```

NL = [1 E 1 0 10      ;
      2 R 2 1 0.001  ;
      3 J 1 2 0.1     ;
      4 R 2 3 0.001  ;
      5 R 3 0 0.001  ;
      6 J 0 3 0.1 ] ;

```

Figura 6-3 - Matriz de entrada de dados do circuito.

Para ilustrarmos os dois métodos descritos no Capítulo 3, solucionaremos o circuito utilizando dois algoritmos distintos. O primeiro deles obtém a formulação da rede pelo método da análise de cortes, e o segundo, pelo método da análise nodal modificada.

A solução do circuito pela análise de cortes é mostrada na Fig. 6-4.

```

>> solver(NL)
-----
Solução pela Análise dos Conjuntos de Corte
Tempo de Inicialização    =0.046s
Tempo de Processamento   =0.016s
Tempo de Total            =0.062s

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi)'      'I(Ni->Nf)'
      [ 1]      'E'        [ 1]      [ 0]      [      10]      [ -0.0033]
      [ 2]      'R'        [ 2]      [ 1]      [ 96.6667]      [  0.0967]
      [ 3]      'J'        [ 1]      [ 2]      [-96.6667]      [  0.1000]
      [ 4]      'R'        [ 2]      [ 3]      [  3.3333]      [  0.0033]
      [ 5]      'R'        [ 3]      [ 0]      [103.3333]      [  0.1033]
      [ 6]      'J'        [ 0]      [ 3]      [-103.3333]      [  0.1000]

```

Figura 6-4 - Solução da rede pela análise de cortes.

O primeiro passo do algoritmo na solução pelo método da análise de cortes foi encontrar uma árvore da rede que contivesse todas as fontes de tensão do sistema sem conter nenhuma fonte de corrente. Com algum processamento, o algoritmo obteve uma árvore composta pelos ramos 1, 2 e 4 da rede, que correspondem aos ramos E_1 , R_1 e R_2 .

A partir desta árvore, o algoritmo obteve a correspondente matriz fundamental de cortes da rede, e resolveu o sistema linear para as tensões nos ramos 2 e 4, de acordo com a formulação descrita no Capítulo 3. Finalmente, as tensões e correntes em todos os ramos da rede foram obtidas através da aplicação das Leis de Kirchhoff ao restante do circuito.

Comparativamente, observe agora, na Fig. 6-5, a solução do mesmo circuito utilizando a análise nodal modificada.

```
>> solver(NL)
-----
Soluçao pela Analise Nodal Modificada
Tempo de Inicialização      =0s
Tempo de Processamento     =0.015s
Tempo de Total              =0.015s

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi)'      'I(Ni->Nf)'
    [ 1]      'E'      [ 1]      [ 0]      [      10]      [ -0.0033]
    [ 2]      'R'      [ 2]      [ 1]      [ 96.6667]      [  0.0967]
    [ 3]      'J'      [ 1]      [ 2]      [-96.6667]      [  0.1000]
    [ 4]      'R'      [ 2]      [ 3]      [  3.3333]      [  0.0033]
    [ 5]      'R'      [ 3]      [ 0]      [103.3333]      [  0.1033]
    [ 6]      'J'      [ 0]      [ 3]      [-103.3333]      [  0.1000]
```

Figura 6-5 - Solução da rede pela Análise Nodal Modificada.

Como não poderia deixar de ser, a solução obtida pelo método da análise nodal modificada é a mesma. Entretanto, note que o tempo de solução pela análise nodal modificada é cerca de quatro vezes menor que o tempo de solução pela análise de cortes.

Um olhar mais cuidadoso revela que a sobrecarga do algoritmo de solução pela análise de cortes está no tempo de inicialização, que compreende a busca de uma árvore com as características requeridas. Dado que tal árvore deverá conter todas as fontes de tensão do circuito, o tempo de busca desta árvore será tanto maior quanto maior for número de geradores de tensão presentes no sistema.

De resto, note finalmente que o tempo de processamento (que corresponde à solução do sistema linear), não difere substancialmente de um método para outro.

6.3. Algoritmo de Katzenelson

6.3.1. Exemplo 1

Para ilustrarmos a aplicação do algoritmo de Katzenelson, consideraremos o novamente o circuito do exemplo anterior, substituindo os resistores lineares por resistores LPP. As fontes de corrente continuam sendo de 0,1 A, e a fonte de tensão possui 10V.

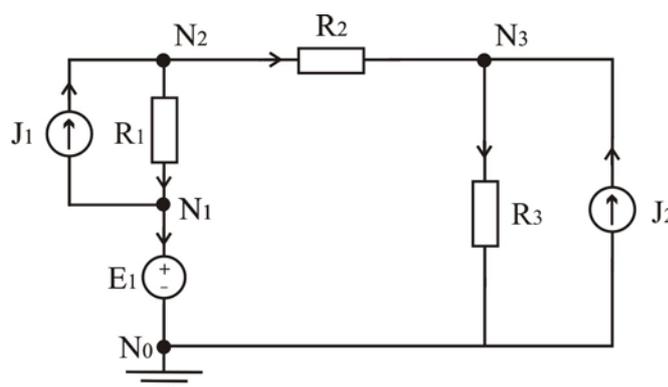


Figura 6-6 - Circuito LPP.

A nova matriz de entrada de dados será:

```

NL = [1 E 1 0 10      ;
      2 R 2 1 -2      ;
      3 J 1 2 0.1     ;
      4 R 2 3 -2      ;
      5 R 3 0 -2      ;
      6 J 0 3 0.1 ] ;

```

Figura 6-7 - Matriz de entrada de dados para o circuito LPP.

Por simplicidade, façamos a curva característica LPP dos resistores igual a uma interpolação LPP dos resistores lineares de $1\text{ k}\Omega$ utilizados no exemplo anterior. Cada resistor possuirá 5 pontos de quebra uniformemente distribuídos entre -120 V e $+120\text{ V}$, como mostra a Fig. 6-8.

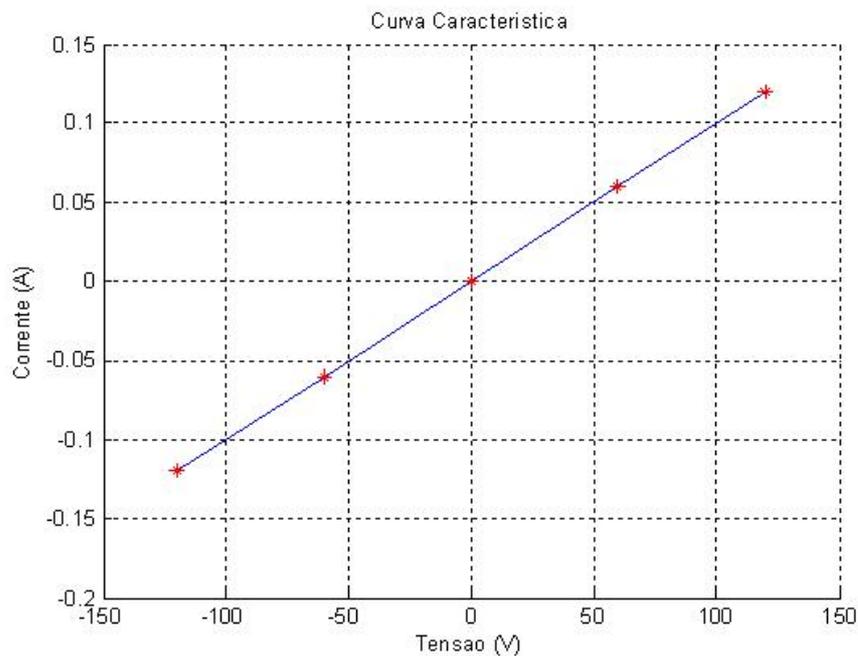


Figura 6-8 - Curva característica LPP dos resistores da rede. Os pontos de quebra são representados como estrelas.

Na solução pela análise de cortes, dada a árvore constituída pelos ramos 1, 2 e 4, as variáveis da rede serão as tensões nos ramos resistivos da árvore, isto é:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

De acordo com o procedimento descrito no Capítulo 4, podemos traçar o lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores no espaço \mathbf{V}_{RT} , como mostra a Fig. 6-9.

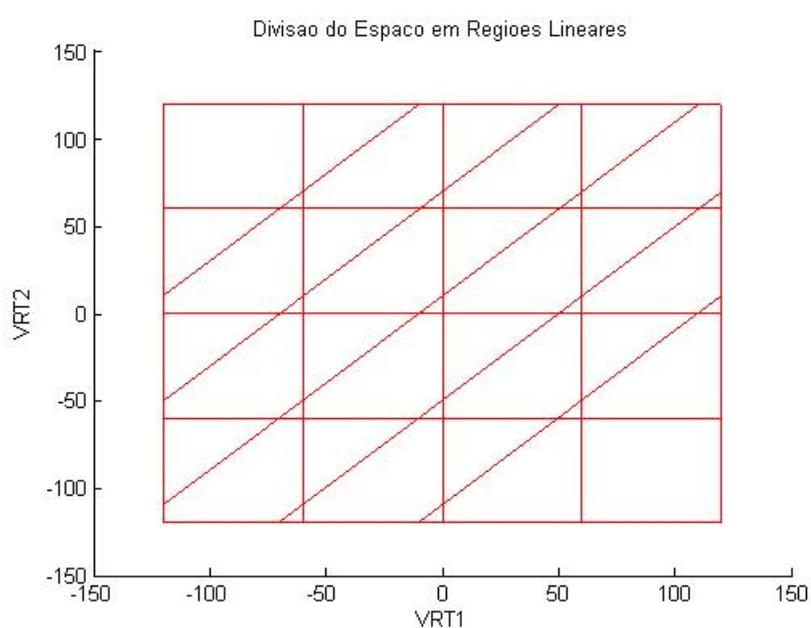


Figura 6-9 – Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP.

Façamos o ponto inicial igual a:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} -50 \\ 50 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

A partir destas condições, o algoritmo de Katzenelson nos retorna o resultado mostrado na Fig. 6-10.

```

>> solver(NL)

-----
Solucao pela Analise dos Conjuntos de Corte
Tempo de Inicialização      =0.078s
Tempo de Processamento     =0.016s
Tempo de Total              =0.094s
Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =6

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi)'      'I(Ni->Nf)'
[ 1]      'E'      [ 1]      [ 0]      [      10]      [ -0.0033]
[ 2]      'R'      [ 2]      [ 1]      [ 96.6667]      [  0.0967]
[ 3]      'J'      [ 1]      [ 2]      [-96.6667]      [  0.1000]
[ 4]      'R'      [ 2]      [ 3]      [  3.3333]      [  0.0033]
[ 5]      'R'      [ 3]      [ 0]      [103.3333]      [  0.1033]
[ 6]      'J'      [ 0]      [ 3]      [-103.3333]      [  0.1000]

```

Figura 6-10 – Resultado retornado pelo algoritmo de Katzenelson.

Observe que o algoritmo convergiu em 6 iterações, tendo cruzado um total de 5 fronteiras até a solução. Naturalmente, a solução é a mesma obtida no exemplo anterior, no qual as variáveis da rede adquirem os valores:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 96.6667 \\ 3.3333 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

A Fig. 6-11 mostra a curva de solução descrita pelo algoritmo de Katzenelson, desde o ponto inicial arbitrado (representado por um triângulo) até a solução da rede (representada por uma estrela). Os pontos de cruzamento da curva de solução com as fronteiras são representados pelos círculos.

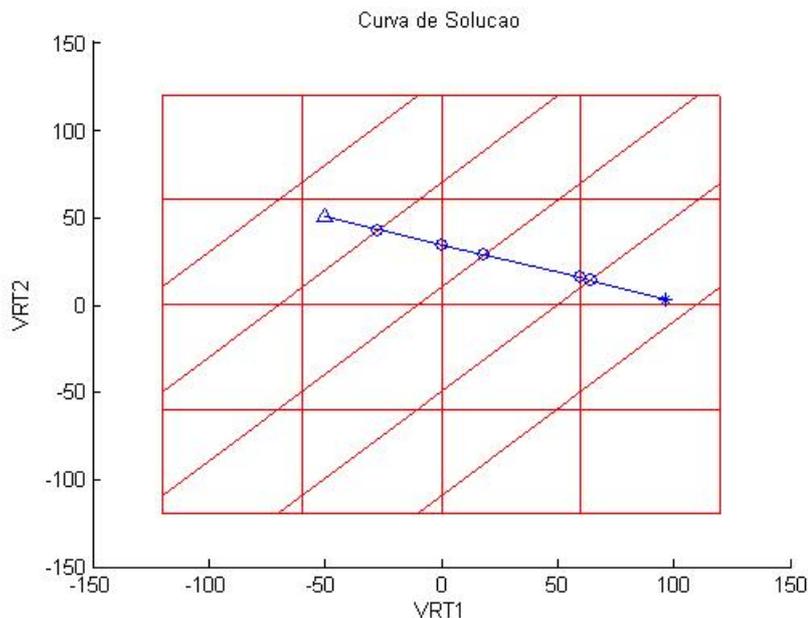


Figura 6-11 - Curva de solução traçada pelo algoritmo de Katzenelson.

Note finalmente que, em decorrência das curvas características dos resistores, todas as regiões do espaço V_{RT} possuem as mesmas características lineares, e a curva de solução descreve uma reta entre o ponto inicial e o final.

6.3.2. Exemplo 2

Considere o circuito do exemplo anterior, representado na Fig. 6-6. Definiremos agora a característica dos resistores LPP como sendo interpolações LPP da seguinte curva característica não linear:

$$j = \frac{v}{|v|} \left(\frac{|v|}{194.6084} \right)^{0.54} \quad (6.5)$$

A janela de interpolação será estabelecida de -40 até 40 V, com 30 pontos de quebra uniformemente distribuídos neste intervalo. A Fig. 6-12 mostra a curva característica resultante dos resistores LPP.

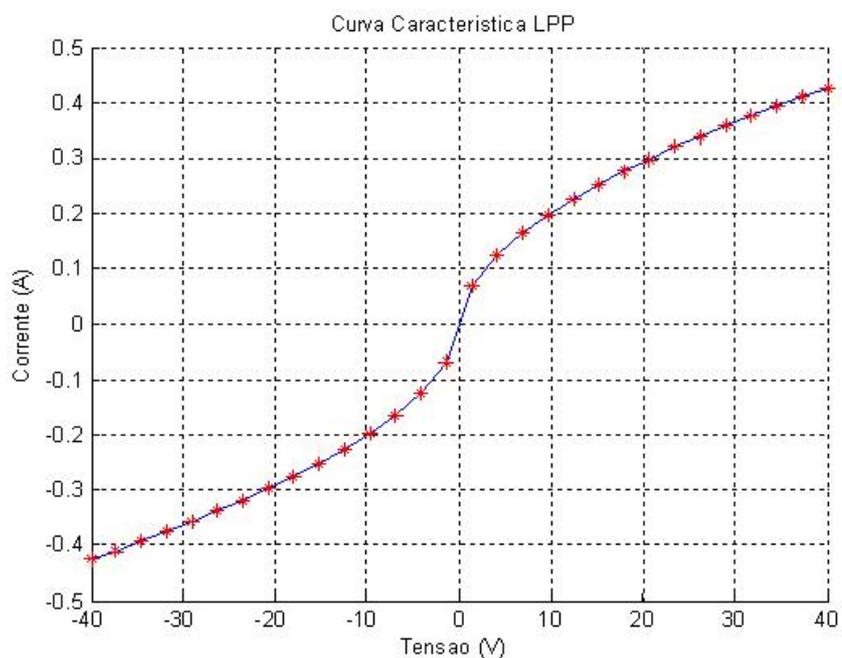


Figura 6-12 - Curva característica LPP.

Seguindo o mesmo procedimento utilizado anteriormente, traçamos o lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores no espaço V_{RT} , como mostra a Fig. 6-13.

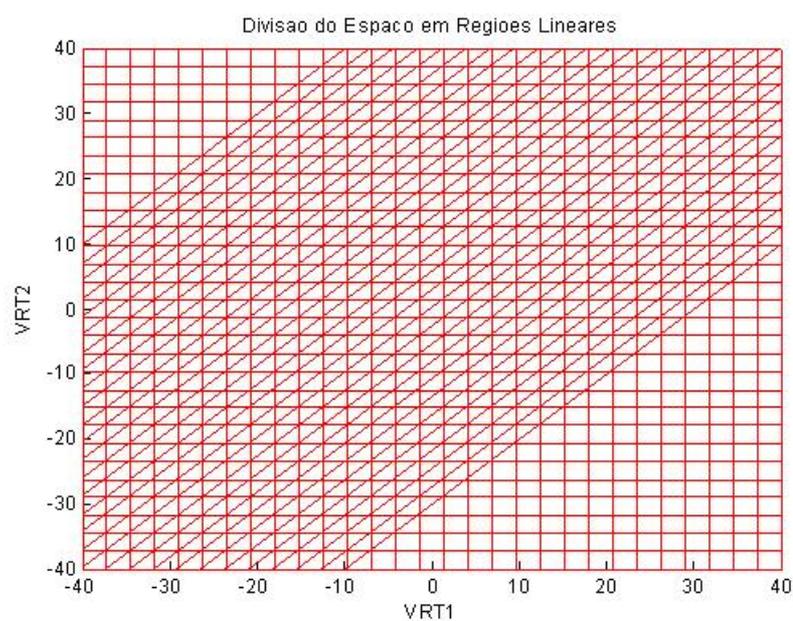


Figura 6-13 - Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP.

Elegendo o ponto inicial:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

o algoritmo de Katzenelson nos fornece o resultado mostrado na Fig. 6-14.

```
>> solver(NL)

-----
Solução pela Análise dos Conjuntos de Corte
Convergencia do Katzenelson verificada.
Tempo de Inicialização      =0.14s
Tempo de Processamento     =0.047s
Tempo de Total              =0.187s
Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =31

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi)'      'I(Ni->Nf)'
    [ 1]      'E'      [ 1]      [ 0]      [      10]      [  0.0185]
    [ 2]      'R'      [ 2]      [ 1]      [ 18.1287]      [  0.1184]
    [ 3]      'J'      [ 1]      [ 2]      [-18.1287]      [  0.1000]
    [ 4]      'R'      [ 2]      [ 3]      [ -1.3616]      [-0.0186]
    [ 5]      'R'      [ 3]      [ 0]      [ 29.4903]      [  0.0815]
    [ 6]      'J'      [ 0]      [ 3]      [-29.4903]      [  0.1000]
```

Figura 6-14 - Solução do Algoritmo de Katzenelson.

O algoritmo convergiu em 31 iterações, e 30 fronteiras foram cruzadas. Observe que, no ponto final, as variáveis da rede adquirem o valor:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 18.1287 \\ -1.3616 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

A Fig. 6-15 mostra a curva de solução obtida na simulação. A curva de solução possui 32 pontos, incluindo o ponto inicial (representado por um triângulo) e o ponto final (representado por uma estrela). Os pontos de cruzamento de fronteiras são representados pelos círculos.

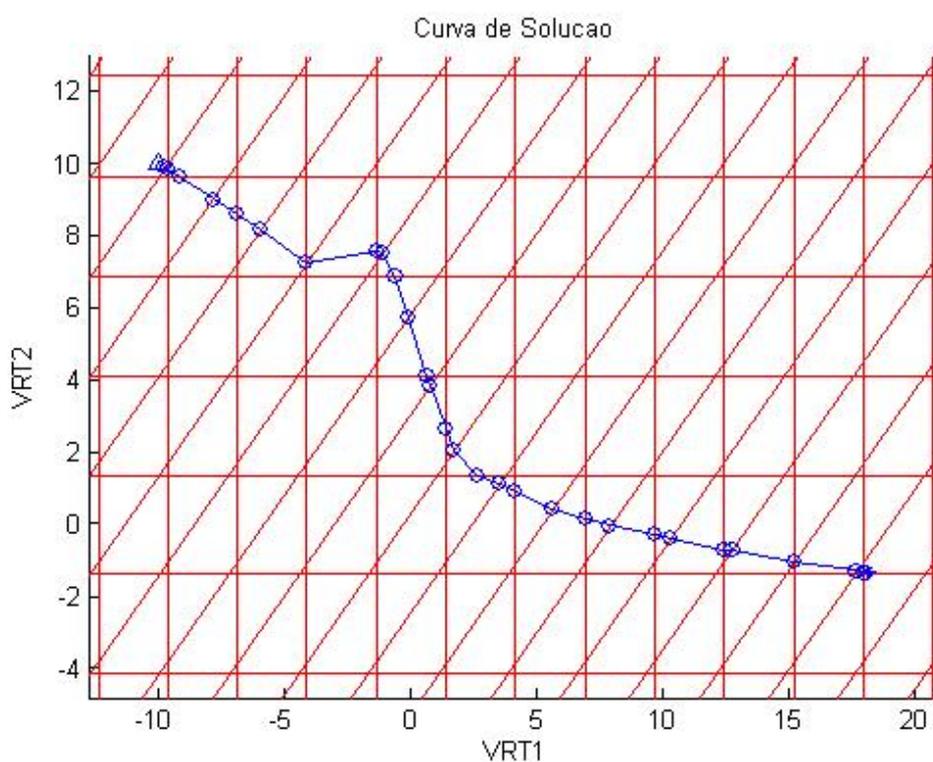


Figura 6-15 - Curva de solução traçada pelo algoritmo de Katzenelson.

Na Fig. 6-16, são mostradas em detalhe as regiões do ponto inicial e do ponto final da curva de solução.

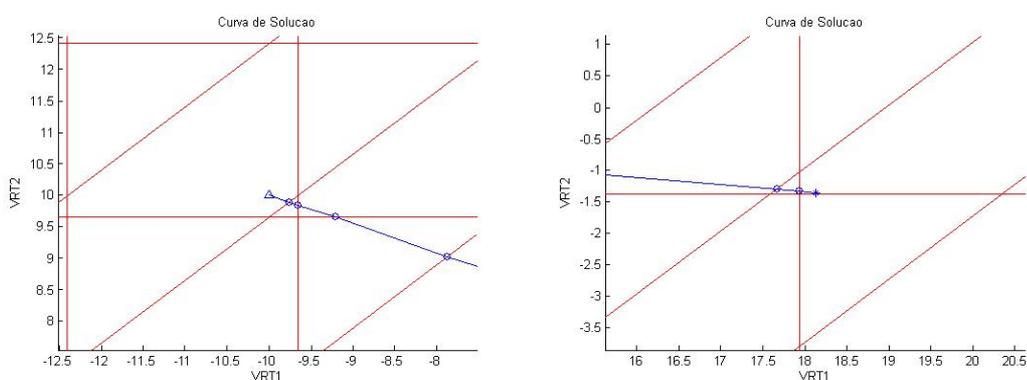


Figura 6-16 – Detalhes da curva de solução: ponto inicial (à esquerda) e ponto final (à direita).

6.3.3. Exemplo 3

Considere agora o circuito retificador de meia onda representado na Fig. 3-17.

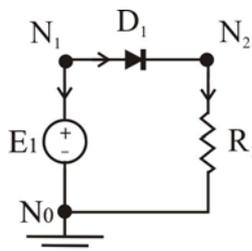


Figura 6-17 - Circuito com diodo retificador.

Seja $R_1 = 1\text{k}\Omega$, e D_1 um resistor LPP cuja característica LPP é determinada por três pontos de quebra: $(0, 10^{-6})$, $(1, 0)$ e $(2, 10^6)$. Sua curva característica é mostrada na Fig. 6-18.

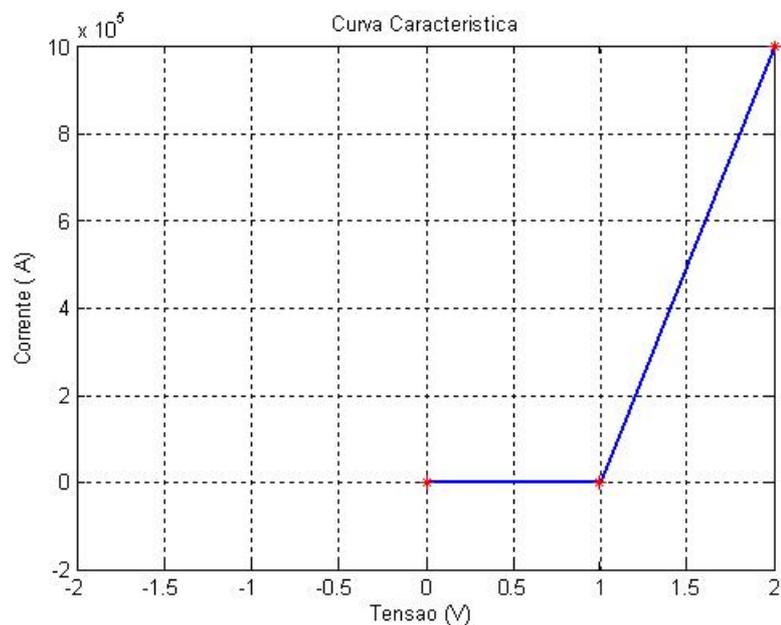


Figura 6-18 - Curva característica do diodo retificador D_1 .

A matriz de entrada de dados da rede é mostrada na Fig. 3-18.

```

NL = [1 1 1 0 E1;
      2 0 2 0 0.001;
      3 0 1 2 -2];

```

Figura 6-19 - Matriz de entrada de dados.

Nosso objetivo consiste em simular a retificação de uma tensão senoidal fornecida por E_1 . Para tal, E_1 será igualada, a cada passo, a um ponto da senóide mostrada na Fig. 6-20. Utilizaremos, a cada passo, o algoritmo de Katzenelson para calcular a evolução da tensão nos resistor e no diodo.

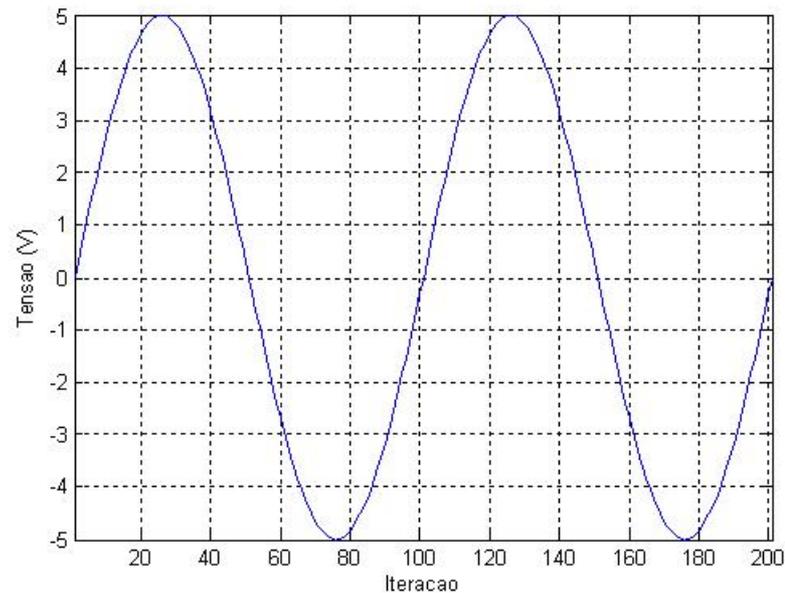


Figura 6-20 - Tensão da fonte E_1 .

Como resultado, as Fig. 6-21 e 6-22 trazem gráficos com a evolução das tensões em R_1 e D_1 .

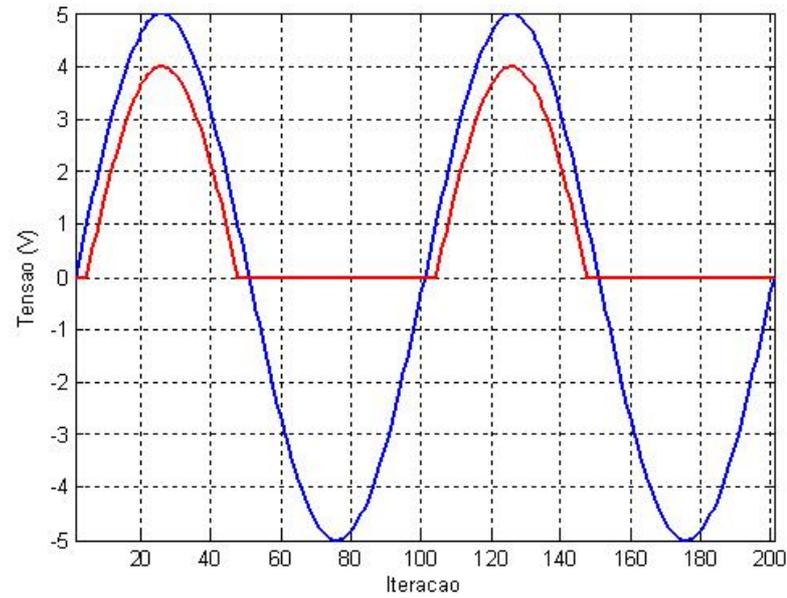


Figura 6-21 - Tensão no resistor R_1 .

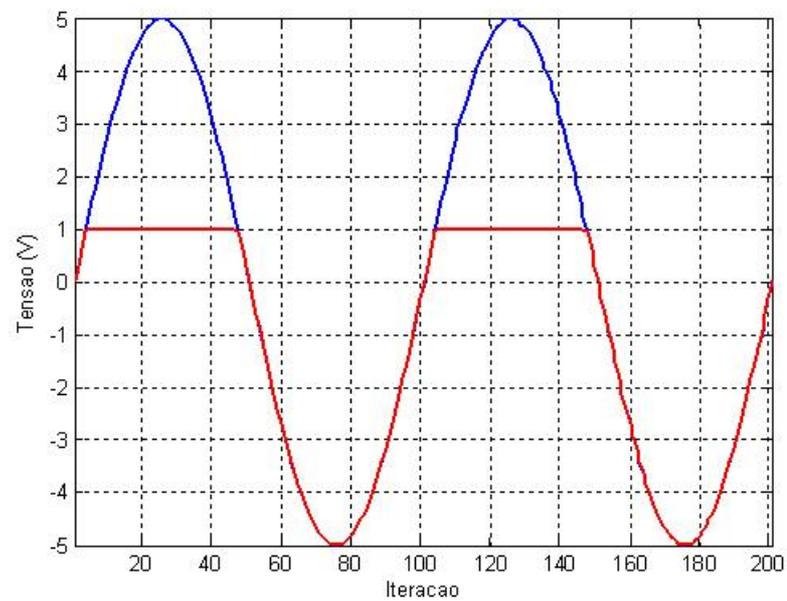


Figura 6-22 – Tensão no diodo D_1 .

Note finalmente que somadas, essas tensões se igualam à tensão de E_1 , satisfazendo assim a SLK.

6.4. Método de Refinamento Hierárquico

Para ilustrar a aplicação do método de refinamento hierárquico, utilizaremos novamente o circuito da Fig. 6-6, considerando agora resistores não lineares.

A janela de interpolação inicial será de -120V a 120V, e faremos o número de pontos de quebra por interpolação igual a 5.

A curva característica dos resistores não lineares será dada pela equação:

$$j = \frac{v}{|v|} \cdot \left(\frac{|v|}{194.6084} \right)^{0.54}, \quad (6.8)$$

a qual pode ser visualizada na Fig. 6-23.

Arbitramos ainda o ponto inicial da simulação:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

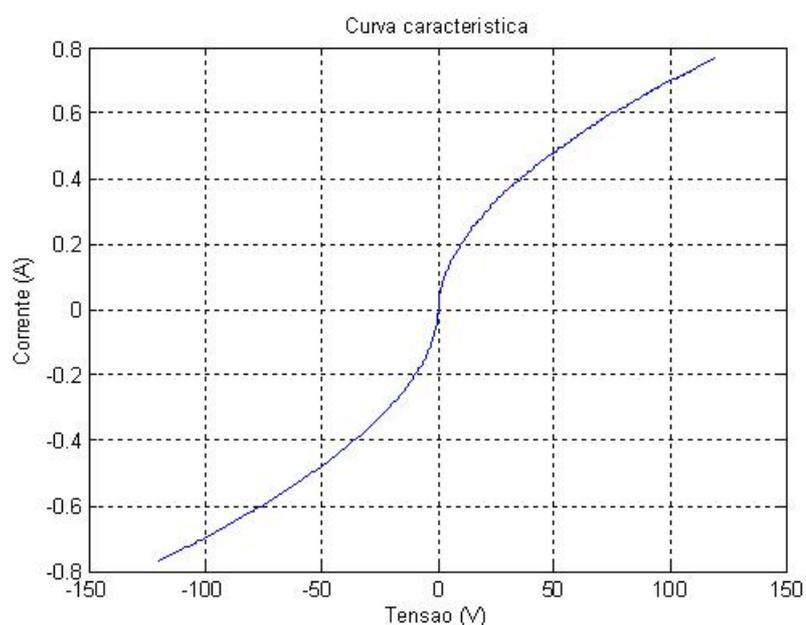


Figura 6-23 - Curva característica dos resistores não lineares.

A cada iteração, o método de refinamento hierárquico fará a interpolação LPP dos resistores, dividirá o espaço V_{RT} nas devidas regiões lineares, e traçará uma curva de solução utilizando o algoritmo de Katzenelson, tomando como ponto inicial a solução obtida no refinamento anterior.

O algoritmo será interrompido quando uma de três condições for satisfeita:

- Número de iterações for superior a 100;
- A equação (5.19) for satisfeita, com $\varepsilon_r = 10^{-3}$ e $\varepsilon_a = 10^{-6}$; ou
- A equação (5.26) for satisfeita, com $\delta = \varepsilon_r$.

Detalharemos a seguir cada uma das iterações do método de refinamento hierárquico na solução da rede não linear.

Em cada uma das figuras seguintes, a curva de solução será traçada com linha pontilhada, e as fronteiras serão traçadas com linhas contínuas.

O ponto inicial será representado por um triângulo, o ponto final, por uma estrela, e os pontos de cruzamento de fronteiras, por círculos.

As fronteiras, a curva de solução e todos os pontos destacados serão desenhados com cores diferentes a cada iteração.

Primeira Iteração

A Fig. 6-24 mostra a primeira iteração do método, em vermelho.

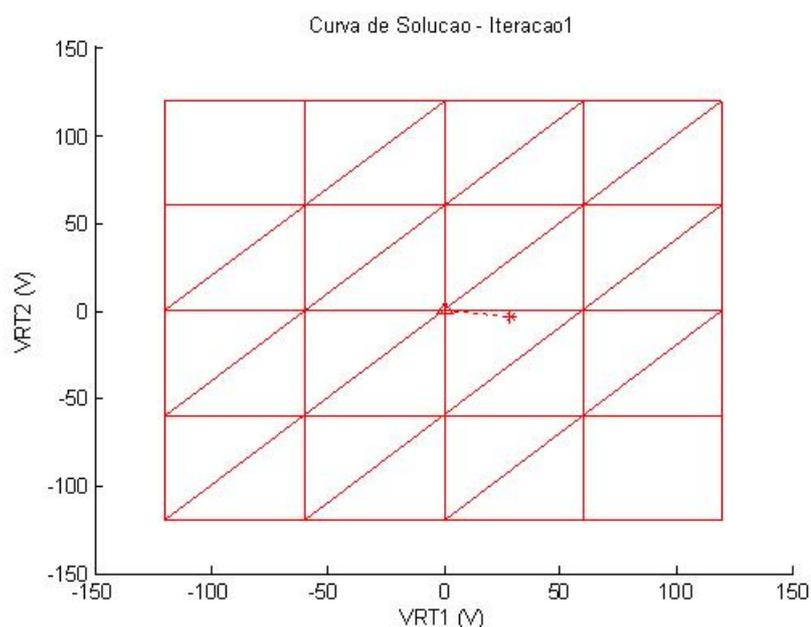


Figura 6-24 - Primeira iteração do método de refinamento hierárquico.

Nesta iteração, o método encontra como solução desta primeira rede LPP o ponto

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 28.8568 \\ -3.6430 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

que já consiste em uma aproximação grosseira da solução da rede não linear.

A estimativa do erro desta solução, dada pela equação (5.24), é de:

$$\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0601. \quad (6.11)$$

Segunda Iteração

Observe, na Fig. 6-24, a região linear onde foi encontrada a solução da rede LPP na primeira iteração (triângulo vermelho). Chamemo-la Região-1.

Na segunda iteração, a janela de interpolação de cada resistor será igualada aos limites impostos pelas fronteiras da Região-1. Nesta nova rede LPP, será mantido o número de pontos de quebra. Assim, na Fig. 6-25, vemos, em azul, as novas

fronteiras resultantes deste primeiro refinamento. As fronteiras anteriores são mantidas em vermelho por ilustração.

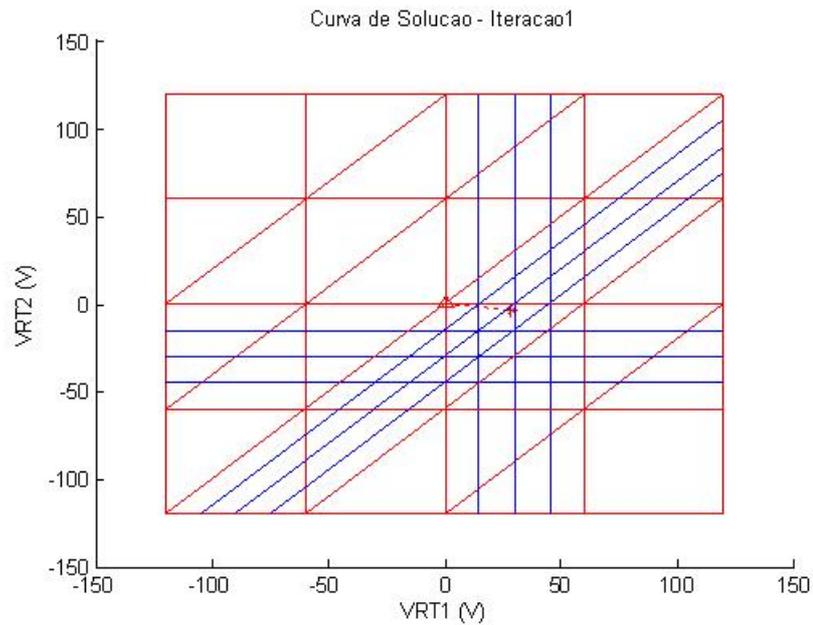


Figura 6-25 - Em azul: fronteiras do primeiro refinamento.

O próximo passo do algoritmo é considerar como ponto inicial a solução obtida na iteração anterior, explicitada em (6.9), e resolver a nova rede LPP utilizando o algoritmo de Katzenelson. A Fig. 6-26 traz, em azul, a curva de solução desta segunda iteração.

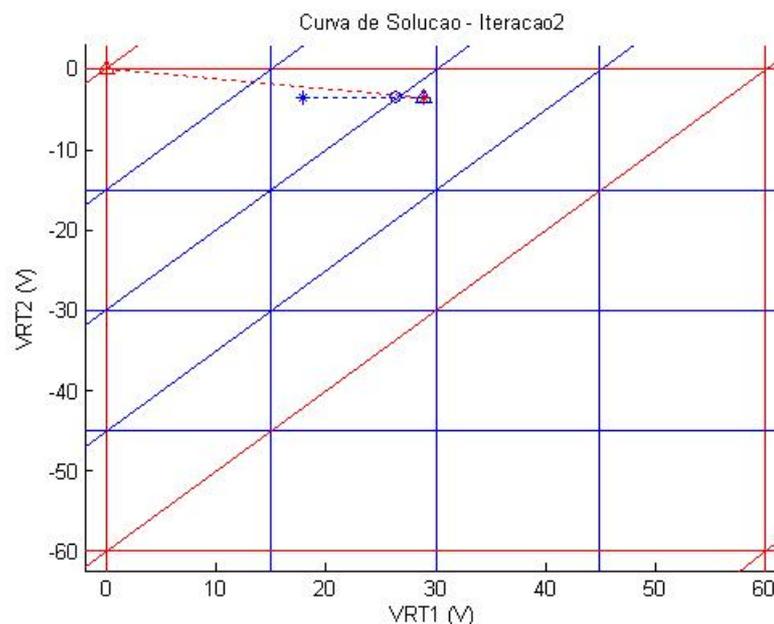


Figura 6-26 – Em azul: curva de solução da segunda iteração.

Note que, em concordância com o resultado obtido no item 5.7, na segunda iteração, a solução da nova rede LPP (representada pela estrela azul) permanece interior à Região-1 (triângulo vermelho).

Nesse ponto, temos:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 17.8586 \\ -3.5740 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

e

$$\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0158. \quad (6.13)$$

Terceira iteração.

Seja Região-2 a última região atingida na segunda iteração. Na Fig. 6-26, a Região-2 é o triângulo com os dois lados inferiores em azul, e o lado de cima vermelho.

Novamente, a janela de interpolação de cada resistor é igualada aos limites impostos pelas fronteiras da última região atingida na iteração anterior, no caso, a Região-2. A Fig. 6-27 mostra em lilás as fronteiras obtidas no segundo refinamento.

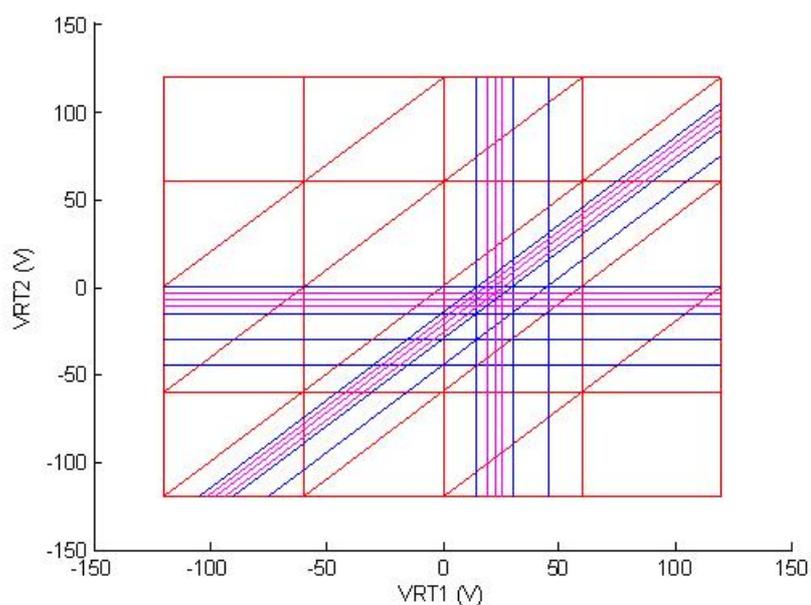


Figura 6-27 - Em lilás: fronteiras do segundo refinamento.

Tomando como ponto inicial (6.12), o algoritmo de Katzenelson nos dá a solução da nova rede LPP:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 17.9524 \\ -2.0675 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

com:

$$\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0056. \quad (6.15)$$

A Fig. 6-28 mostra a curva de solução traçada na terceira iteração, em lilás. Note que a solução da terceira iteração, representada pela estrela lilás, permanece interior à Região-2, representada pelo triângulo azul.

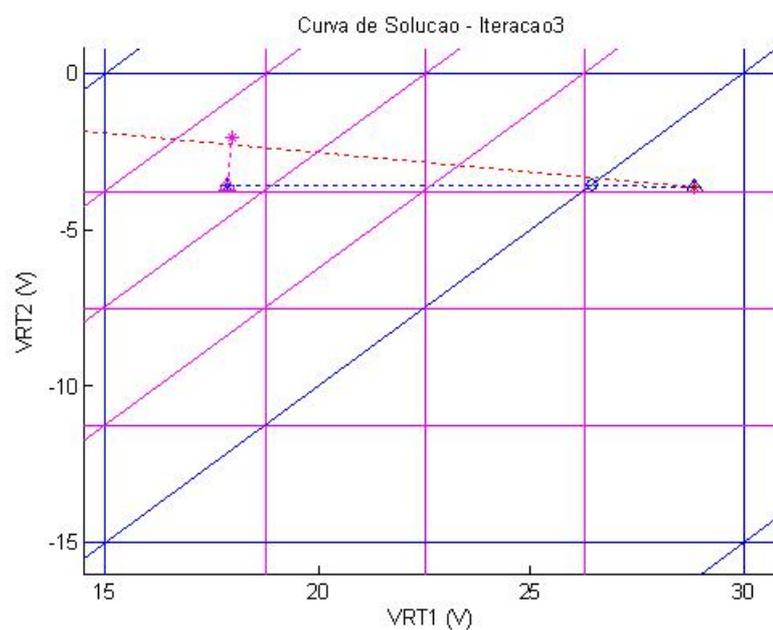


Figura 6-28 - Em lilás: curva de solução da terceira iteração.

Quarta Iteração

Seja Região-3 a última região atingida na terceira iteração do método de refinamento hierárquico. Novamente, temos o refinamento da interpolação LPP, fazendo a janela de interpolação de cada resistor igual aos limites impostos pelas fronteiras da Região-3. A Fig. 6-29 mostra na cor preta, as novas fronteiras geradas neste processo.

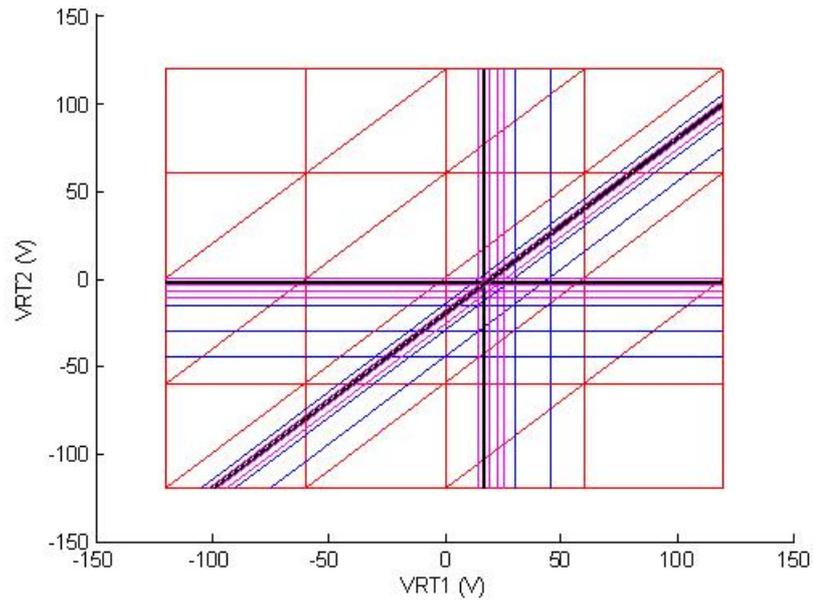


Figura 6-29 - Em preto: novas fronteiras adicionadas no terceiro refinamento.

Tomando agora (6.14) como ponto inicial, o algoritmo de Katzenelson traça a curva de solução representada em preto na Fig. 6-30. Observe mais uma vez que a solução (estrela preta) permanece interior à última região atingida na iteração anterior (triângulo lilás).

Neste ponto, temos:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 18.1288 \\ -1.3785 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

com:

$$\mathbf{Err}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0003. \quad (6.17)$$

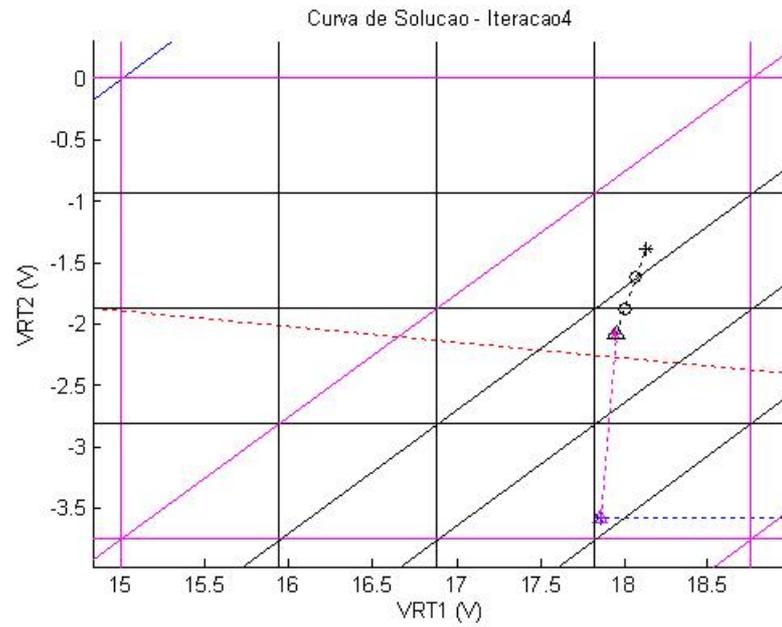


Figura 6-30 - Em preto: curva de solução da quarta iteração.

Note agora que (6.17) satisf es o terceiro critério de parada, finalizando o algoritmo com a seguinte saída:

```
>> solver(NL)

Soluçao pela Analise dos Conjuntos de Corte
Tempo de Inicialização      =0.156s
Tempo de Processamento     =0.422s
Tempo de Total              =0.578s
Numero de Refinamentos     =4
Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =7
Erro Estimado =0.00027363

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi) '      'I(Ni->Nf) '
    [ 1]      'E'      [ 1]      [ 0]      [      10]      [  0.0184]
    [ 2]      'R'      [ 2]      [ 1]      [ 18.1288]      [  0.1184]
    [ 3]      'J'      [ 1]      [ 2]      [-18.1288]      [  0.1000]
    [ 4]      'R'      [ 2]      [ 3]      [ -1.3785]      [ -0.0187]
    [ 5]      'R'      [ 3]      [ 0]      [ 29.5073]      [  0.0816]
    [ 6]      'J'      [ 0]      [ 3]      [-29.5073]      [  0.1000]
```

Figura 6-31 - Solução da rede não linear pelo método de refinamento hierárquico.

Como ilustração adicional, a Fig. 6-32 traz os gráficos de evolução das tensões nos resistores da rede ao longo das sete iterações realizadas pelo algoritmo de Katzenelson. As linhas em vermelho mostram os limites das janelas de interpolação que se vão estreitando ao longo dos diversos refinamentos.

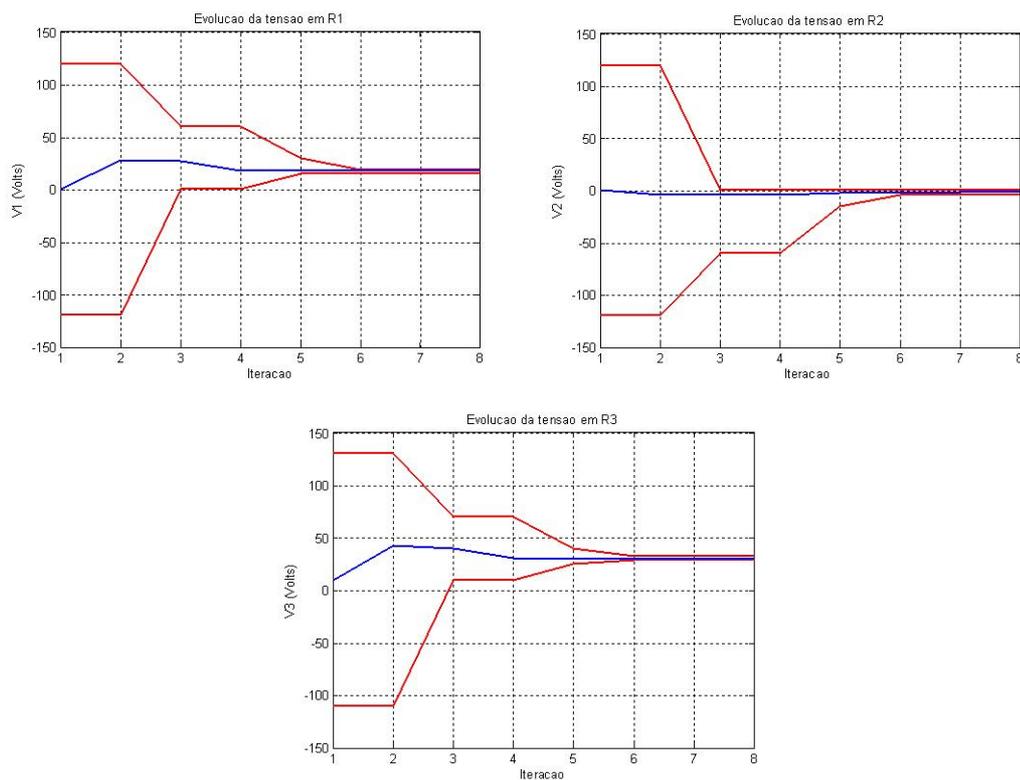


Figura 6-32 - Em azul: evolução das tensões nos resistores. Em vermelho: limites das janelas de interpolação.

Finalmente, a Fig. 6-33 mostra a evolução de $\text{Err}(v_{RT})$ nas 4 iterações do algoritmo.

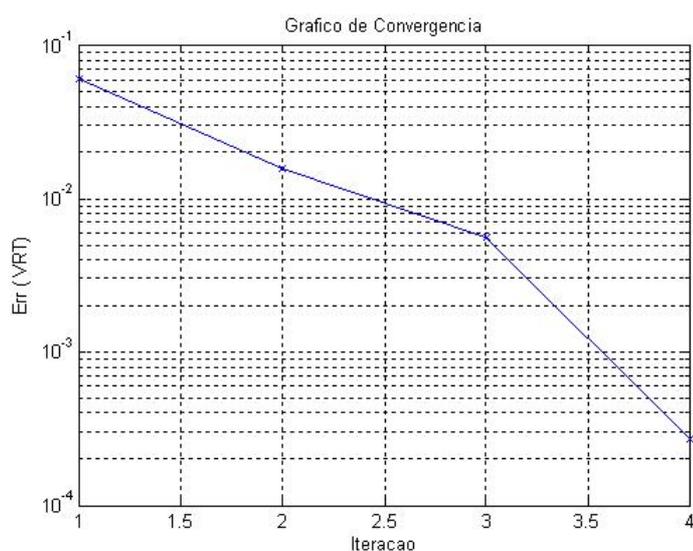


Figura 6-33 - Gráfico de convergência do método de refinamento hierárquico.

6.5. Solução de Redes Hidráulicas

A análise em regime permanente das vazões e pressões em redes hidráulicas é um problema de mais alta importância em engenharia. Para tanto, muitos algoritmos e métodos computacionais foram propostos nas últimas décadas [35 a 41].

A solução para as vazões e pressões em uma rede hidráulica é obtida quando são satisfeitas as equações de continuidade do fluxo e de conservação da energia ao longo de toda a rede. As equações de continuidade do fluxo são equações algébricas lineares obtidas para cada junção ou nó da rede, ao passo que as equações de conservação da energia (obtidas para laços da rede) são, em geral, equações algébricas não-lineares. Até o presente não existem métodos para a solução direta e simultânea dessas equações. Faz-se, portanto, necessária uma abordagem numérica do problema, na qual uma solução inicial é arbitrada (geralmente satisfazendo as equações de continuidade) e, em seguida, iterativamente corrigida até que o sistema seja globalmente satisfeito.

Vários algoritmos numéricos foram propostos para resolver sistemas de equações não lineares em redes hidráulicas, dentre os quais figuram principalmente: Hardy-Cross – um dos primeiros métodos de solução, tradicionalmente utilizado, proposto por Cross em 1936 [35]; Newton-Raphson – proposto por Martin e Peters em 1963 [36]; o método linear – explorado por Wood e Charles em 1972 [37]; e mais recentemente o método do gradiente, proposto por Todini e Pilati em 1988 [38]. Outras abordagens de solução de redes foram paralelamente propostas utilizando a teoria da otimização [39, 41].

A qualidade de um algoritmo iterativo na solução de redes hidráulicas pode ser avaliada segundo sua capacidade de convergir para uma solução com certo grau de precisão no menor tempo possível. A convergência, na maioria desses algoritmos, de acordo com Wood [40], é fortemente restringida pela dimensão e topologia da rede, pela natureza de seus elementos e fundamentalmente pela solução inicial arbitrada.

Desde o trabalho publicado por Wood em 1981 [40], os algoritmos para a análise de redes hidráulicas têm sido *avaliados empiricamente* quanto a suas propriedades de convergência. Com efeito, como nenhum dos métodos citados acima possui garantia de convergência, não resta senão a avaliação empírica como último recurso para aferir a confiabilidade de cada método de solução.

Nas seções seguintes, revisaremos a formulação tradicional de redes hidráulicas e faremos a aplicação do Método de Refinamento Hierárquico na solução destas redes.

Dado que o Método de Refinamento Hierárquico possui demonstração matemática de convergência, acreditamos que este represente uma significativa contribuição para elenco tradicional de algoritmos utilizados na solução de redes hidráulicas.

6.5.1. Topologia da Rede

A representação topológica tradicional de redes hidráulicas difere essencialmente da representação de circuitos elétricos, porque, ao contrário do que ocorre com a carga elétrica nos circuitos, numa rede hidráulica não costuma haver conservação global da massa. A Fig. 6-34 mostra uma rede hidráulica simples, com dois reservatórios, três pontos de consumo e sete tubos.

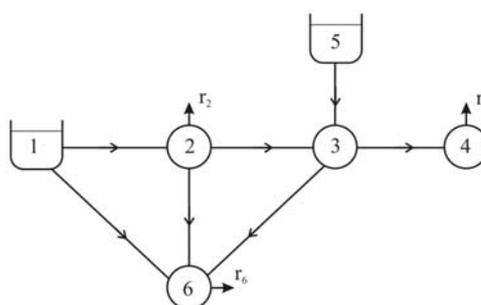


Figura 6-34 – Rede Hidráulica.

Colins et al. [41] propôs uma topologia da rede que incorpora um nó imaginário de referência (T) para solucionar o sistema utilizando técnicas de programação linear. Em nossa análise, seguiremos este mesmo modelo para

formulação da rede, sendo que, diferentemente do modelo de Colins, como não restringiremos o sinal da vazão nos tubos, não teremos que duplicar os tubos para expressar a possibilidade de fluxo nos dois sentidos.

Para simulação em regime permanente, a conservação global da massa será obtida pela adição de ramos virtuais, que conectam os pontos de consumo ao nó de referência, e conectam o nó de referência aos reservatórios, como mostra a Fig. 6-35.

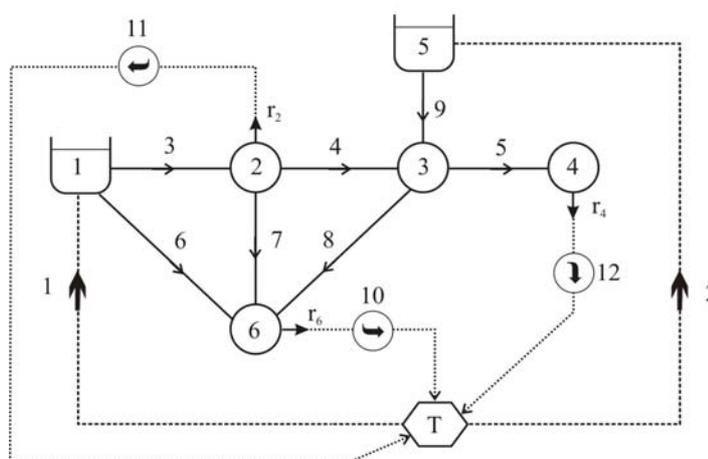


Figura 6-35 - Adição do nó de referência e de ramos virtuais para conservação global da massa.

A imposição do nó de referência, dos ramos virtuais e da conservação global da massa permitir-nos-á formular a rede tanto pela análise nodal quanto pela análise de cortes [43]. Observe que a rede resultante na Fig. 6-35 sugere uma analogia direta com um circuito elétrico. Mais adiante, faremos uso desta analogia para aplicarmos o Método de Refinamento Hierárquico à solução de redes hidráulicas.

6.5.2. Equações da Rede

As equações básicas que determinam o fluxo de um fluido em uma rede hidráulica são a Equação da Conservação da Massa e a Equação da Conservação da Energia.

Equação da Conservação da Massa

Para todo nó que representa uma junção de tubos, a equação da Conservação da Massa estabelece que a soma algébrica dos fluxos que entram e que saem do nó é igual a zero. Para toda junção j , isto pode ser expresso como:

$$\sum_{n \in \{j\}}^{N_j} q_n = C_j, \text{ para todo } j. \quad (6.18)$$

onde q_n é o fluxo no tubo n ; C_j é qualquer demanda externa de consumo; N_j é o número de tubos conectados à junção j , e $\{j\}$ é o conjunto de tubos conectados à junção j .

Equação da Conservação da Energia

A equação da conservação da energia estabelece que a soma das perdas de carga piezométrica nos tubos ao longo de qualquer caminho entre dois nós é igual à diferença de carga piezométrica entre estes dois nós, expressa por:

$$\Delta E_k = \sum_{n \in \{k\}}^{N_k} h_n \text{ para todo } k. \quad (6.19)$$

A variável h_n indica a perda de carga no tubo n pertencente ao caminho k ; N_k é o número de tubos no caminho k , e $\{k\}$ é o conjunto de tubos pertencentes ao caminho k . ΔE_k indica a diferença de carga piezométrica entre dois nós conectados pelo caminho k .

Características dos Tubos

As características dos tubos nos fornecem, finalmente, um último grupo de equações para a formulação da rede:

$$h_n = d_n q_n, \quad (6.20)$$

onde d_n é chamada *resistência de escoamento*, e poderá ser calculada pela fórmula de Colebrook e White [44]. Note que d_n poderá ser expressa tanto em termos de q_n como de h_n , como expressa a equação:

$$d_n = c_n |q_n|^{\alpha-1} = c_n^\beta |h_n|^{1-\beta} \quad (6.21)$$

onde $\beta = \frac{1}{\alpha}$; c_n é uma constante do tubo que depende do comprimento, do diâmetro e da rugosidade do tubo, bem como das características do fluido; e o expoente α é comumente escolhido na faixa $1,8 \leq \alpha \leq 2$. A relação constitutiva de cada tubo poderá, portanto, ser expressa como:

$$q_n = c_n^{-\beta} \cdot h_n \cdot |h_n|^{\beta-1} \quad (6.22)$$

6.5.3. Analogia elétrica

Por tudo o que foi dito acima, encontramos a seguinte analogia entre as formulações dos sistemas hidráulico e elétrico:

Tabela 6-1 - Analogia entre redes hidráulicas e redes elétricas.

Redes Elétricas	Redes Hidráulicas
Primeira Lei de Kirchhoff	Equação da Conservação da Massa
Segunda Lei de Kirchhoff	Equação da Conservação da Energia
Resistores não lineares	Tubos
Fontes de Tensão	Ramo virtual do Reservatório
Fontes de Corrente	Ramo virtual de Consumo
Tensão (V)	Carga (m)
Corrente (A)	Vazão (m ³ /s)

Dado que fisicamente os tubos de uma rede hidráulica apresentam características monotonicamente crescentes, podemos estender o Método de Refinamento Hierárquico ao domínio da hidráulica para solução de redes em regime permanente.

Por simplicidade, não reescreveremos aqui todo o equacionamento do método para o problema hidráulico, mas faremos simplesmente uso da analogia elétrica para solucionar tais redes.

6.5.4. Aplicação do Método de Refinamento Hierárquico

Como exemplo, considere a rede hidráulica da Fig. 6-36, a qual foi utilizada por Wood em [44] para estabelecer uma comparação empírica entre as características de convergência de diferentes algoritmos de solução.

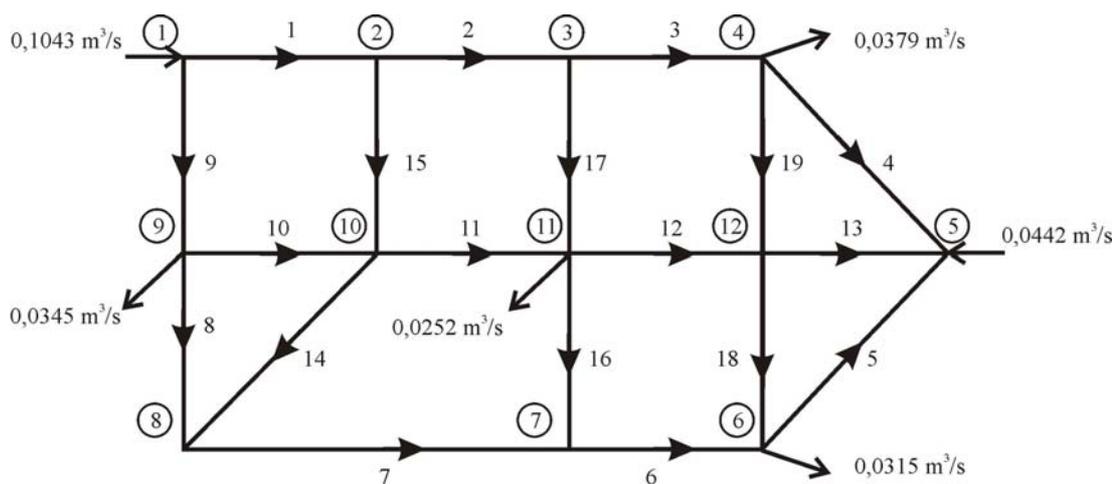


Figura 6-36 - Rede hidráulica, Wood-81.

A rede possui seis vazões externas fixas, nos nós 1, 4, 5, 6, 9 e 11, como mostra a Tabela 6-2.

Tabela 6-2 - Vazões fixas - entradas da rede.

Nó	Vazão (m^3/seg)
1	0,1043
4	-0,0379
5	-0,0442
6	-0,0315
9	-0,0345
11	-0,0252

As características dos tubos são dadas, em unidades do SI, pela equação de Hazen-Williams:

$$h_L = \frac{10,78 \cdot L \cdot q^{1,852}}{C^{1,852} \cdot D^{4,87}} m \quad (6.23)$$

onde C representa o coeficiente de rugosidade; L o comprimento; D o diâmetro; e q a vazão em m^3/s . Os diâmetros, comprimentos e rugosidades dos tubos utilizados neste exemplo são mostrados na Tabela 6-2.

Tabela 6-3 - Características dos tubos da rede da Fig. 6-36.

<i>Tubo No.</i>	<i>Diâmetro (m)</i>	<i>Comprimento (m)</i>	<i>Rugosidade</i>
1	0,305	457,2	130
2	0,203	304,8	130
3	0,203	365,8	120
4	0,203	609,6	120
5	0,203	853,4	120
6	0,203	335,3	120
7	0,203	304,8	120
8	0,203	762	120
9	0,203	243,8	100
10	0,152	396,2	100
11	0,152	304,8	100
12	0,254	335,3	130
13	0,254	304,8	130
14	0,152	548,6	120
15	0,152	335,3	120
16	0,152	548,6	120
17	0,254	365,9	130
18	0,152	548,6	120
19	0,152	396,2	120

Para ilustração, a Fig. 6-37 mostra as curvas características dos tubos da rede, desenhadas com base em (6.23) e na Tabela 6-3.

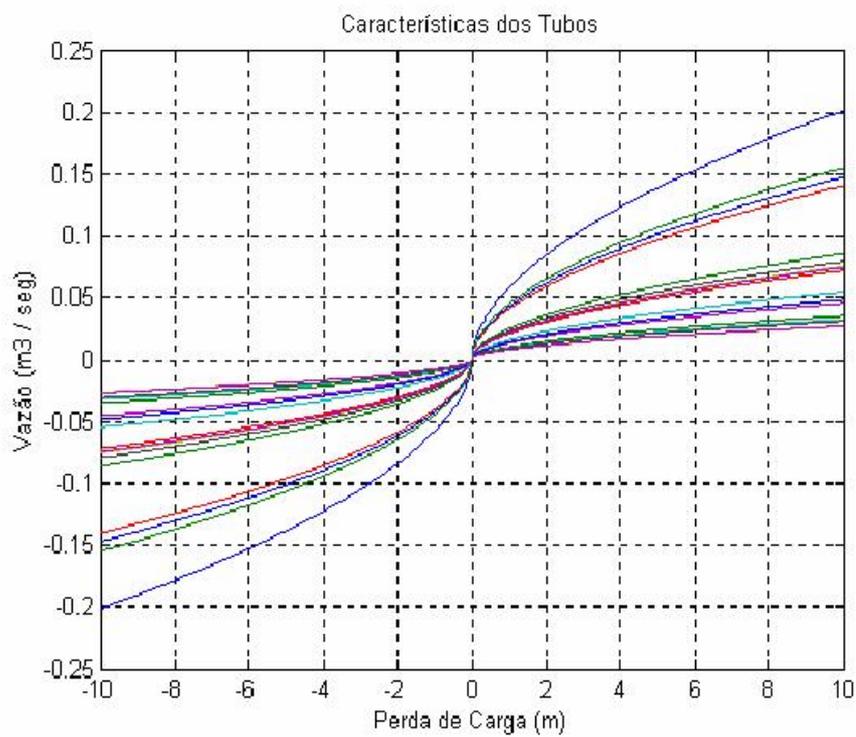


Figura 6-37 - Curvas características dos tubos.

Pelas relações indicadas na Tabela 6-1, obtemos para a rede hidráulica da Fig. 6-36 a rede elétrica análoga representada na Fig. 6-38, cuja matriz de entrada de dados é mostrada na Fig. 6-39.

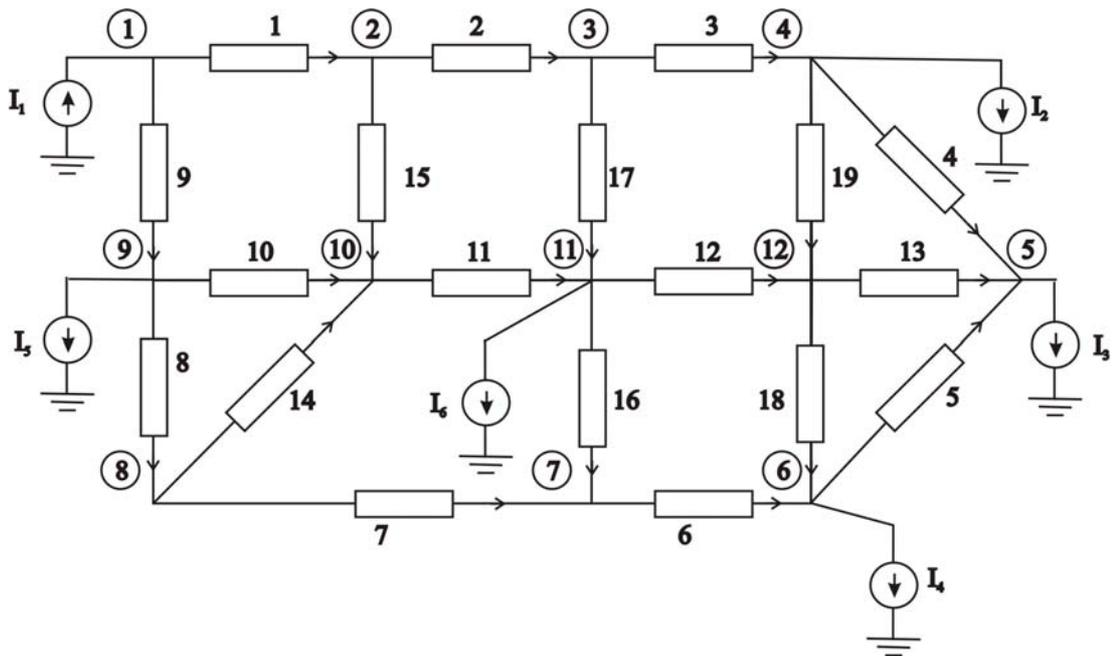


Figura 6-38 - Rede elétrica análoga.

RH= [1	0	0	1	-1
2	0	1	2	-1
3	0	2	3	-1
4	0	3	4	-1
5	0	5	4	-1
6	0	6	5	-1
7	0	7	6	-1
8	0	8	7	-1
9	0	0	8	-1
10	0	8	9	-1
11	0	9	10	-1
12	0	10	11	-1
13	0	11	4	-1
14	0	9	7	-1
15	0	1	9	-1
16	0	10	6	-1
17	0	2	10	-1
18	0	11	5	-1
19	0	3	11	-1
20	2	7	0	0.1043
21	2	8	7	0.0379
22	2	10	7	0.0442
23	2	3	7	0.0315
24	2	7	4	0.0345
25	2	5	7	0.0252] ;

Figura 6-39 - Matriz de entrada de dados da rede.

Escolheremos como ponto inicial do algoritmo de refinamento hierárquico

$$\mathbf{v}_{RT} = \mathbf{0}.$$

Como critérios de parada, estabelecemos que:

- Num_Max_It_Ref = 100;
- Erro_abs = 1e-9; e

- Erro_rel = 1e-6.

Estabeleceremos ainda que a janela de interpolação inicial é extremamente grande, de -10^6 até $+10^6$, e que o número de pontos de quebra por interpolação é igual a 10.

A Fig. 6-40 mostra a saída do Método de Refinamento Hierárquico, e na Fig. 6-41 visualizamos o gráfico de convergência até a solução.

```

> solver_ANM(RH)
-----
Solucao pela Analise Nodal Modificada
Tempo de Total          =0.469s
Numero de Refinamentos =11
Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =51
Erro Estimado =8.8275e-010

ans =

      'id'      'typ'      'Ni'      'Nf'      '(Vf-Vi) '      'I(Ni->Nf) '
[ 1]      'R'      [ 0]      [ 1]      [ 1.0888]      [ 0.0608]
[ 2]      'R'      [ 1]      [ 2]      [ 2.9273]      [ 0.0442]
[ 3]      'R'      [ 2]      [ 3]      [ 0.7059]      [ 0.0172]
[ 4]      'R'      [ 3]      [ 4]      [-0.4151]      [-0.0098]
[ 5]      'R'      [ 5]      [ 4]      [-0.4782]      [-0.0088]
[ 6]      'R'      [ 6]      [ 5]      [ 0.3393]      [ 0.0121]
[ 7]      'R'      [ 7]      [ 6]      [ 0.3811]      [ 0.0136]
[ 8]      'R'      [ 8]      [ 7]      [ 0.3741]      [ 0.0082]
[ 9]      'R'      [ 0]      [ 8]      [ 3.6907]      [ 0.0435]
[10]      'R'      [ 8]      [ 9]      [-0.1315]      [-0.0026]
[11]      'R'      [ 9]     [10]      [ 0.9320]      [ 0.0086]
[12]      'R'     [10]     [11]     [-0.0364]      [-0.0071]
[13]      'R'     [11]      [ 4]     [-0.1479]      [-0.0159]
[14]      'R'      [ 9]      [ 7]      [ 0.5056]      [ 0.0054]
[15]      'R'      [ 1]      [ 9]      [ 2.4704]      [ 0.0165]
[16]      'R'     [10]      [ 6]     [-0.0454]      [-0.0015]
[17]      'R'      [ 2]     [10]      [ 0.4751]      [ 0.0271]
[18]      'R'     [11]      [ 5]      [ 0.3303]      [ 0.0043]
[19]      'R'      [ 3]     [11]     [-0.2672]      [-0.0045]
[20]      'J'      [ 7]      [ 0]     [-4.0648]      [ 0.1043]
[21]      'J'      [ 8]      [ 7]      [ 0.3741]      [ 0.0379]
[22]      'J'     [10]      [ 7]     [-0.4264]      [ 0.0442]
[23]      'J'      [ 3]      [ 7]     [-0.6573]      [ 0.0315]
[24]      'J'      [ 7]      [ 4]      [ 0.2422]      [ 0.0345]
[25]      'J'      [ 5]      [ 7]     [-0.7204]      [ 0.0252]

```

Figura 6-40 - Saída do Método de Refinamento Hierárquico.

Note que para obter a solução da rede com erro estimado inferior a 10^{-9} , foram realizadas 51 iterações do algoritmo de Katzenelson em 11 refinamentos sucessivos. O tempo de processamento foi de 469ms.

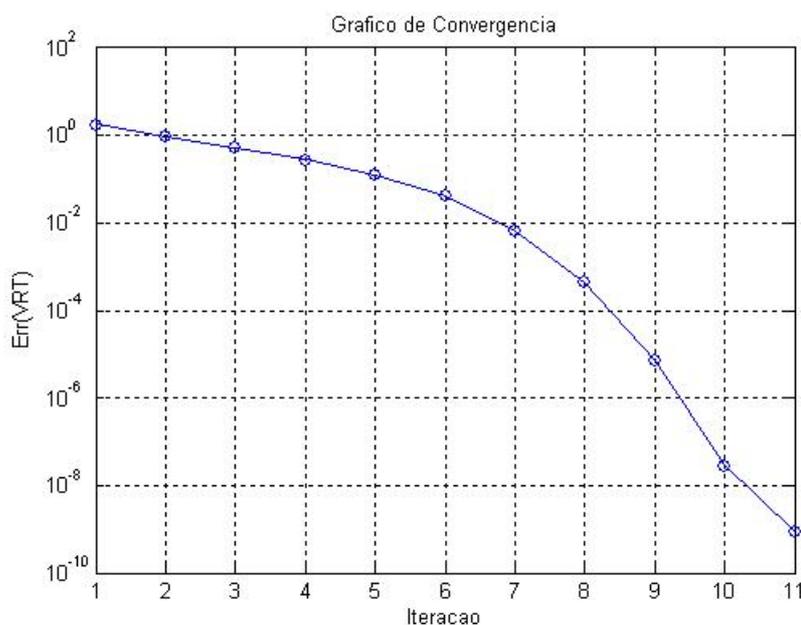


Figura 6-41 - Gráfico de Convergência do Método de Refinamento Hierárquico.

6.6. Observações quanto à Performance Computacional

Faremos agora algumas observações acerca da performance computacional do Método de Refinamento Hierárquico. Para tal utilizaremos novamente a rede do exemplo anterior, variando alguns parâmetros de simulação.

Escolha do Número de Pontos de Quebra

A Tabela 6-4 contém o resultado de 18 simulações variando a janela inicial de interpolação e o número de pontos de quebra utilizado nas interpolações dos resistores. Os critérios de parada são os mesmos do exemplo anterior, e todas as simulações partiram do ponto $\mathbf{v}_{RT} = \mathbf{0}$. A variável 'r' denota o número de refinamentos realizados até a solução, 'k' denota o número total de iterações do

algoritmo de katzenelson ao longo dos diversos refinamentos, e ‘t’ denota tempo de processamento.

Tabela 6-4 - Performance do Método de Refinamento Hierárquico em função da Janela de Interpolação Inicial e do Número de Pontos de Quebra: ‘r’ denota número de refinamentos, ‘k’ número total de iterações do algoritmo de katzenelson, e ‘t’ tempo de processamento.

N° PQ Janela Inicial	4	10	20	50	100	1000
20	R=9 k=23 t=0.265s	R=5 k=26 t=0.313s	r=4 k=37 t=0.375s	R=3 k=83 t=0.687s	r=2 k=139 t=1.281s	r=1 k=787 t=6.578s
200	R=11 k=24 t=0.359s	R=6 k=35 t=0.407s	r=4 k=51 t=0.453s	R=3 k=94 t=0.75s	r=3 k=153 t=1.343s	r=2 k=700 t=5.828s
2000000	R=19 k=40 t=0.484s	R=10 k=50 t=0.484s	r=7 k=63 t=0.546s	R=6 k=125 t=1.015s	r=5 k=203 t=1.766s	r=3 k=1691 t=14.484s

Note que, de acordo com a Tabela 6-4, o tempo de solução está intimamente relacionado com o número total de iterações do algoritmo de katzenelson. Conseqüentemente, o tempo de solução é proporcional ao número de pontos de quebra arbitrado e ao tamanho da janela de interpolação inicialmente estabelecida.

Verificamos, portanto, que, fixada uma janela de interpolação inicial, o algoritmo será tanto mais rápido quanto menor for o número de pontos de quebra estabelecido^{***}.

Escolha da Solução Inicial

Analisaremos agora a influência da escolha da solução inicial no tempo de processamento. Para tal, fixemos a janela inicial de interpolação em 2×10^6 , e façamos o número de pontos de quebra igual a 6.

^{***} Para caracterização LPP dos resistores, este número não deve ser inferior a três.

Definiremos os pontos iniciais da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{RT}^{(0)} = k \times \mathbf{1}_n, \quad (6.24)$$

onde k é uma constante real e $\mathbf{1}_n$ é um vetor unitário de dimensão n :

$$\mathbf{1}_n = \underbrace{[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}_{n \text{ elementos}}. \quad (6.25)$$

Para efeito de comparação, explicitamos que, na solução da rede:

$$\|\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}\| = 4.0292. \quad (6.26)$$

Tabela 6-5 - Influência da escolha da solução inicial no tempo de processamento. N é o número de fronteiras cruzadas na solução da primeira rede LPP.

$\mathbf{v}_{RT}^{(0)} = k \times \mathbf{1}_n$	Tempo de Processamento	N
$k = 0$	0.453s	0
$k = 4.0292$	0.453s	0
$k = 1.000$	0.453s	0
$k = 50.000$	0.453s	0
$k = 100.000$	0.468s	2
$k = 250.000$	0.579s	17
$k = 500.000$	0.594s	19

A Tabela 6-5 revela que a escolha do ponto inicial neste exemplo não afetou significativamente o tempo que o algoritmo levou para chegar à solução.

Observe que os tempos de processamento diferem exclusivamente devido ao número de fronteiras cruzadas na solução da primeira rede LPP.

Mas por que isto acontece? A resposta é que, como o ponto inicial na solução da próxima rede LPP será a solução da rede LPP anterior (que é única), a partir da segunda rede LPP o algoritmo seguirá o mesmo caminho até a solução da rede, independentemente do ponto inicial arbitrado.

Temos assim um importante resultado: se o número de pontos de quebra escolhido é relativamente pequeno, o tempo de solução do Método de Refinamento Hierárquico praticamente independe do ponto escolhido como solução inicial.

6.7. Sumário

Neste capítulo apresentamos simulações computacionais referentes aos métodos para a solução de circuitos elétricos abordados nos capítulos anteriores.

No item 6.2 foi feita uma comparação entre as metodologias da análise de cortes e da análise nodal modificada para solução de circuitos lineares. Nesta análise ficou evidente que a formulação da rede pela análise de cortes consome um maior tempo devido à busca da árvore no grafo da rede.

No item 6.3 apresentamos alguns exemplos de aplicação do algoritmo de Katzenelson para solução de redes LPP. A título de ilustração, apresentamos o traçado da curva de solução bidimensional no plano V_{RT} .

No item 6.4 mostramos a solução de uma rede não linear pelo Método de Refinamento Hierárquico. Uma curva de solução bidimensional foi traçada no plano V_{RT} , mostrando o processo de refinamento e evidenciando a propriedade da imanência da curva de solução apresentado no Capítulo 5.

O item 6.5 tratou da aplicação do Método de Refinamento Hierárquico na solução de redes hidráulicas. A formulação de redes hidráulicas foi sinteticamente discutida, e apresentamos a solução de um problema clássico da literatura.

O item 6.6 faz finalmente algumas considerações de performance computacional, nas quais concluímos que o Método de Refinamento Hierárquico possui melhor desempenho operando com um número reduzido de pontos de quebra, fazendo a janela inicial de interpolação a menor possível. Também verificamos que, nessas circunstâncias, o tempo de solução praticamente independe da solução inicial arbitrária.

Capítulo 7

CONCLUSÕES

Neste capítulo apresentaremos as conclusões do nosso estudo, ressaltando os principais resultados obtidos e apontando possíveis encaminhamentos de futuros trabalhos.

7.1. Considerações Gerais

Ao longo destas páginas desenvolvemos um amplo estudo sobre redes resistivas não lineares, constituídas por geradores independentes de tensão e de corrente, bem como por resistores não lineares de características monotonicamente crescentes.

Como principal resultado, apresentamos no Capítulo 5 o Algoritmo de Refinamento Hierárquico para solução numérica de redes deste tipo. O método de Refinamento Hierárquico possui prova matemática de convergência e, de acordo com os resultados do Capítulo 6, apresentou bons desempenhos computacionais.

A idéia básica por trás do Método de Refinamento Hierárquico consiste em chegar à solução da rede resolvendo séries de redes LPP, obtidas por interpolações LPP cada vez mais acuradas da rede original.

Para tanto, foi de fundamental importância o estudo da teoria das redes LPP, desenvolvido no Capítulo 4, bem como o estudo do algoritmo de Katzenelson, capaz de determinar com garantia de convergência a solução de redes LPP em um número finito de iterações.

Um importante resultado obtido no Capítulo 5 foi a propriedade da imanência da curva de solução na próxima região linear a ser refinada. Segundo esta propriedade, a curva de solução, nos refinamentos subsequentes, permanece interior à região linear que contém a solução da rede LPP anterior.

Assim, uma vez solucionada uma rede LPP, o próximo refinamento será feito somente dentro de uma pequena região do espaço, onde se tem certeza de que estará a solução da próxima rede LPP. Esta propriedade não só torna viável, como confere grande agilidade computacional ao Método de Refinamento Hierárquico.

7.2. Escolha dos Parâmetros de Simulação

A performance computacional do Algoritmo de Refinamento Hierárquico na solução de uma rede não linear concreta é afetada por três fatores:

- Escolha da janela de interpolação inicial;
- Escolha do número de pontos de quebra para interpolação LPP das características dos resistores;
- Escolha do ponto inicial.

Para um melhor desempenho computacional, a janela de interpolação inicial de cada resistor deverá ser tanto menor quanto possível. No entanto, o método exige que a janela de interpolação inicial contenha simultaneamente a tensão do resistor no ponto inicial e a tensão do resistor na solução. Em casos práticos, esta janela é estimada suficientemente grande para satisfazer a estes requisitos.

No Capítulo 6 pudemos verificar que o tempo de solução é proporcional ao número de pontos de quebra arbitrado. Concluimos, portanto, que o Método de Refinamento Hierárquico é otimizado quando estabelecemos poucos pontos de quebra para interpolação dos resistores.

Nesta configuração otimizada, verificamos ainda que o tempo de solução praticamente independe da solução inicial estabelecida.

7.3. Aplicação em Solução de Circuitos Elétricos

O Método de Refinamento Hierárquico aqui apresentado mostrou ser uma eficiente ferramenta de simulação de circuitos não lineares.

Dado que a maior parte dos dispositivos eletrônicos utilizados na prática possui curva característica *volt-ampère* monotonicamente crescente, pode-se prever a utilização do Método de Refinamento Hierárquico na simulação de uma ampla gama de circuitos com elementos lineares e não lineares, e, concretamente, na simulação de circuitos contendo componentes semicondutores.

7.4. Aplicação em Solução de Redes Hidráulicas

Destacamos ainda o Método de Refinamento Hierárquico como uma ferramenta valiosa na solução de redes hidráulicas.

Como foi dito no Capítulo 5, tradicionalmente os algoritmos para análise de redes hidráulicas tem sido avaliados empiricamente quanto a suas características de convergência. Até onde nossa revisão bibliográfica pôde alcançar, não existem métodos de solução de redes hidráulicas que apresentem simultaneamente garantia de convergência e eficiência computacional. Como vimos, o Método de Refinamento Hierárquico apresentou estas duas importantes características.

7.5. Trabalhos Futuros

Seguindo o curso da evolução da teoria das redes LPP a partir da sua origem (com o trabalho de Katzenelson), apontamos como sugestões para trabalhos futuros: a extensão do Método de Refinamento Hierárquico para solução redes mais genéricas, e, posteriormente, a sua extensão para regimes transitórios.

A generalização da rede poderá contemplar a inclusão de outros tipos de elementos no circuito, lineares ou não, tais como capacitores, indutores, fontes controladas, amplificadores operacionais, etc.

Além do mais, suprimindo-se a restrição da monotonicidade crescente nas características dos elementos, obtemos redes não lineares que podem apresentar múltiplas soluções. Diversos autores [17, 19, 21] propuseram métodos de solução de redes LPP com tais características. Nessa linha de pesquisa, vislumbramos a possibilidade de estender o Método de Refinamento Hierárquico para redes mais genéricas.

Mais recentemente, outros trabalhos foram apresentados a respeito da análise dinâmica de redes LPP [10, 11]. Nesta mesma linha, sugere-se o estudo da aplicação do Método de Refinamento Hierárquico na análise dinâmica de redes não lineares.

* * *

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

-
- [1] Duffin, R. J., “Nonlinear Networks II”, Bull. Am. Math. Soc., vol. 53, pp. 963-971, October 1947.
- [2] Introduction to Nonlinear Network Theory. Chua, L. O., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [3] Birkhoff, G., and Diaz, J. B., Nonlinear Network Problems, Quart. Appl. Math. 13, Jan., 1956, pp.194-212.
- [4] J. Katzenelson and Seitelman, L. H., “An Iterative Method for Solving Networks of Nonlinear Resistors”, IEEE T. Circuits Sys., vol. CT-13, pp. 317-323, 1966.
- [5] Minty, G. T., “Solving Steady State Nonlinear Networks of ‘Monotone’ Elements”, Trans. IRE. P. G. on Circuit Theory, CT-8, 2, June, 1961.
- [6] J. Katzenelson, “An Algorithm for Solving Nonlinear Resistor Networks”, Bell Sys. Tech. J., vol. 44, pp. 1605-1620, October 1965.
- [7] Kuh, E. S. and Hajj, I., “Nonlinear Circuit Theory – resistive networks”, Proc. IEEE, 59 (1971), pp. 340-355.
- [8] Computer Methods for Circuit Analysis and Design, Vlach, J. and Singhal, Kishore. Van Nostrand Reinhold, 2^a ed., 1993.
- [9] Desoer, C. A. and Katzenelson, J., “Nonlinear RLC Networks”, B.S.T.J., vol. 44, pp. 161-198, Jan 1965.
- [10] Camlibel, M.K.; Heemels, W.P.M.H.; Schumacher, J.M.H. Consistency of a time-stepping method for a class of piecewise-linear networks. Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on , Volume: 49 Issue: 3 , March 2002 Page(s): 349 -357

-
- [11] Heemels, W.P.M.H.; Camlibel, M.K.; Schumacher, J.M. On the dynamic analysis of piecewise-linear networks. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on , Volume: 49 Issue: 3 , March 2002 Page(s): 315 -327
- [12] Roos, J.; Valtonen, M. General-purpose piecewise-linear DC analysis. *Electronics, Circuits, and Systems*, 1996. ICECS '96., Proceedings of the Third IEEE International Conference on , Volume: 2 , 1996 Page(s): 792 -795 vol.2
- [13] Van Bokhoven, W.M.G.; Leenaerts, D.M.W. Explicit formulas for the solutions of piecewise linear networks. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on , Volume: 46 Issue: 9 , Sept. 1999 Page(s): 1110 -1117
- [14] Pejovic, P.; Maksimovic, D. An algorithm for solving piecewise-linear networks that include elements with discontinuous characteristics. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on , Volume: 43 Issue: 6 , June 1996 Page(s): 453 -460
- [15] Brzobohaty, J.; Pospisil, J.; Hanus, S. Explicit circuit models of multi-dimensional piecewise-linear networks. *Circuits and Systems*, 1994. ISCAS '94., 1994 IEEE International Symposium on , Volume: 6 , 1994 Page(s): 173 -176 vol.6
- [16] Lin, J.-N.; Unbehauen, R. On the quadratic extension of the canonical piecewise-linear network. *Circuits and Systems*, 1992. ISCAS '92. Proceedings, 1992 IEEE International Symposium on , Volume: 1 , 1992 Page(s): 316 -319 vol.1
- [17] Huang, Q.; Liu, R. A simple algorithm for finding all solutions of piecewise-linear networks. *Circuits and Systems*, IEEE Transactions on , Volume: 36 Issue: 4 , April 1989 Page(s): 600 -609
- [18] Brzobohaty, J.; Pospisil, J. Multidimensional piecewise linear network synthesis. *Circuit Theory and Design*, 1989., European Conference on , 1989 Page(s): 552 -556

-
- [19] Huang, Q., Liu, R.; A simple method for all solutions of a piecewise linear network Circuits and Systems, 1988., IEEE International Symposium on, 1988 Page(s): 1233 -1236 vol.2.
- [20] Apostila do curso de Simulação de Circuitos Elétricos, L. Q. Orsini e Flávio Cipparrone, 2002. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [21] Stevens, S. N., and Lin, P. M., Analysis of Piecewise Linear Networks using Complementary Pivot Theory, IEEE Trans. Circuits Syst., vol 28, pp429-441, May 1981.
- [22] Chien, M. and Kuh, E.S., Solving Nonlinear Resistive networks Using Piecewise-Linear Analysis and Simplicial Subdivision, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 24, pp.305-317, June 1977.
- [23] Zaghloul, M. E., and Bryant, P. R., Error Bounds on Solutions of Nonlinear Networks When Using Approximate Elements Characteristics, IEEE Trans. Circuits Syst., Vol. 27, pp.20-29, Jan 1980.
- [24] Curso de Circuitos Elétricos, Orsini. Luís Q. e Consonni, D., Vol. 1, 2ª edição, Ed. Edgard Blucher, São Paulo, 2002.
- [25] Graph Algorithms. Shimon Even. Computer Science Press, Inc. 1997.
- [26] Basic Circuit Theory, Desoer, Charles A. and Kuh, Ernest S., Vol. 1, Ed. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [27] Curso de Análise, vol. 1. Elon Lages Lima. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1976.
- [28] Linear and Nonlinear Circuits. Chua, Leon O.; Desoer. Charles A.; Kuh, Ernest S. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [29] Nonlinear Circuits. Hastler, Martin & Neiryneck, Jackes. Artech House, Inc. Norwood, 1986.
- [30] Fujisawa, T. and Huh, E. S., Piecewise-Linear theory of Nonlinear Networks, Siam J. Appl. Math, Vol. 22, March 1972, pp. 307-328.

-
- [31] Calculus, Apostol, Tom M., Vol 1, Second Edition, Ed. Wiley International Edition, New York, 1967.
- [32] Curso de Análise, vol. 2. Elon Lages Lima. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1981.
- [33] Nagel, L. N. SPICE2: A Computer Program to Simulate Semiconductors circuits, Berkley, University of Califórnia, Memo ERL-M250, 1975.
- [34] Goffman, Casper and Pedrick, George. First Course in Functional Analysis. Prentice Hall Inc, pág. 27, 1965.
- [35] Cross, H. Analysis of flows in networks of conduits or conductors. Bull No. 286, Univ. of Illinois Engrg. Experiment Station, Urbana, III, 1936.
- [36] Martin, D. W. and Peters, G., The application of Newton's method to network analysis by digital computer. J. Inst. of Water Engrs., 17, pp. 115-129, 1963.
- [37] Wood, D. J. and Charles, C. O. A.; Hydraulic network analysis using linear theory; J. Hydre. Di. ASCE, 98(HY7), pp. 1157-1170, 1972.
- [38] Todini, E., and Pilati, C; A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. Proc. Comp. Applications in Water Supply, B. Coulbeck and C. Orr. Eds., Research Studies Press, Letchworth, Hertfordshire, England, pp. 1-20, 1988.
- [39] Berghout, B. L. and Kuczera, G., Network linear programming as pipe network hydraulic analysis tool, J. Hydre. Di. ASCE, pp. 549-558, june1997.
- [40] Wood, D. J. and Rayes, A. G., Reability of algorithms for pipe network analysis. J. Hydre. Di. ASCE, 107(HY7), pp. 1145-1161, 1981.
- [41] Collins, M., Cooper, L., Helgason, R., Kennington, J. and LeBlanc, L. "Solving the pipe network analysis problem using optimization technics", Mgmt. Sci., 27(7), pp. 747-760, 1978.
- [42] Cipparrone, Flávio e Carvalho, André T. Aplicação do Método Iterativo de Seitelman-Katzenelson em Análise de Redes Hidráulicas, XVII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos; Curitiba, novembro de 2003.

-
- [43] Cipparrone, Flávio e Carvalho, André T. Análise topológica de cortes aplicada à formulação de redes hidráulicas; XVII Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste, São Luís -MA, dezembro de 2004.
- [44] Wood, D. J. and Rayes, A. G., “Reability of algorithms for pipe network analysis”. J. Hydre. Di. ASCE, 107(HY7), pp. 1145-1161, 1981.