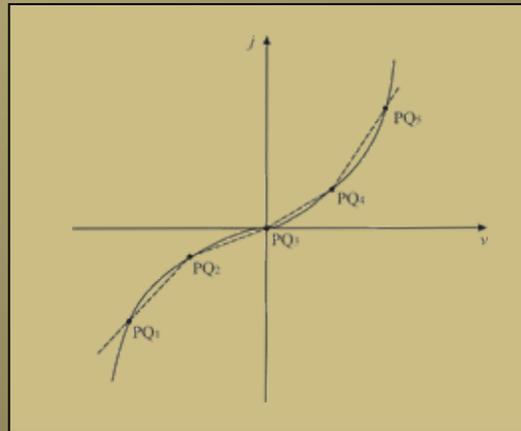


MÉTODO DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO PARA SOLUÇÃO DE REDES RESISTIVAS NÃO LINEARES



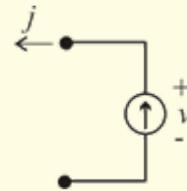
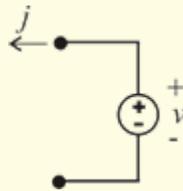
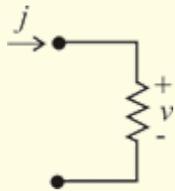
André Tomaz de Carvalho
PSI – POLI – USP

Estrutura da Dissertação

- Capítulo 1
 - Escopo do problema
- Capítulo 2
 - Definições, teoria dos circuitos
- Capítulo 3
 - Formulação de redes lineares e não lineares
- Capítulo 4
 - Solução de redes LPP pelo algoritmo de Katzenelson
- Capítulo 5
 - Método de Refinamento Hierárquico
- Capítulo 6
 - Simulações Computacionais
- Capítulo 7
 - Conclusões

Escopo do Problema

- Solucionar redes não lineares compostas por:
 - Resistores não lineares de característica monotonicamente crescente
 - Geradores independentes de tensão
 - Geradores independentes de corrente



Teorema Fundamental das Redes Resistivas [Duffin - 1947]

- Condições para Existência e Unicidade da Solução:
 - A característica dos resistores é uma função estritamente monotonicamente crescente;
 - $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} i = \pm\infty$;
 - A rede não possui laços constituídos só por fontes de tensão, nem tampouco cortes constituídos só por fontes de corrente.

Métodos de Solução

- Não existem métodos de solução analítica.
- É necessário utilizar métodos numéricos de solução.
 - Newton-Raphson;
 - Hard-Cross;
 - Método linear;
 - Método do gradiente;
 - Etc.

O que estamos buscando?

- Um método de solução que apresente, simultaneamente:
 - Eficácia computacional;
 - Garantia de convergência.

Como pretendemos chegar a isso?

- Katzenelson [1969] – Método de solução de redes resistivas LPP (de características monotonicamente crescentes).
- O método possui prova matemática de convergência.
- Nossa Idéia: chegar à solução da rede não linear resolvendo redes LPP que são aproximações cada vez mais acuradas da rede não linear.

Seqüência desta Apresentação

- Capítulo 1
 - Introdução
- Capítulos 4 e 6
 - Algoritmo de Katzenelson
 - Prova de Convergência
 - Simulações Computacionais
- Capítulo 5 e 6
 - Discussão sobre o Refinamento
 - Método de Refinamento Hierárquico
 - Prova de Convergência
 - Simulações Computacionais
- Capítulo 7
 - Conclusões
 - Resultados
 - Futuros Trabalhos

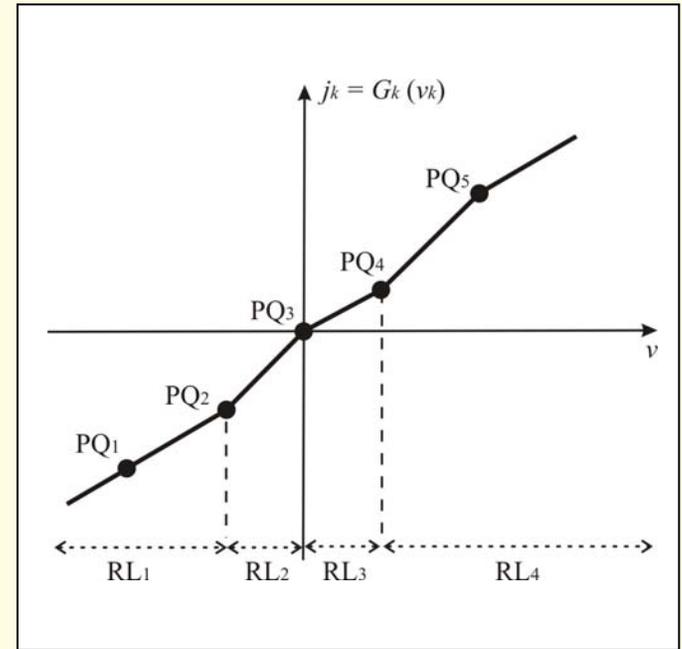
A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light olive green color.

Redes Resistivas LPP

Definição e Propriedades

Redes Resistivas LPP

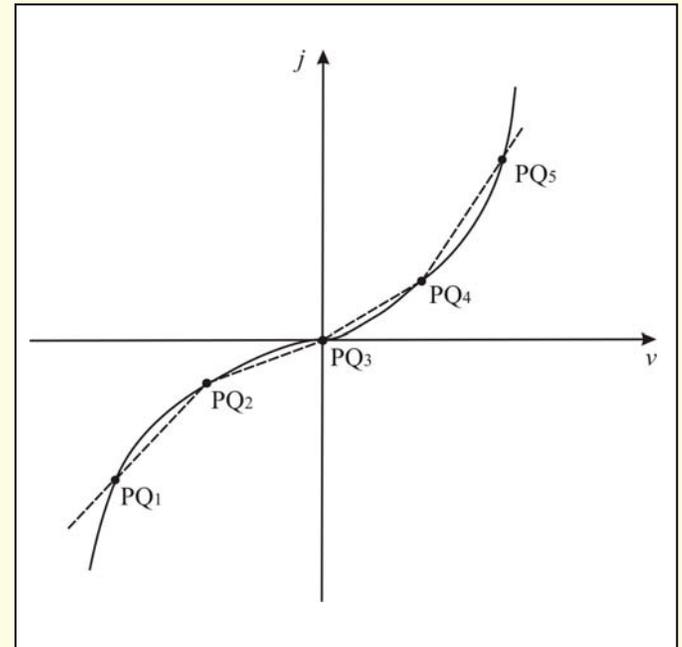
- Constituídas por:
 - Geradores independentes de tensão;
 - Geradores independentes de corrente;
 - Resistores cuja função característica é:
 - Contínua,
 - LPP,
 - Monotonicamente Crescente,
 - Definida em todo o eixo real.



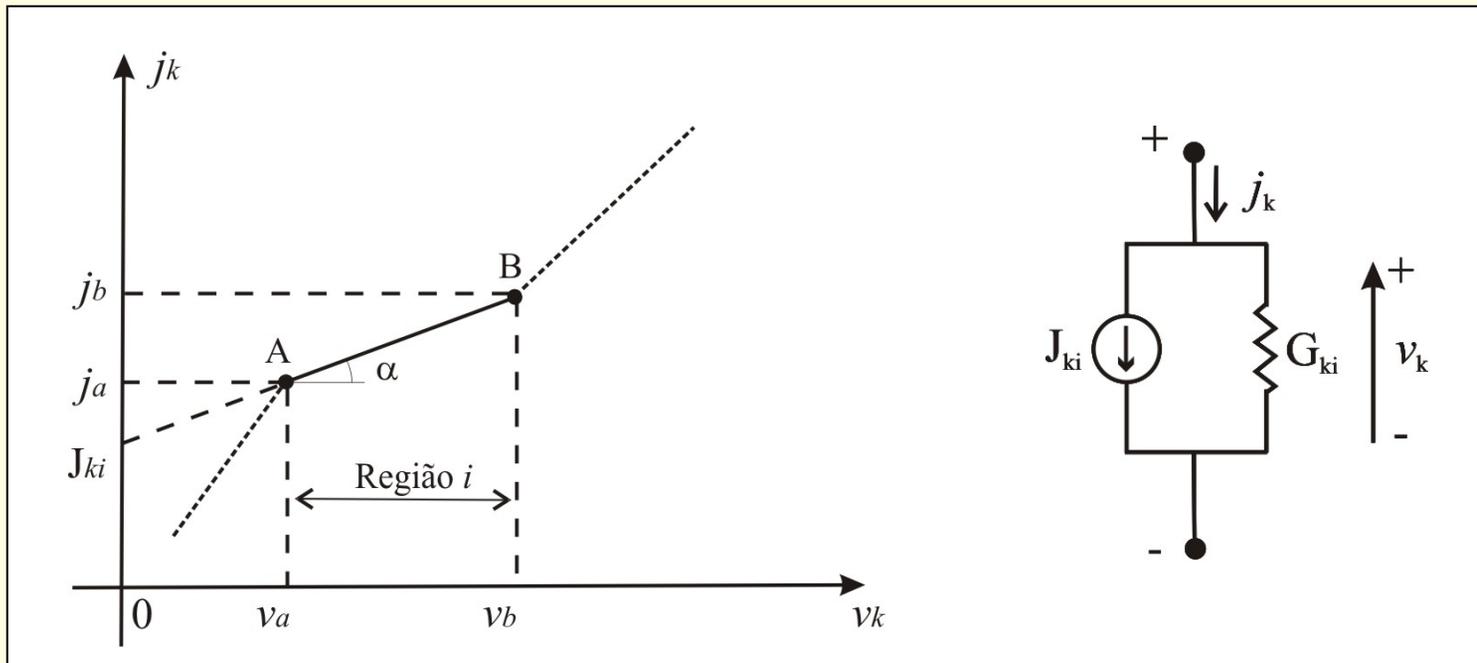
$$j_k = G_k(v_k)$$

Redes Resistivas LPP

- Note que, pelo *Teorema Fundamental das Redes Resistivas*:
 - A solução desse tipo de rede existe e é única.
- Resta-nos encontrar um método numérico apropriado de solução.



Bipolo linear equivalente de uma resistor LPP numa dada região.



$$j_k = G_k(v_k) = G_{ki}v_k + J_{ki}, \text{ onde:}$$

$$G_{ki} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{j_b - j_a}{v_b - v_a} \quad J_{ki} = j_a - G_{ki}v_a$$

Mapeamento LPP no \mathbb{R}^n

- Considere a equação da rede LPP:

$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \Gamma \left(\mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{bmatrix} \right) = -\mathbf{j}_{cs}$$

- Temos:

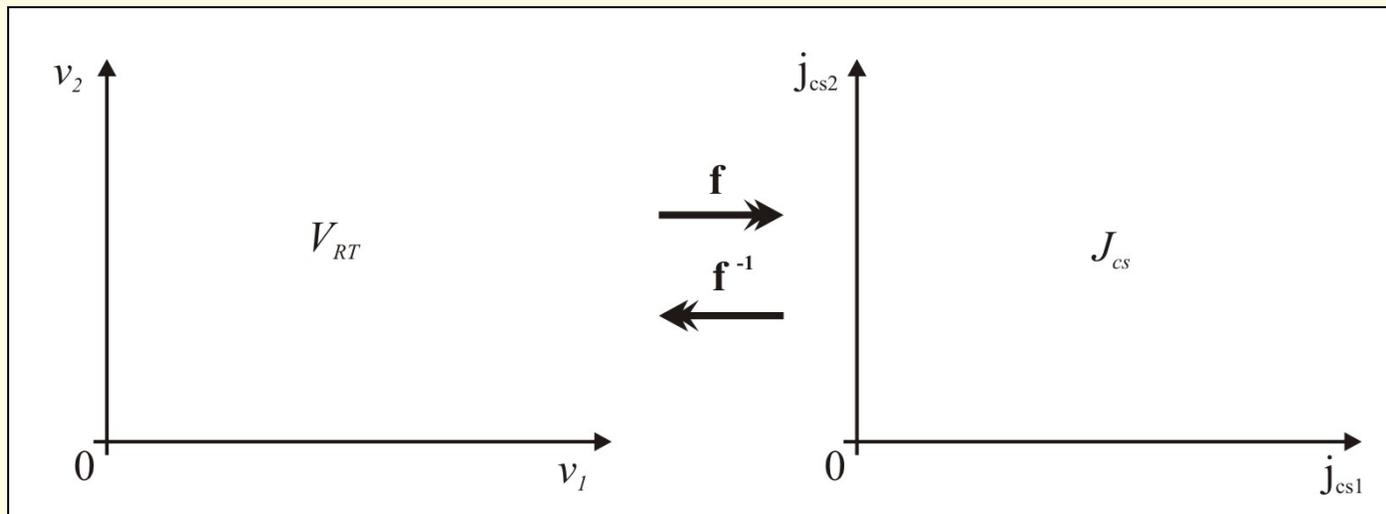
$$f_1 : (\mathbf{v}_E, \mathbf{v}_{RT}) \longrightarrow \mathbf{j}_{cs}$$

- Mas, dado que a solução existe e é única, temos:

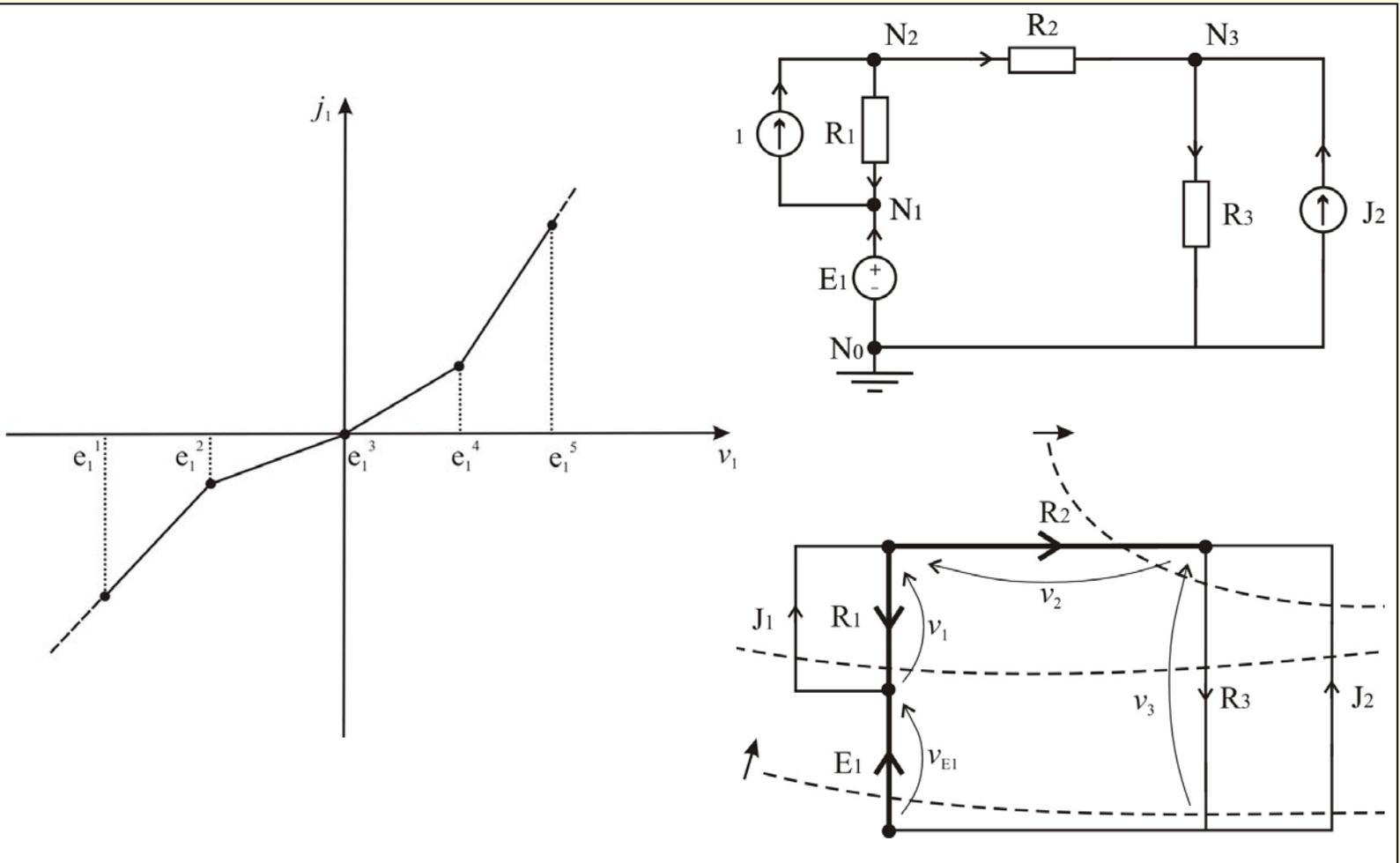
$$f_2 : (\mathbf{v}_E, \mathbf{j}_{cs}) \longrightarrow \mathbf{v}_{RT}$$

Mapeamento LPP no \mathbb{R}^n

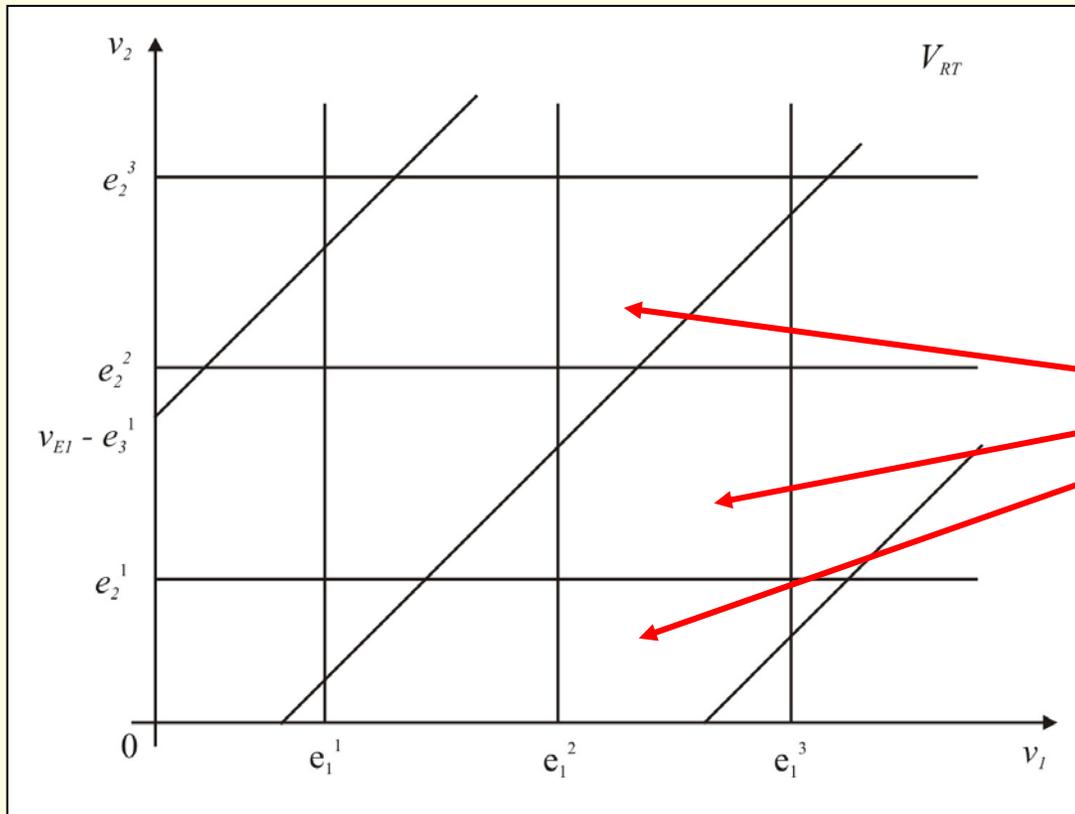
- Fixemos agora \mathbf{v}_E . Teremos que o mapeamento $\mathbf{v}_{RT} \leftrightarrow \mathbf{j}_{cs}$ é um homeomorfismo, isto é, a função e sua inversa são contínuas e bijetoras.



Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP no espaço V_{RT}

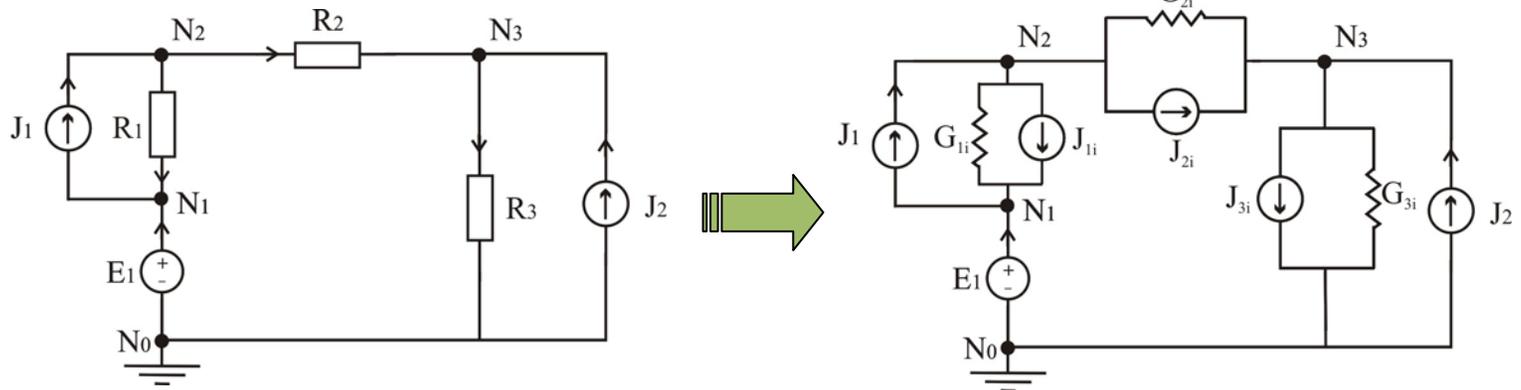


Lugar geométrico dos pontos de quebra dos resistores LPP no espaço V_{RT}



Regiões
Lineares

Rede linear equivalente de uma região



$$\mathbf{Q}_{T(R),R} \left(\mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \begin{bmatrix} \mathbf{V}_E \\ \mathbf{V}_{RT} \end{bmatrix} + \mathbf{j}_i \right) + \mathbf{j}_{cs} = \mathbf{0}, \text{ onde } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{1i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{(n+p)i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{j}_i = \begin{bmatrix} J_{1i} \\ \vdots \\ J_{(n+p)i} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Propriedade Fundamental

- Dentro de cada região linear, o mapeamento da rede LPP coincide com a função da rede linear equivalente da região.
- Essa propriedade é intensamente utilizada pelo Algoritmo de Katzenelson.

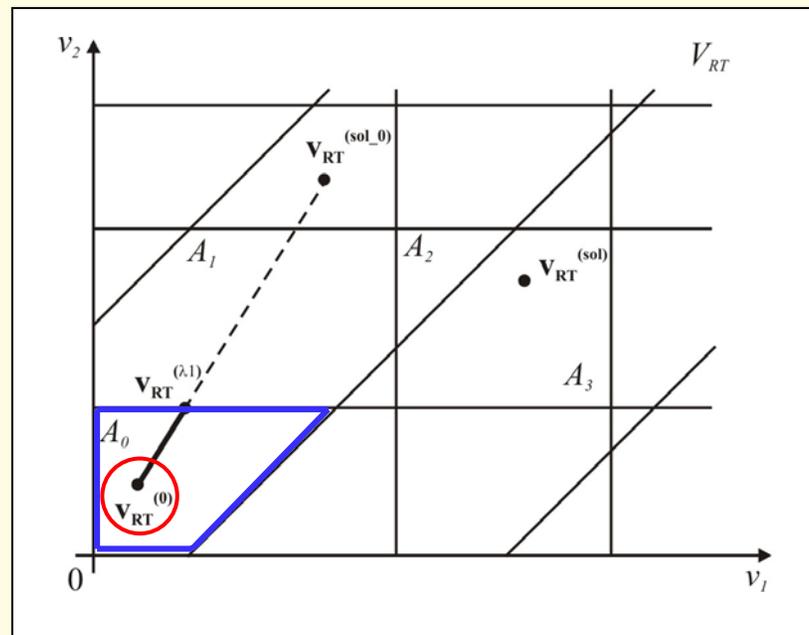
A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light greenish-yellow color with a subtle gradient.

Algoritmo de Katzenelson

Traçado da Curva de Solução

Curva de Solução (1)

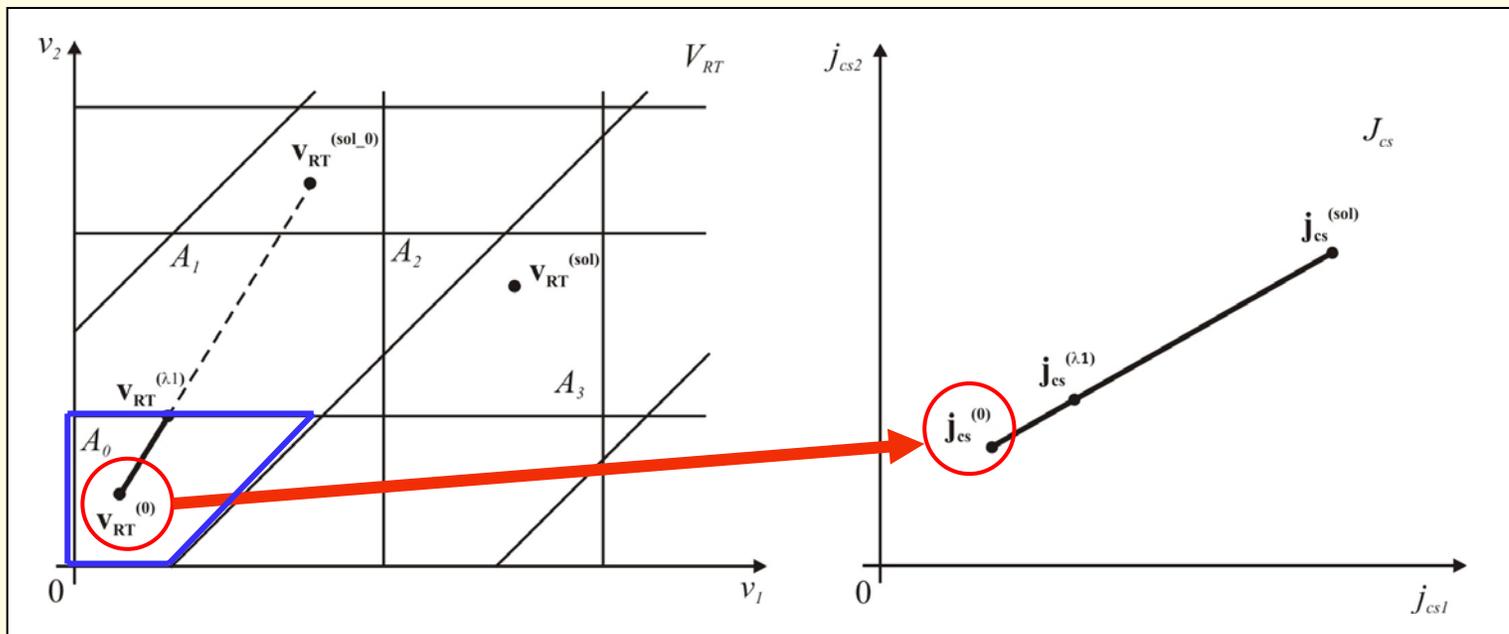
- Escolha do ponto inicial $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$
- Identificar a região linear de $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ no espaço V_{RT}



Curva de Solução (2)

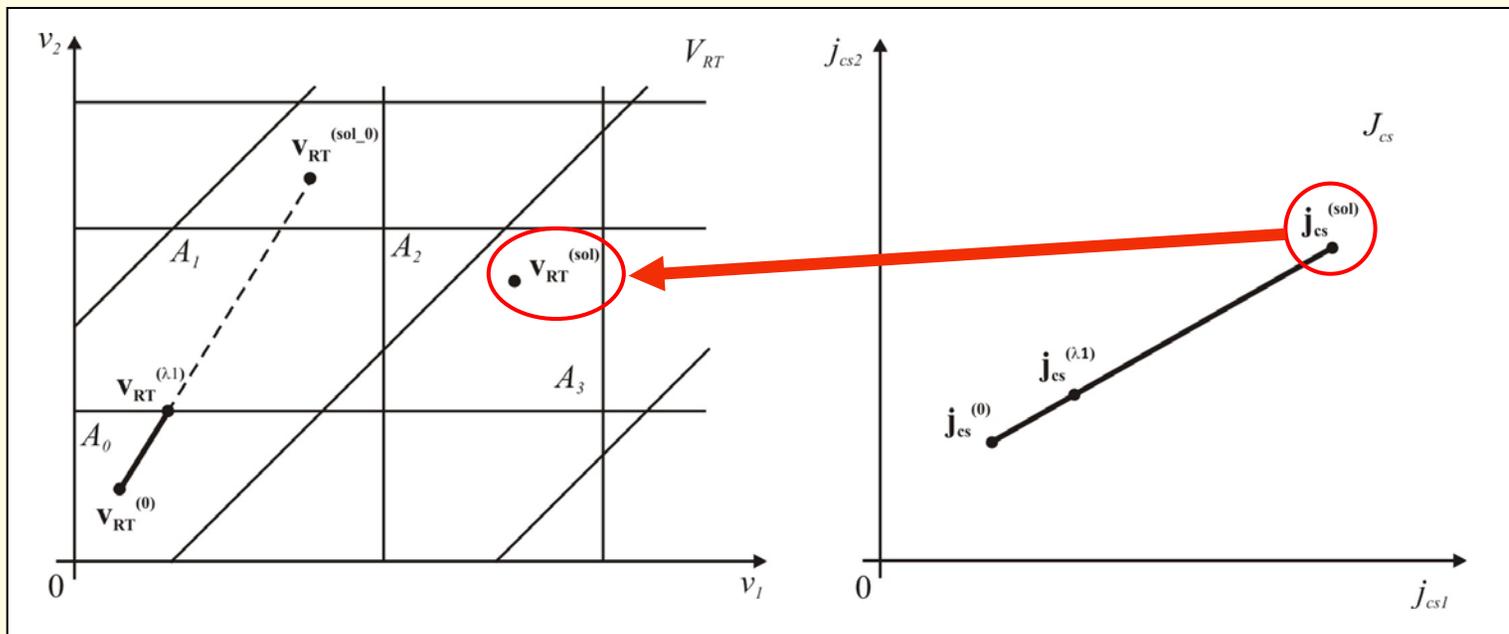
– Cálculo da imagem de $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ no espaço J_{cs} .

$$\mathbf{j}_{cs}^{(0)} = \mathbf{f}\left(\left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT}^{(0)} \end{array}\right]\right) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{j}_{cs}^{(0)} = -\mathbf{Q}_{T(R),R} \left(\mathbf{G}_i \mathbf{Q}_{T(ER),R}^t \left[\begin{array}{c} \mathbf{v}_E \\ \mathbf{v}_{RT} \end{array} \right] + \mathbf{j}_i \right)$$



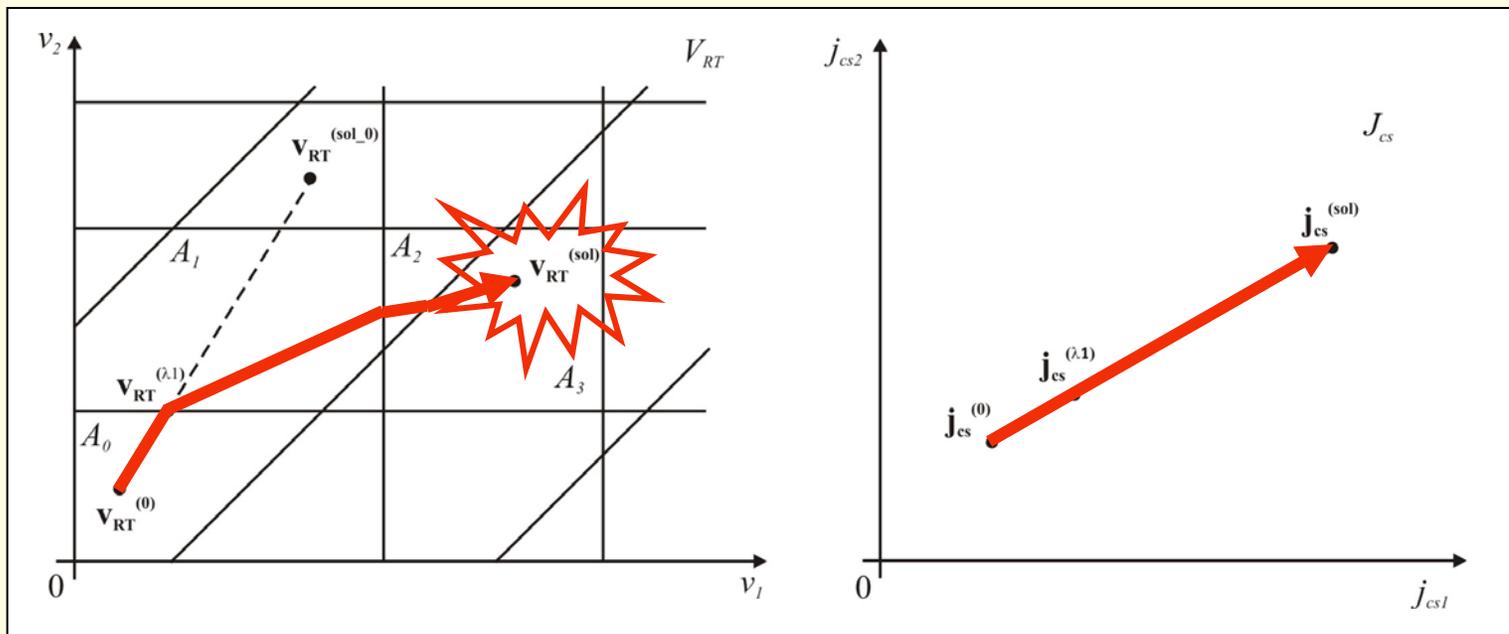
Curva de Solução (3)

- O ponto $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ é conhecido, pois é uma entrada da rede.
- A imagem inversa de $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ no espaço V_{RT} será a solução da rede, $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$



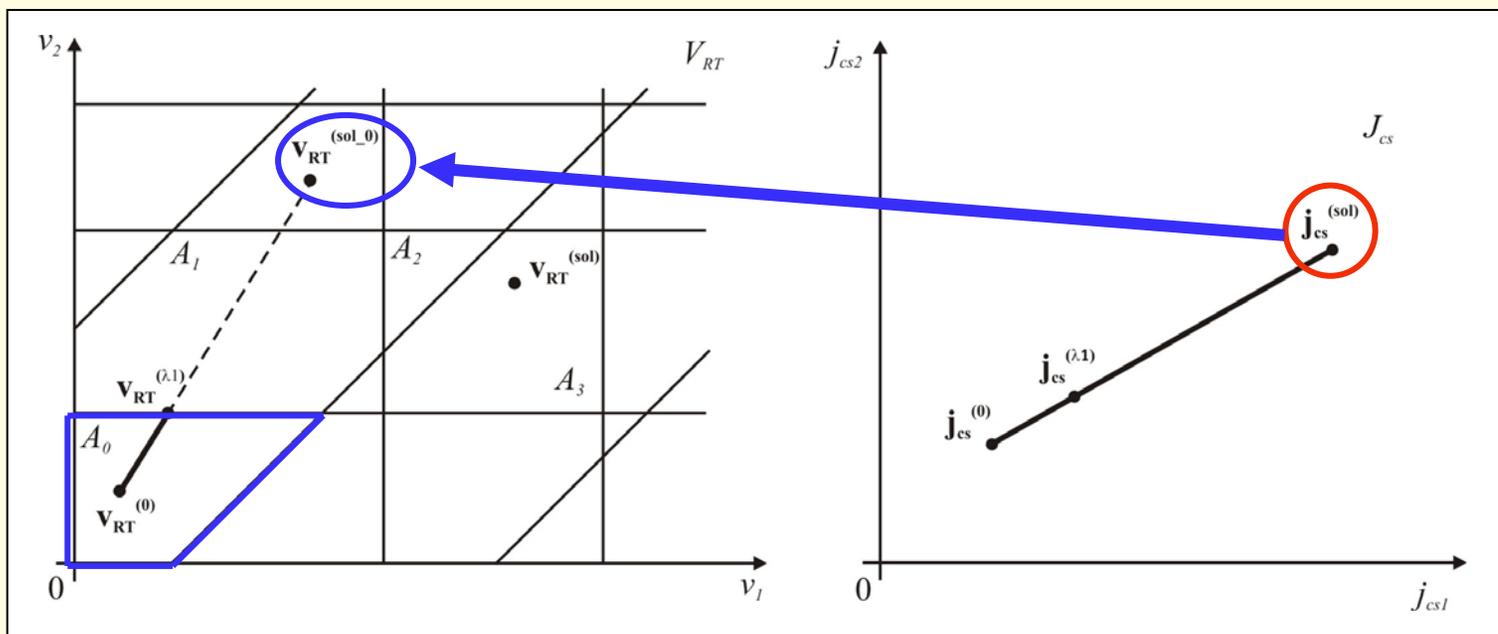
Curva de Solução (4)

- O Algoritmo chega até o ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ traçando a Curva de Solução, que é imagem inversa do segmento $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$ pelo mapeamento LPP.



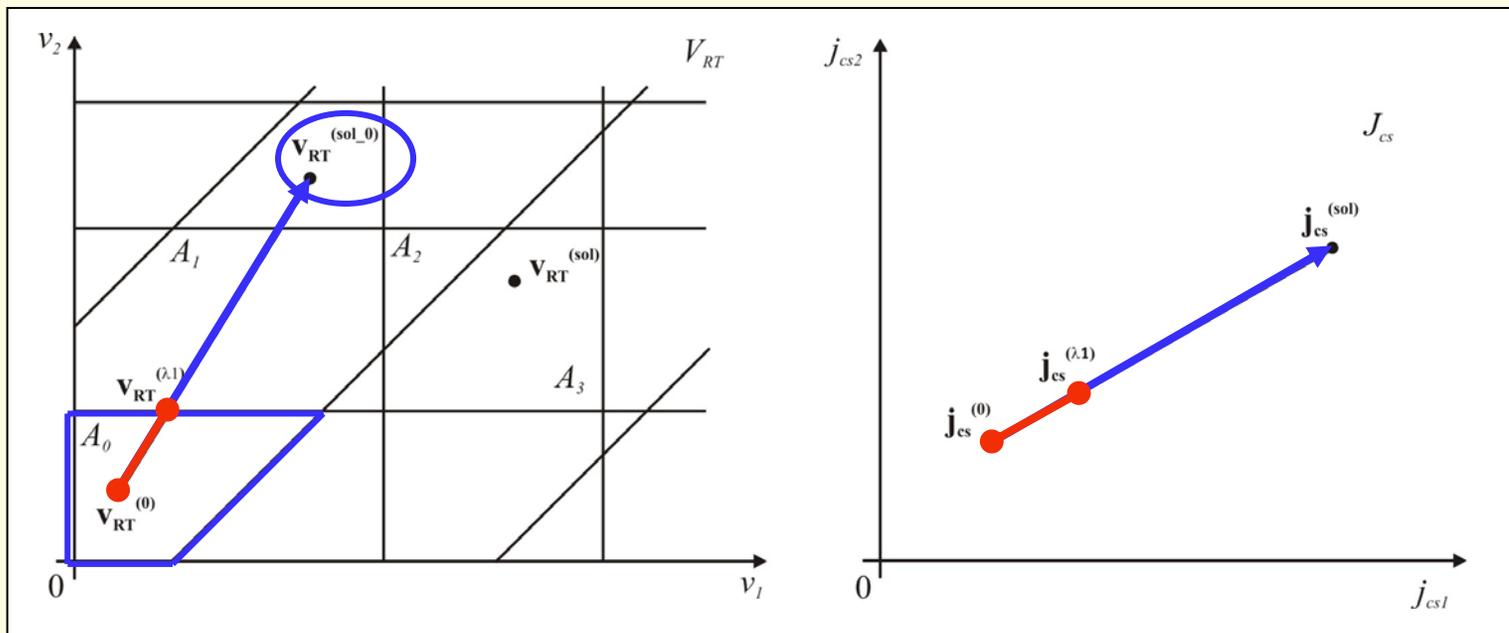
Traçado da Curva de Solução (1)

- Após a identificação da região A_0 , o algoritmo encontra a solução da rede linear equivalente dessa região: $\mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)}$.



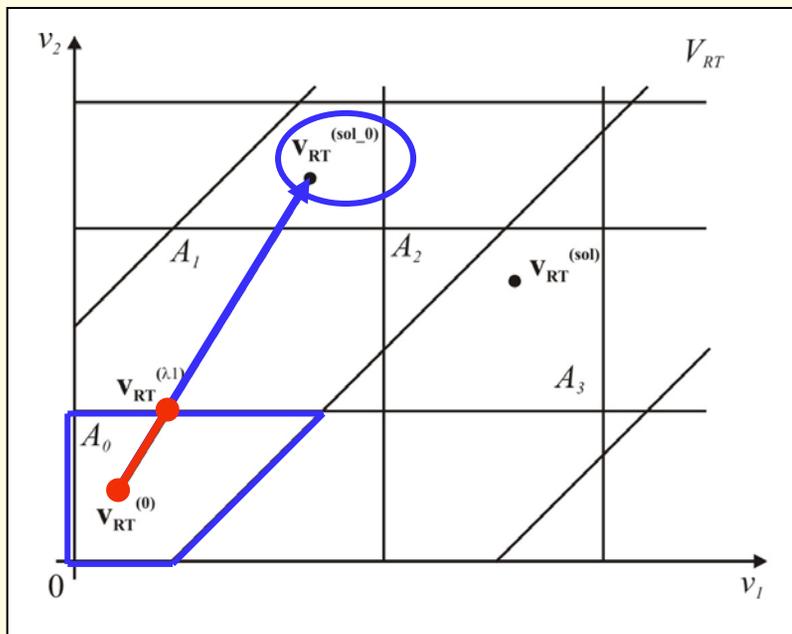
Traçado da Curva de Solução (2)

- O algoritmo querera percorrer todo o segmento $(\mathbf{v}_{RT}^{(0)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)})$.
- No entanto, esse segmento coincidirá com a curva de solução só enquanto esta estiver na região A_0 .



Traçado da Curva de Solução (3)

- Será necessário calcular λ_1 , que será a percentagem do segmento $(\mathbf{v}_{RT}^{(0)}, \mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)})$ que o algoritmo poderá percorrer sem ultrapassar nenhuma fronteira de A_0 .

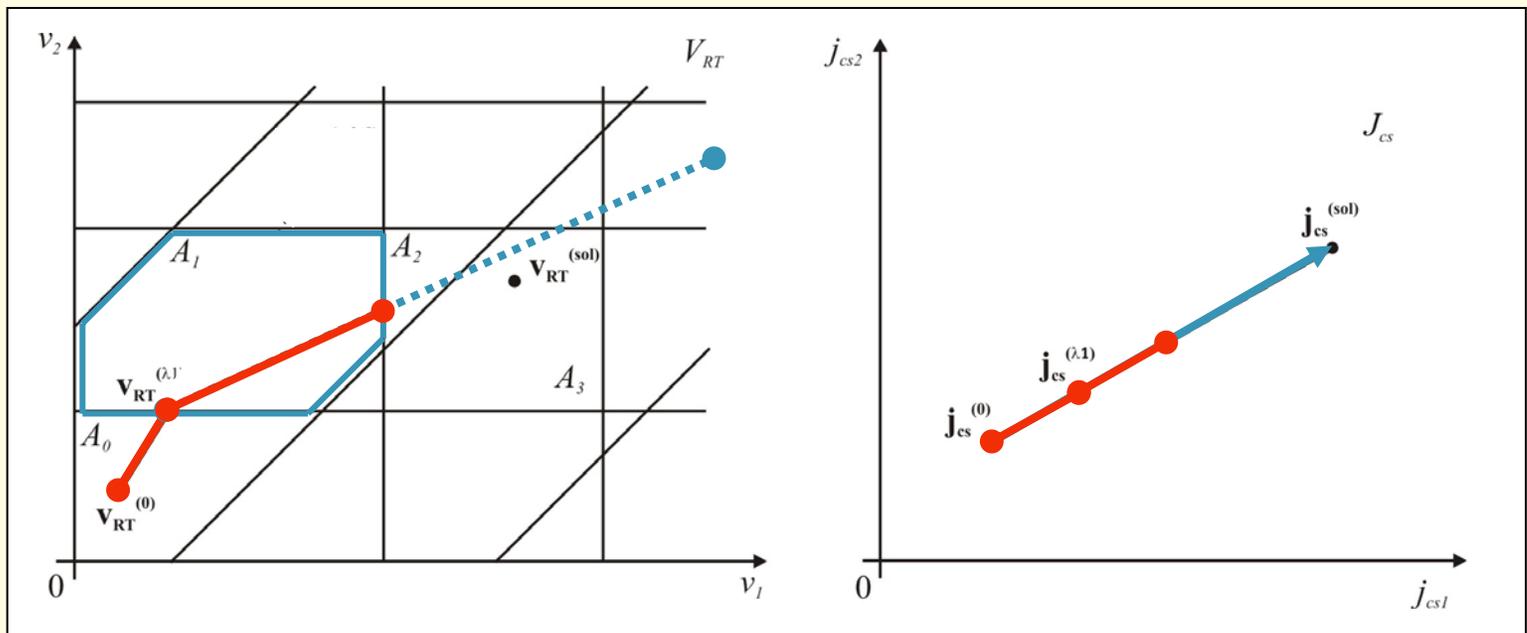


O ponto de intercessão da curva de solução com a fronteira de A_0 será $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)}$.

$$\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda_1)} = \mathbf{v}_{RT}^{(0)} + \lambda_1 \cdot (\mathbf{v}_{RT}^{(sol_0)} - \mathbf{v}_{RT}^{(0)})$$

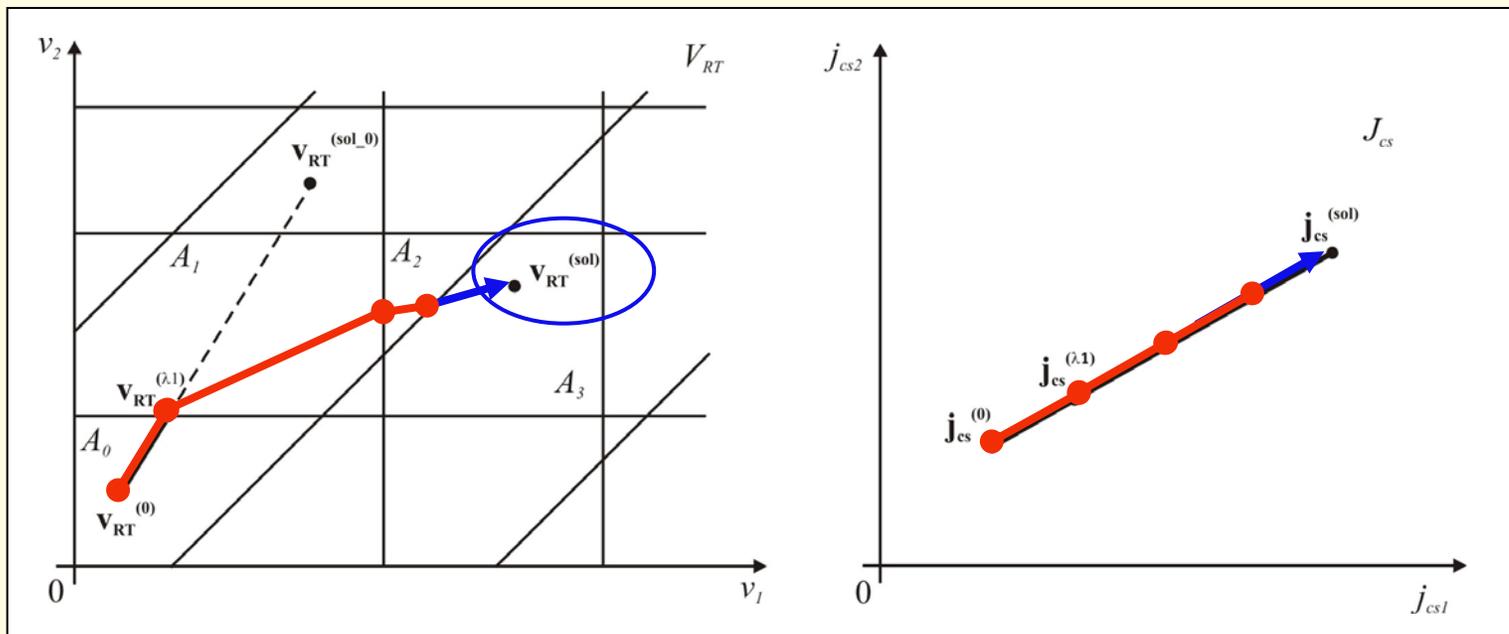
Traçado da Curva de Solução (4)

- Chegando ao ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 1)}$, o algoritmo identifica qual será a próxima região linear que a curva de solução irá percorrer, e repete o procedimento descrito anteriormente, chegando a $\mathbf{v}_{RT}^{(\lambda 2)}$.



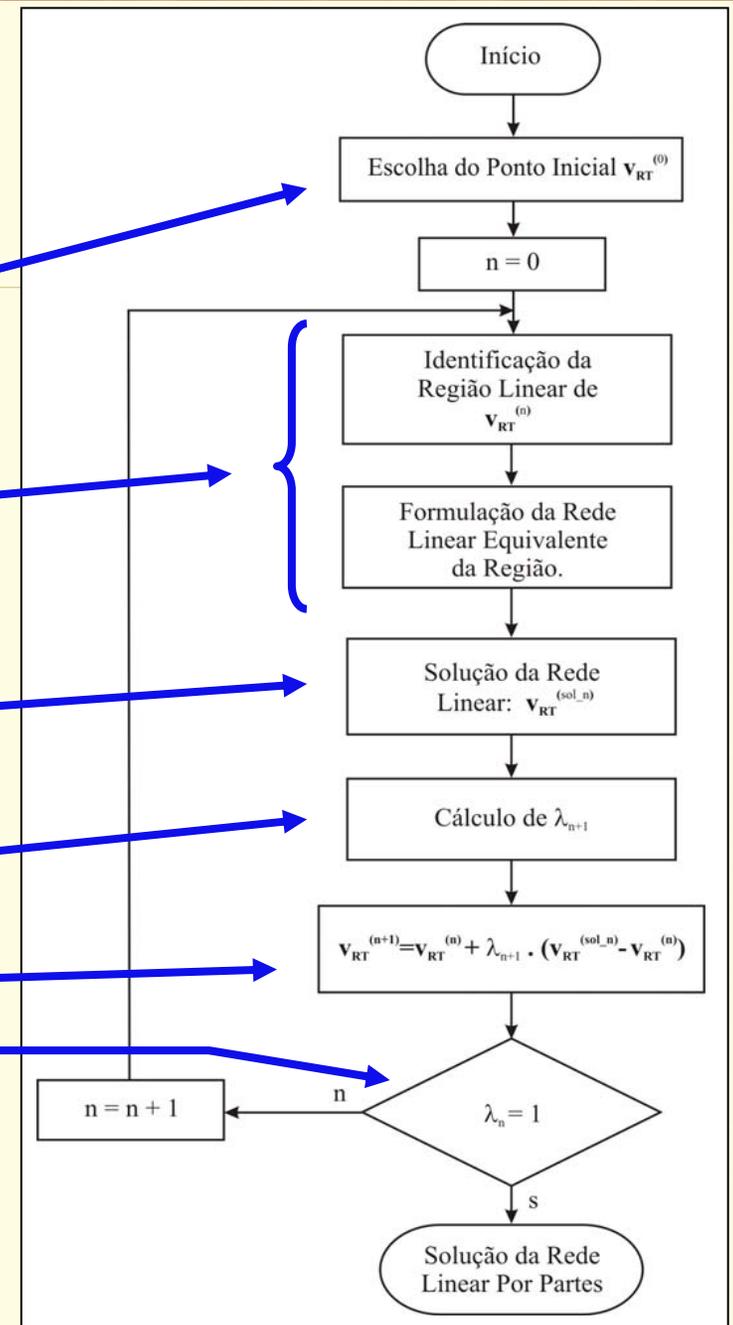
Critério de Parada

- O algoritmo para quando $\lambda = 1$. Ou seja, quando puder percorrer o final do segmento ($\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$, $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$) sem cruzar nenhuma fronteira.



Fluxograma

- Ponto Inicial
- Identificar Região Linear
- Solução da rede linear equivalente da região
- Cálculo de λ_{n+1}
- Cálculo de $\mathbf{v}_{RT}^{(n+1)}$
- Critério de parada



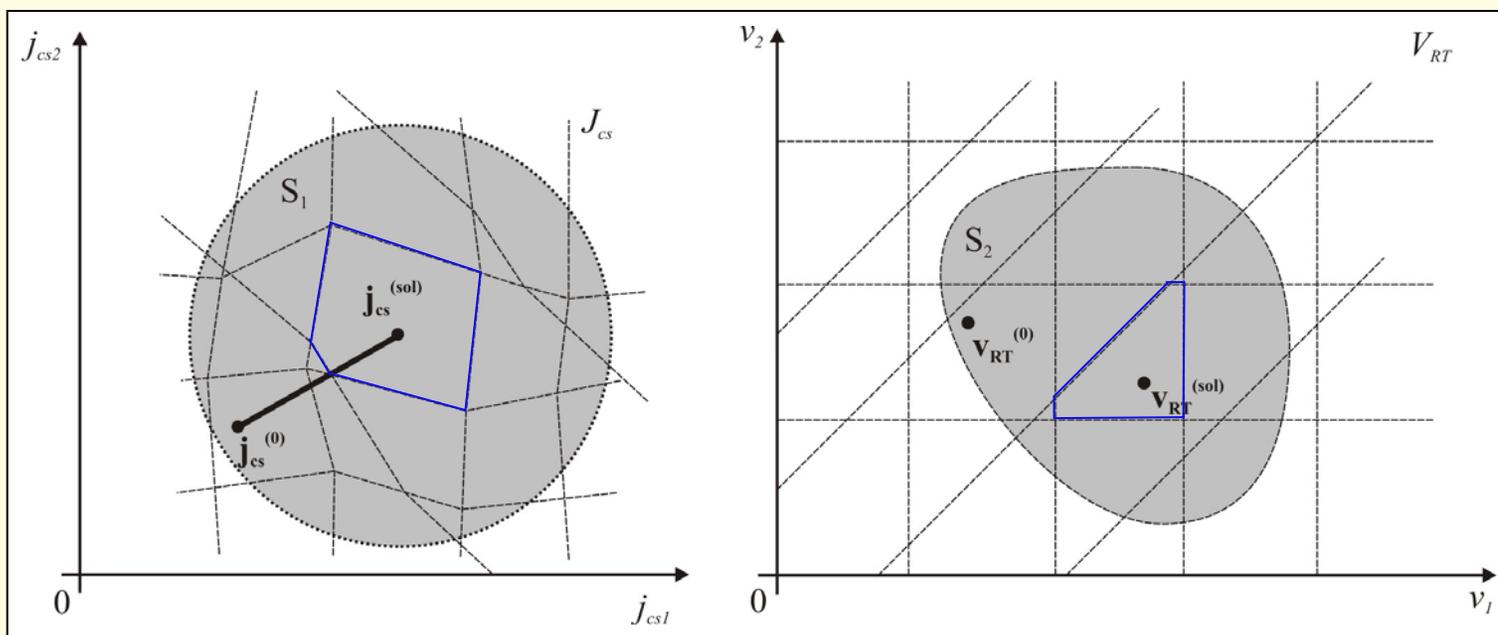
A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper.

Prova de Convergência

Algoritmo de Katzenelson

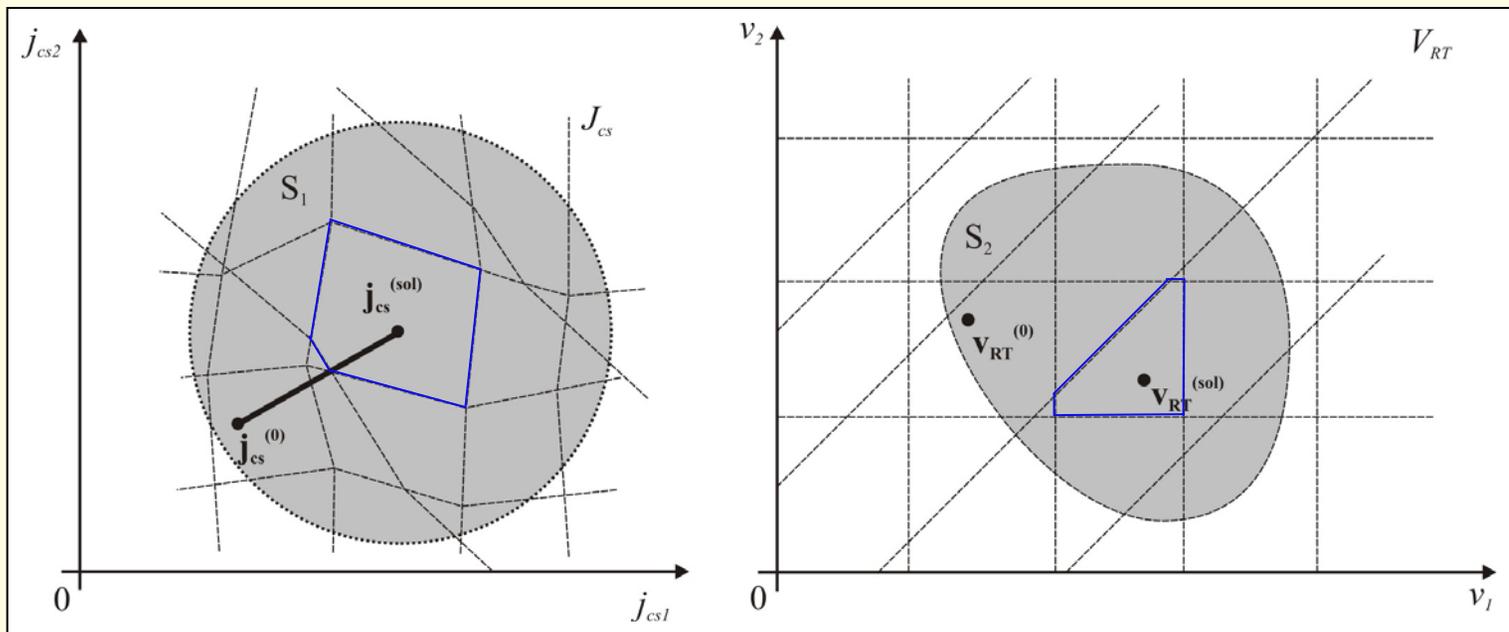
Prova de Convergência (1)

- As imagens das fronteiras de cada região serão segmentos de reta em J_{cs} .



Prova de Convergência (2)

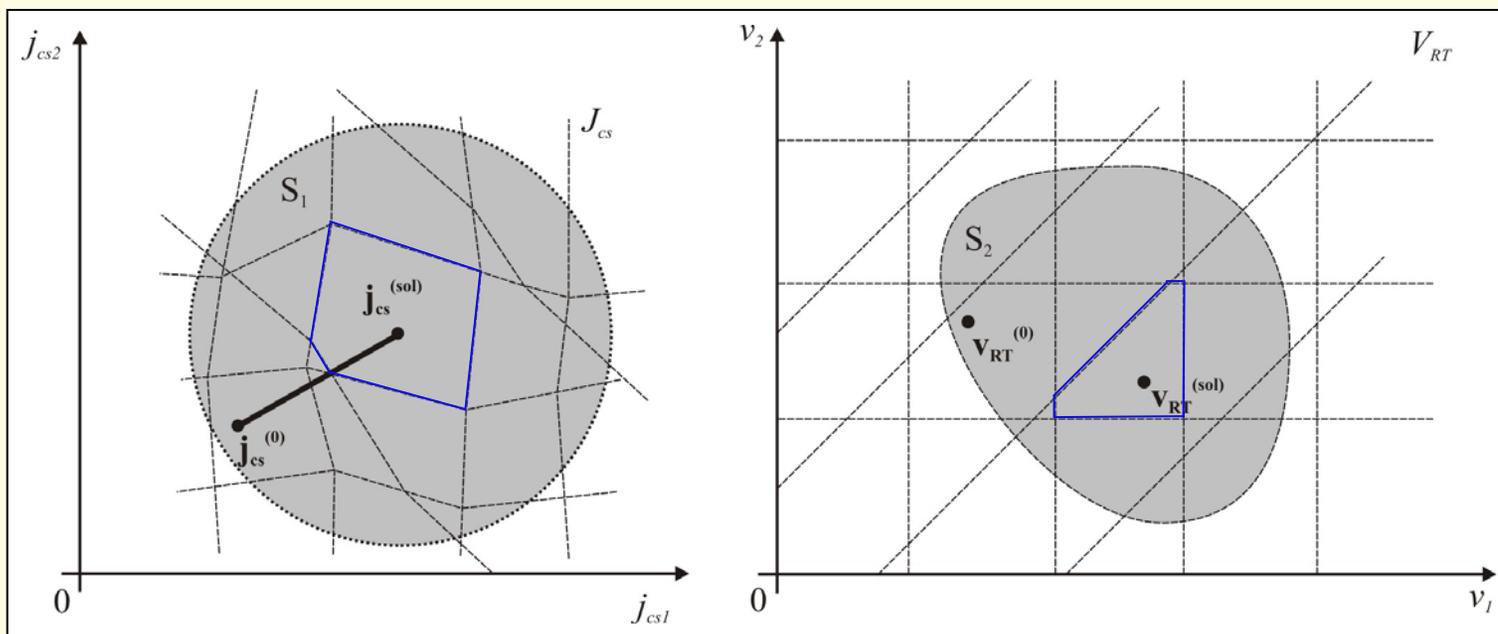
- Quando uma fronteira e a curva de solução possuem pontos em comum:
 - Cruzam-se em um ponto; ou
 - Possuem um segmento finito em comum.



Prova de Convergência (3)

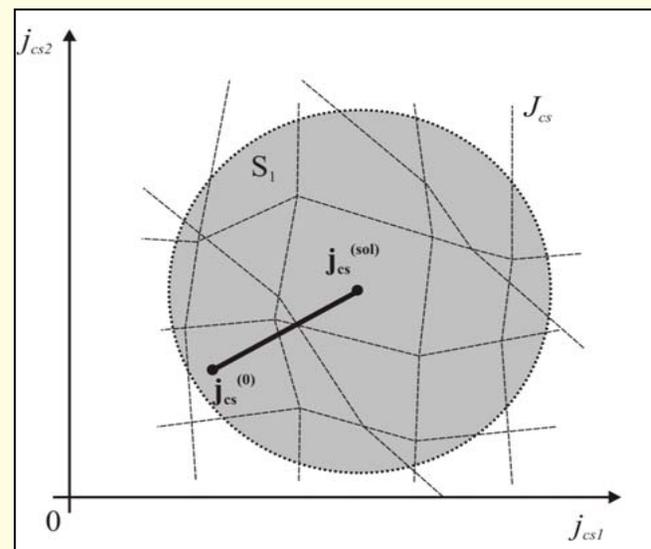
$$S_1 = \left\{ \mathbf{j}_{cs} \mid \left\| \mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs} \right\| \leq \left\| \mathbf{j}_{cs}^{(sol)} - \mathbf{j}_{cs}^{(0)} \right\| + \varepsilon, \varepsilon > 0 \right\}$$

$S_2 = f^{-1}(S_1)$ é compacto, pois S_1 é compacto e f^{-1} é contínua.



Prova de Convergência (4)

- Por hipótese, cada resistor possui número finito de pontos de quebra.
- Logo, S_1 possui um número finito de segmentos.
- Portanto, a curva de solução cruzará um número finito de fronteiras até chegar à solução.
- Logo, o algoritmo converge em um número finito de passos.

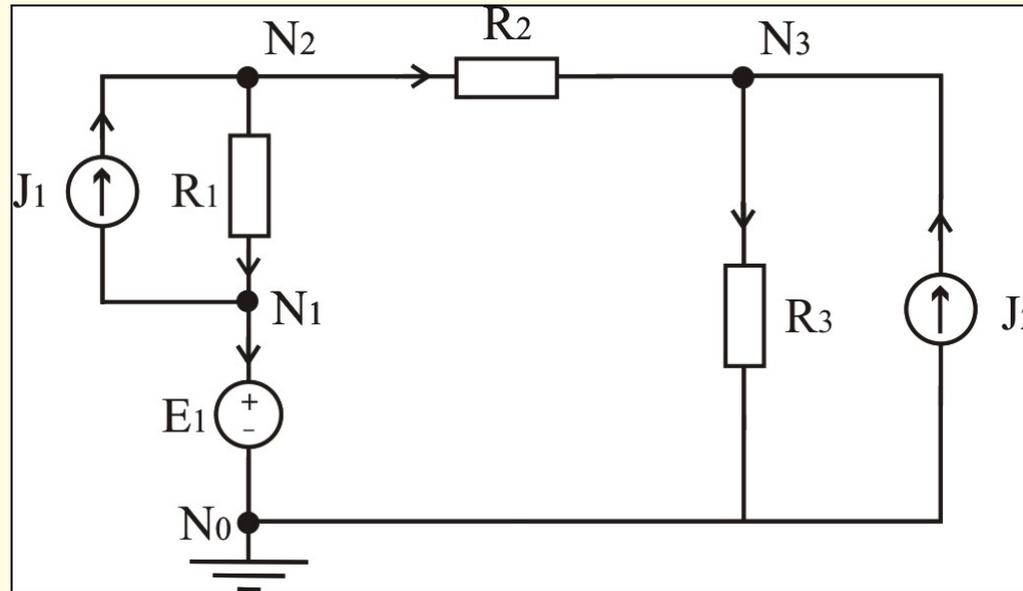


A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light olive green with a subtle gradient.

Exemplos

Simulações Computacionais

Exemplo 1 – Entrada de Dados



NL = [1 1 1 0 1 0 ;
2 0 2 1 -2 ;
3 2 1 2 0 1 ;
4 0 2 3 -2 ;
5 0 3 0 -2 ;
6 2 0 3 0 1] ;

$$E_1 = 10 \text{ V}$$

$$J_1 = 0,1 \text{ A}$$

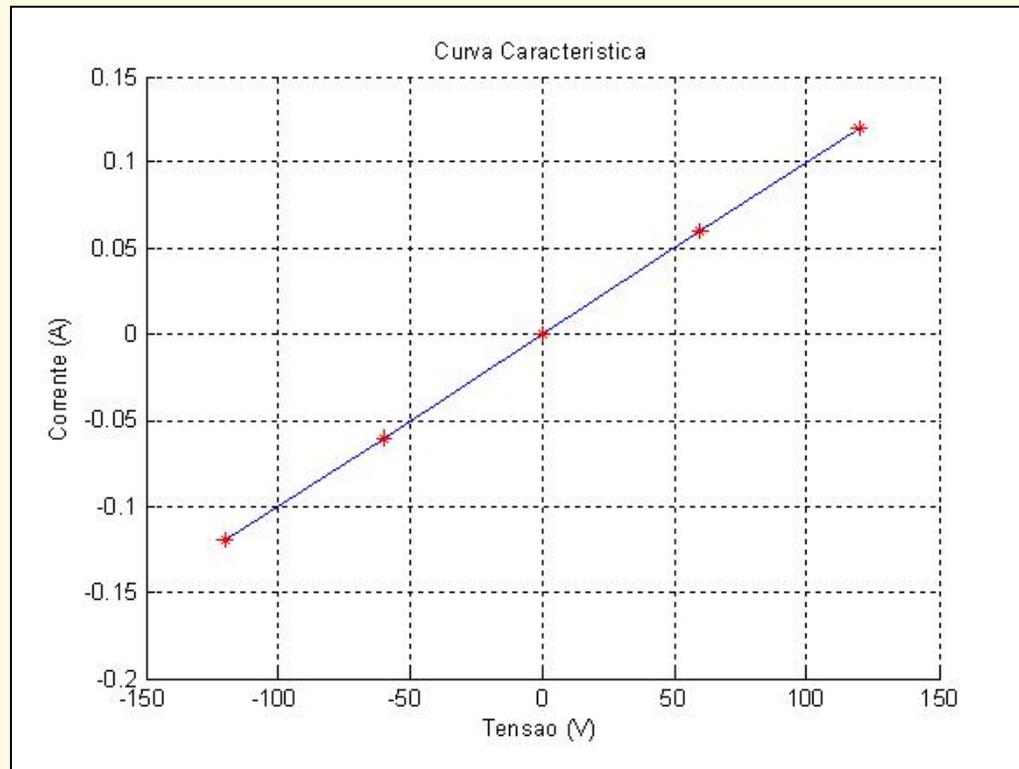
$$J_2 = 0,1 \text{ A}$$

Exemplo 1 – Definição dos Resistores LPP

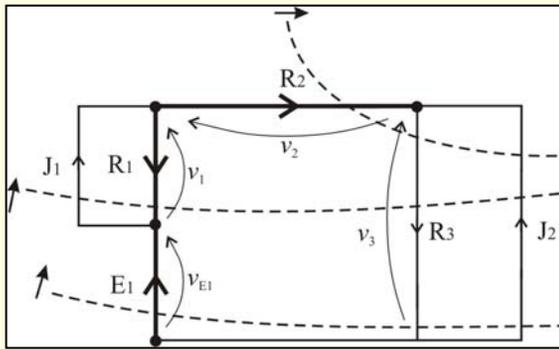
R = 1 k Ω

No. PQ = 5

Janela = [-120V, 120V]

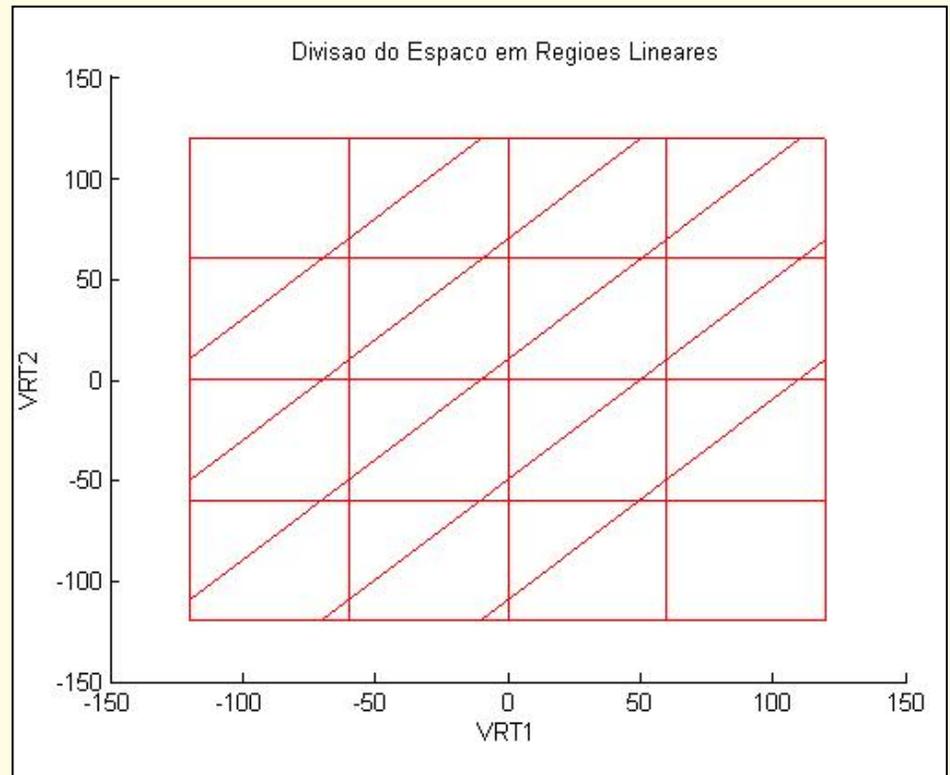


Exemplo 1 – Espaço V_{RT}

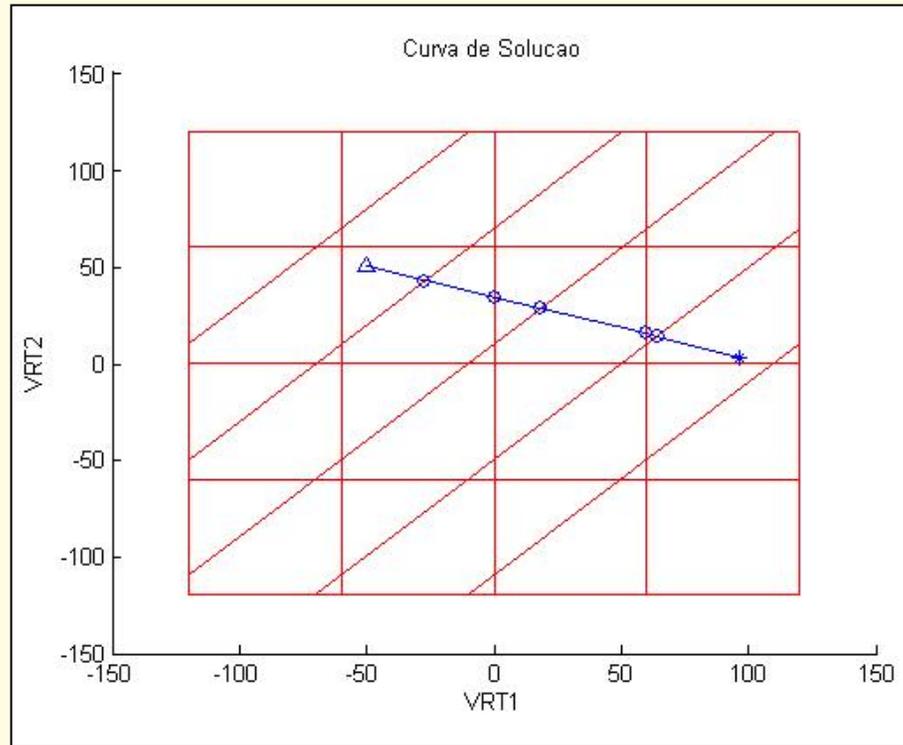


$$T = \{E_1, R_1, R_2\}$$

$$\mathbf{V}_{RT} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}$$



Exemplo 1 – Curva de Solução



Início: $\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} -50 \\ 50 \end{bmatrix}$

Final: $\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 96.6667 \\ 3.3333 \end{bmatrix}$

Exemplo 1 – Solução

```
>> solver(NL)
```

Solução pela Análise dos Conjuntos de Corte

Tempo de Inicialização =0.078s

Tempo de Processamento =0.016s

Tempo de Total =0.094s

Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =6

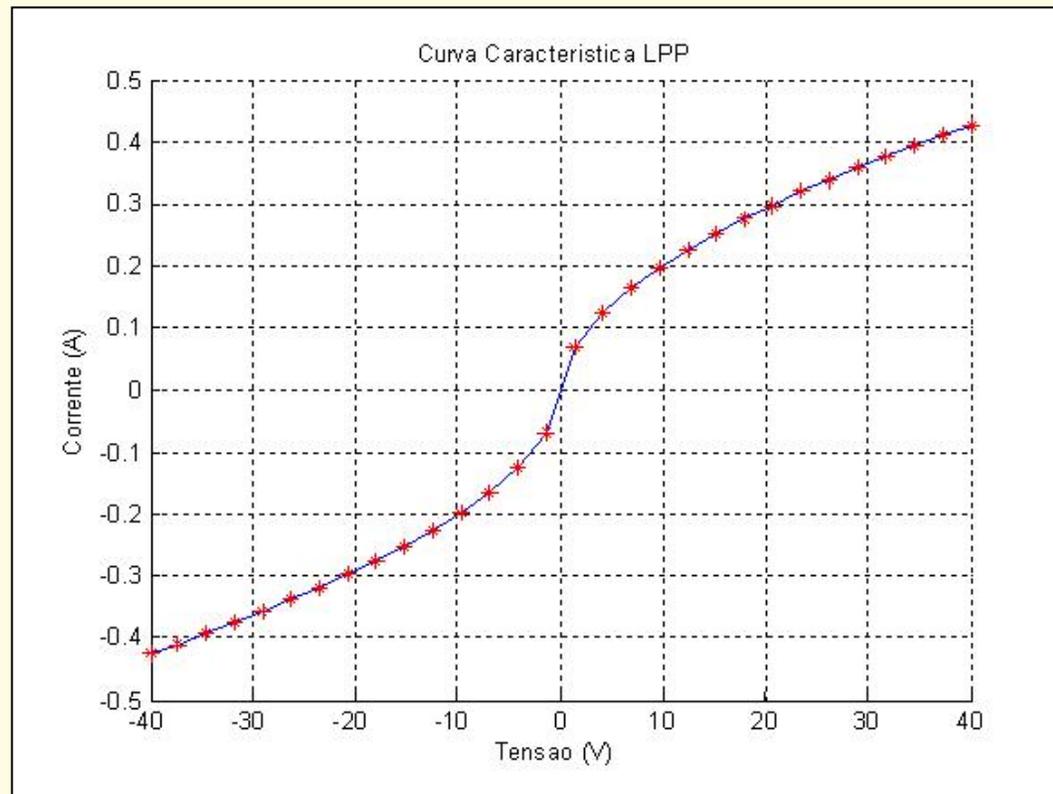
ans =

'id'	'typ'	'Ni'	'Nf'	'(Vf-Vi)'	'I(Ni->Nf)'
[1]	'E'	[1]	[0]	[10]	[-0.0033]
[2]	'R'	[2]	[1]	[96.6667]	[0.0967]
[3]	'J'	[1]	[2]	[-96.6667]	[0.1000]
[4]	'R'	[2]	[3]	[3.3333]	[0.0033]
[5]	'R'	[3]	[0]	[103.3333]	[0.1033]
[6]	'J'	[0]	[3]	[-103.3333]	[0.1000]

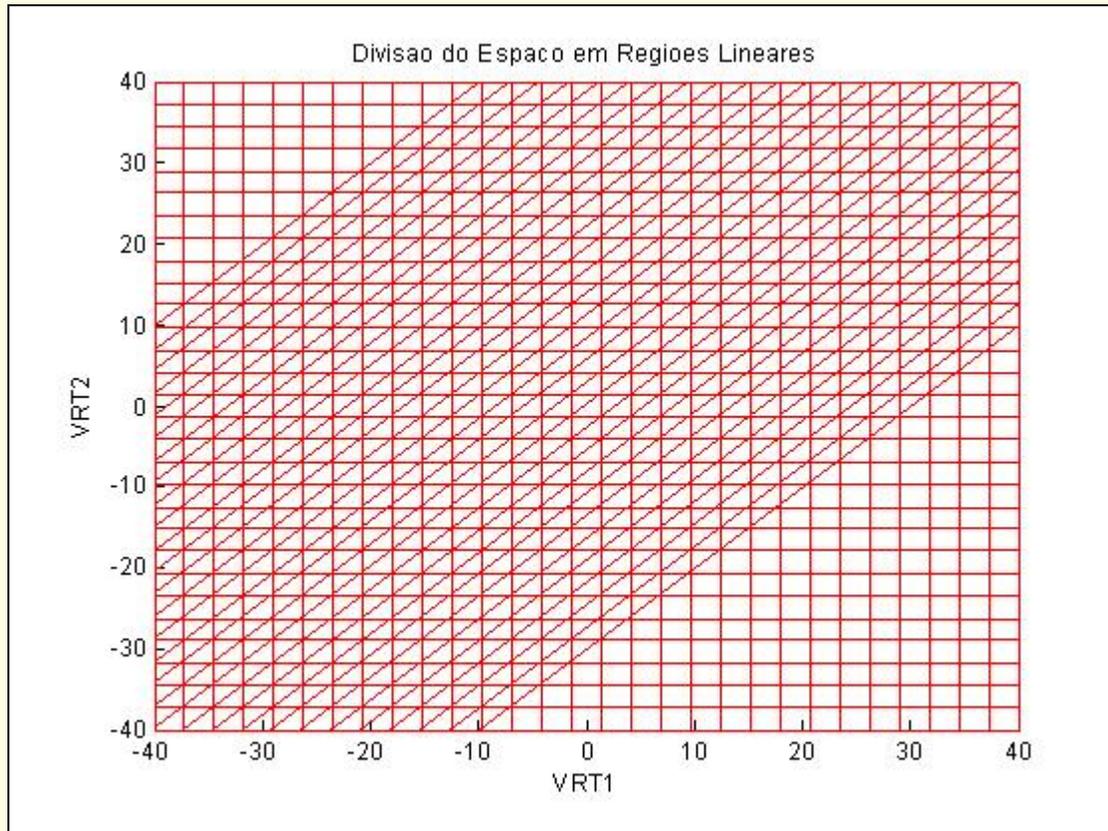
Exemplo 2 – Definição dos Resistores LPP

$$j = \frac{v}{|v|} \cdot \left(\frac{|v|}{194.6084} \right)^{0.54}$$

No. PQ = 30
Janela = [-40V, 40V]

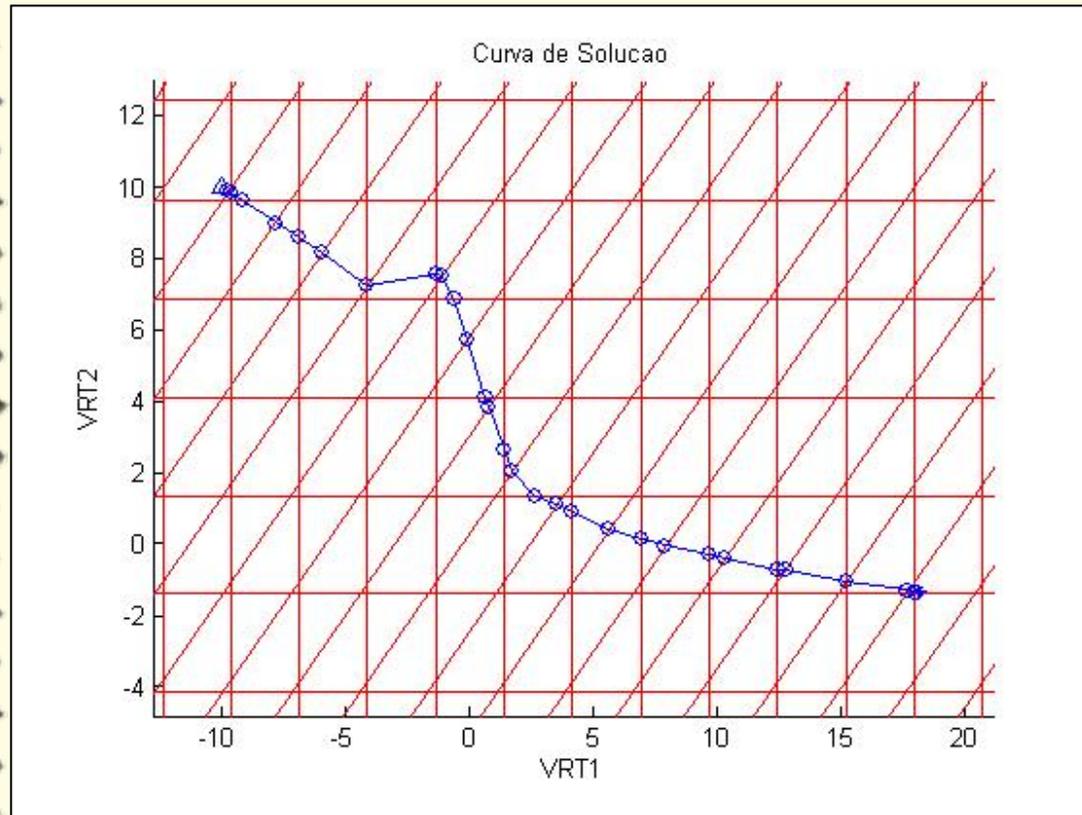


Exemplo 2 – Espaço V_{RT}



$$\mathbf{V}_{RT} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Curva de Solução



Início: $\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$

Final: $\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 18.1287 \\ -1.3616 \end{bmatrix}$

Exemplo 2 – Solução

```
>> solver(NL)
```

Solução pela Análise dos Conjuntos de Corte

Convergência do Katzenelson verificada.

Tempo de Inicialização =0.14s

Tempo de Processamento =0.047s

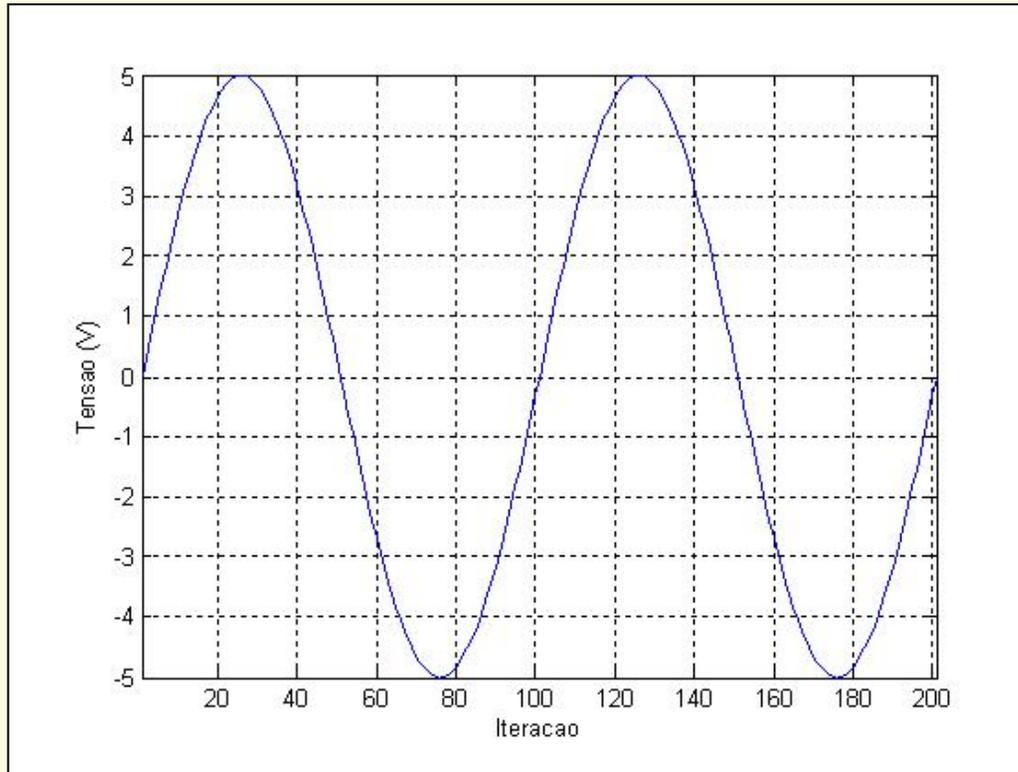
Tempo de Total =0.187s

Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =31

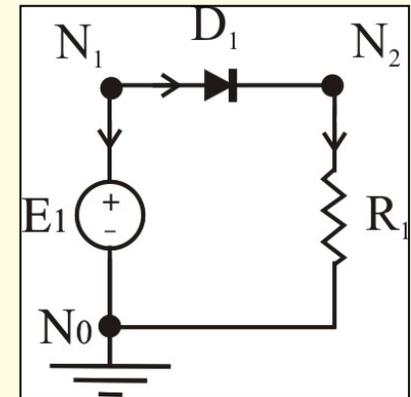
ans =

'id'	'typ'	'Ni'	'Nf'	'(Vf-Vi)'	'I(Ni->Nf)'
[1]	'E'	[1]	[0]	[10]	[0.0185]
[2]	'R'	[2]	[1]	[18.1287]	[0.1184]
[3]	'J'	[1]	[2]	[-18.1287]	[0.1000]
[4]	'R'	[2]	[3]	[-1.3616]	[-0.0186]
[5]	'R'	[3]	[0]	[29.4903]	[0.0815]
[6]	'J'	[0]	[3]	[-29.4903]	[0.1000]

Exemplo 3 – Entrada de Dados



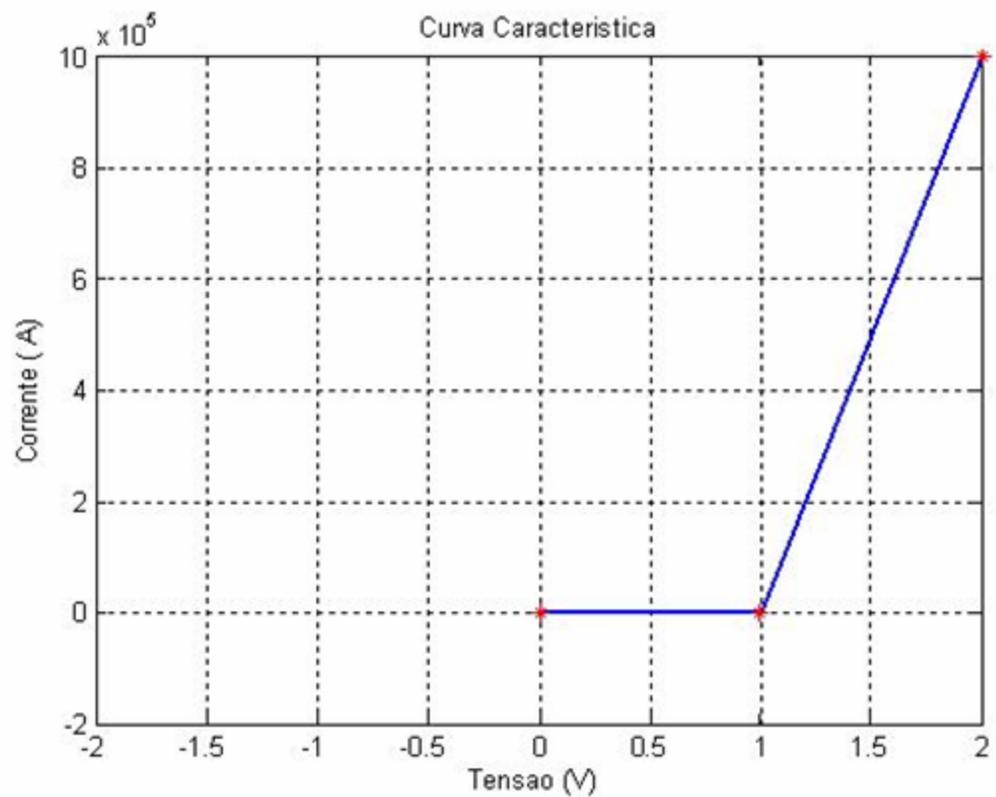
$$E_1(t) = \text{sen}(w.t)$$



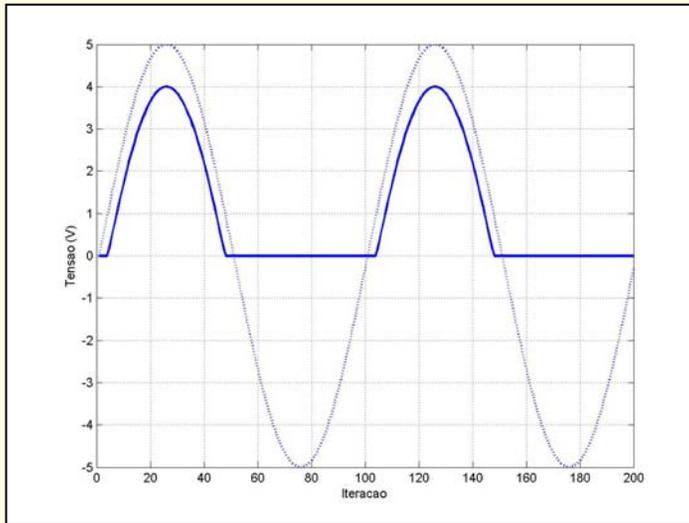
```
NL = [1 1 1 0 E1 ;  
      2 0 2 0 0.001 ;  
      3 0 1 2 -2] ;
```

$$R_1 = 1 \text{ k } \Omega$$

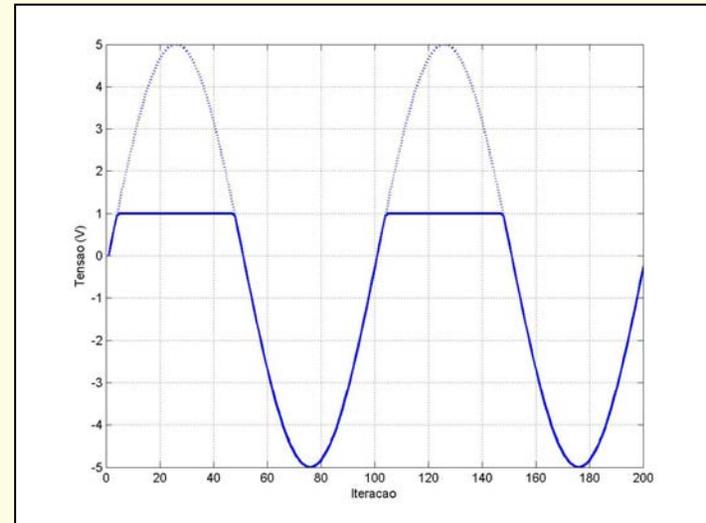
Exemplo 3 – Característica LPP de D_1



Exemplo 3 – Solução



Tensão em R_1



Tensão em D_1

A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes. The background of the page is a light olive green with a subtle gradient.

Método de Refinamento Hierárquico

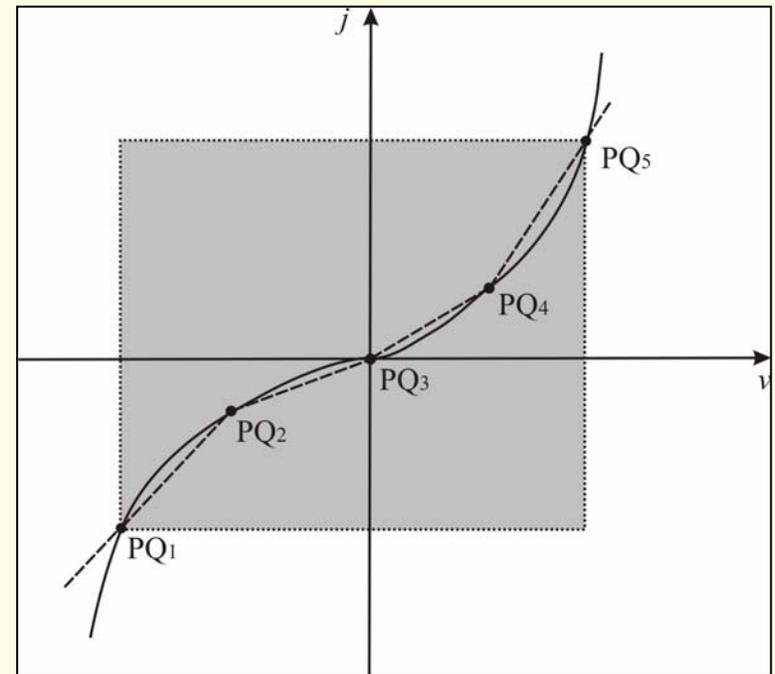
Considerações Iniciais

Interpolação LPP da rede

- Uma interpolação LPP de uma **rede** consiste numa aproximação da rede não linear, tanto mais próxima quanto menor for o erro da interpolação.
- A interpolação da rede pode ser feita a partir da interpolação LPP de cada resistor.
- Assim, minimizaremos o erro de interpolação da rede se minimizarmos os erros de interpolação nas características dos resistores não lineares.

Janela de Interpolação de um Resistor LPP

- Deve conter a solução e o ponto inicial.
- Ser a menor possível.



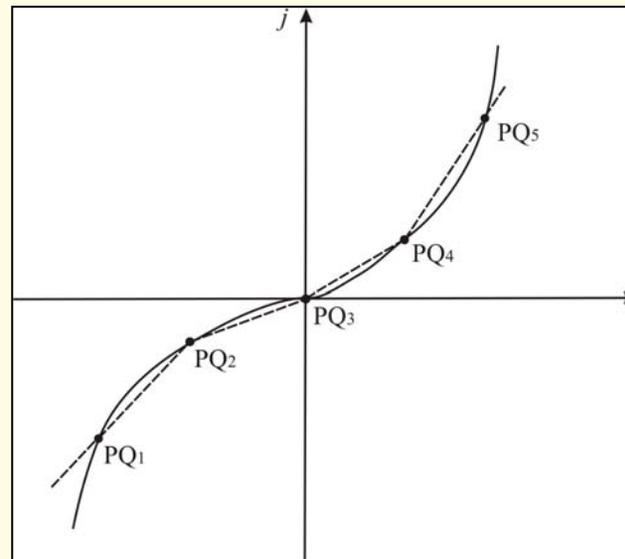
Escolhemos um intervalo suficientemente grande.

Análise do Erro de uma Interpolação LPP Unidimensional

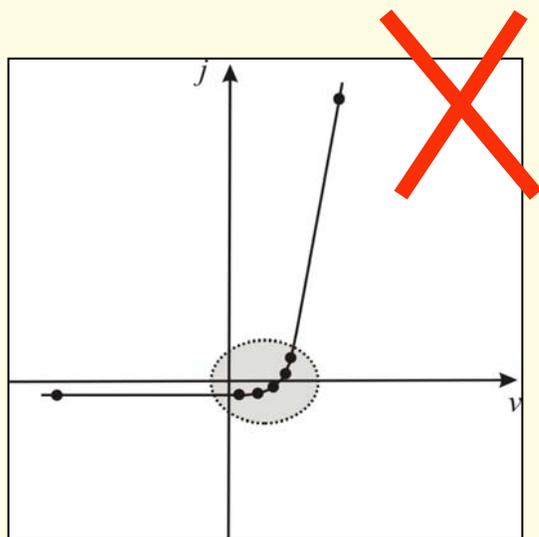
$$\varepsilon \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} \cdot \max_{x_0 \leq x \leq x_1} (\|f''(x)\|)$$

α Distância Segmente
Pontos de Quebra

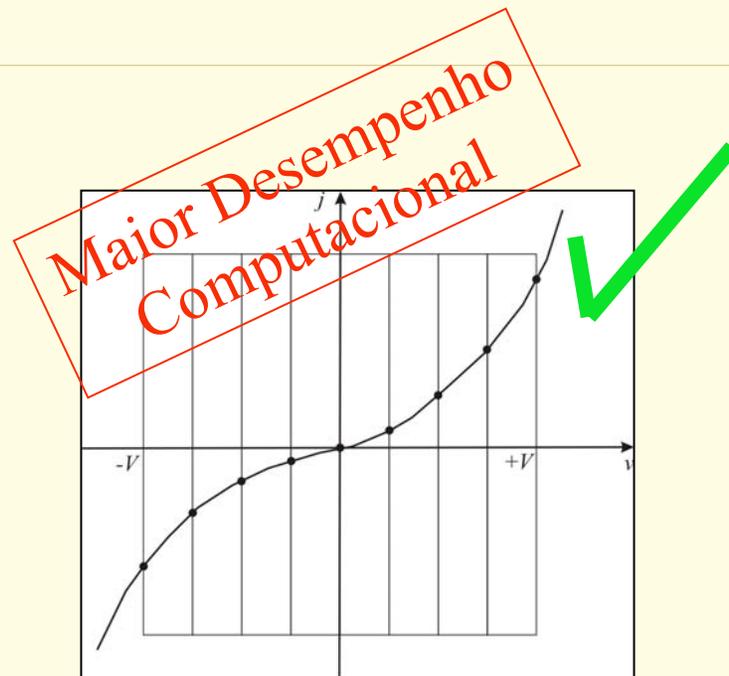
para $x_0 \leq x \leq x_1$.



Escolha dos Pontos de Quebra



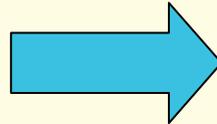
Opção 1:
concentrados de
acordo com a
derivada segunda.



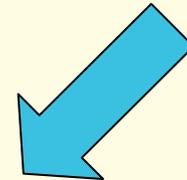
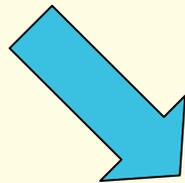
Opção 2:
uniformemente
distribuídos na janela de
interpolação.

Uma idéia

Maior número de
pontos de quebra
uniformemente
distribuídos



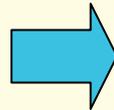
Menor erro de
interpolação
da rede



Solução

Alguns problemas

Maior número de pontos de quebra uniformemente distribuídos



Grande quantidade de memória computacional

Aumento do número de fronteiras a cruzar e conseqüente aumento do tempo de processamento

Conclusão

Computacionalmente
Inviável

Solução através do
aumento do número de
pontos de quebra
uniformemente
distribuídos

Matematicamente
precisa



A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes. The background of the page is a light olive green with a subtle gradient.

Método de Refinamento Hierárquico

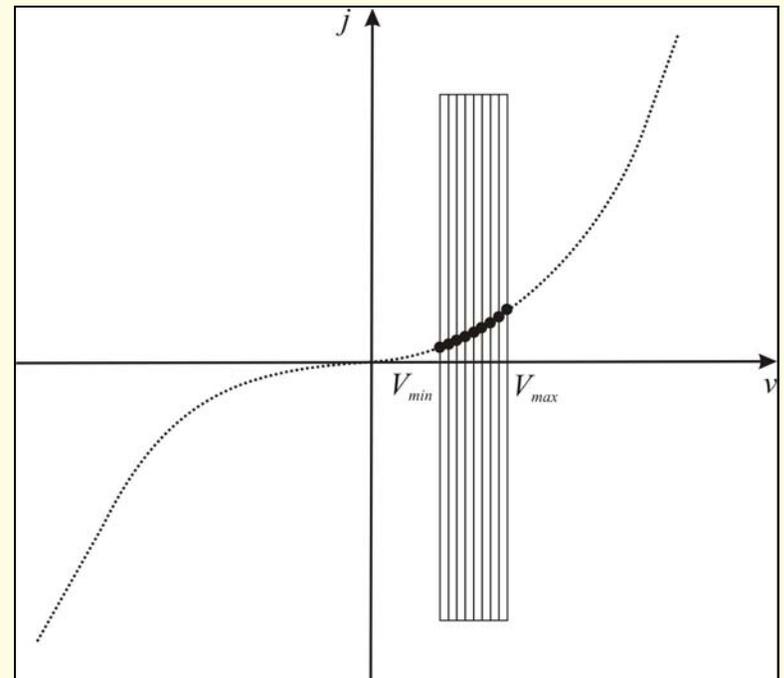
Descrição

Idéia Básica

- Interpolar os resistores com poucos pontos de quebra dentro da janela de interpolação
- Solução da rede LPP obtida
- Adicionar pontos de quebra às curvas características dos resistores nas proximidades das tensões de operação calculadas para cada resistor
- Solução da rede LPP obtida
- O processo continua iterativamente até que um critério de parada seja satisfeito

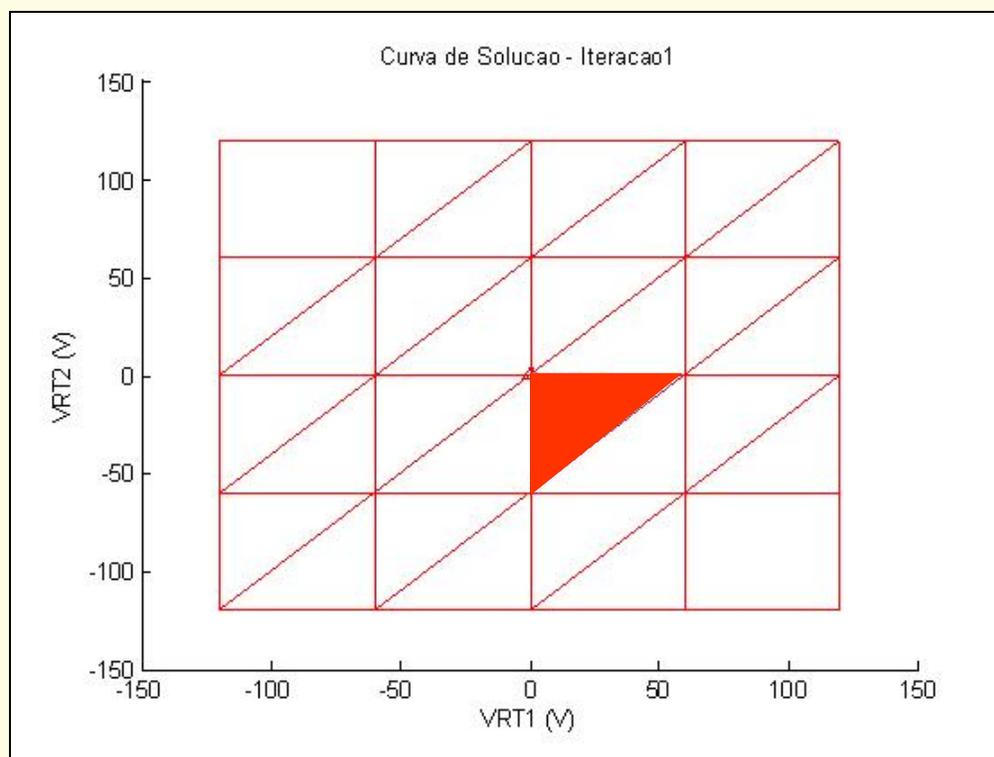
Refinamento nas Curvas Características dos Resistores

- Definição original da Janela de interpolação
- Interpolação LPP
- Solução da rede LPP: cálculo da tensão de operação do resistor LPP
- Redefinição da Janela de interpolação em torno da tensão de operação calculada
- Obs: o número de pontos de quebra é mantido.



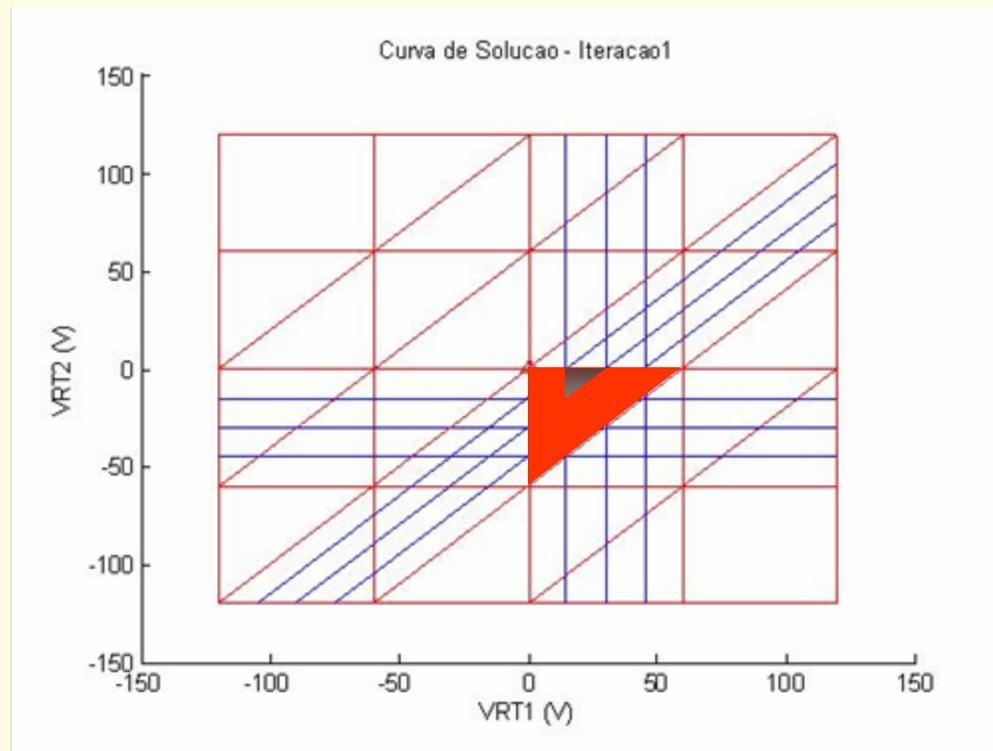
Refinamento no espaço V_{RT}

- Solução da rede LPP grosseira.



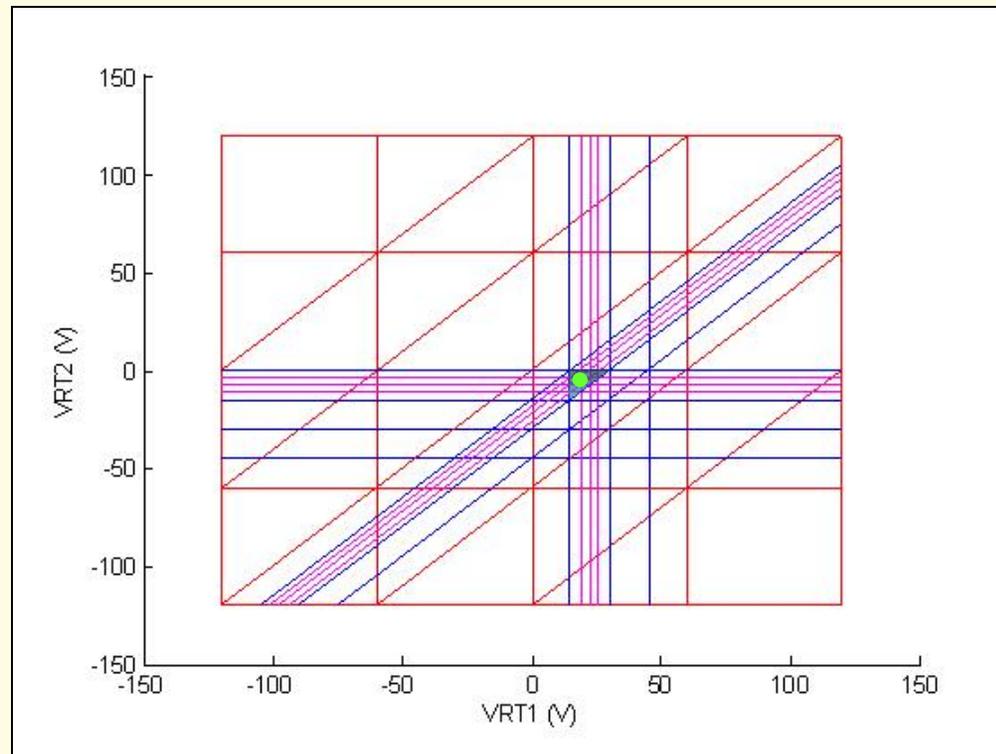
Refinamento no espaço V_{RT}

- Refinamento em torno da última região LPP atingida. Solução da nova rede LPP.



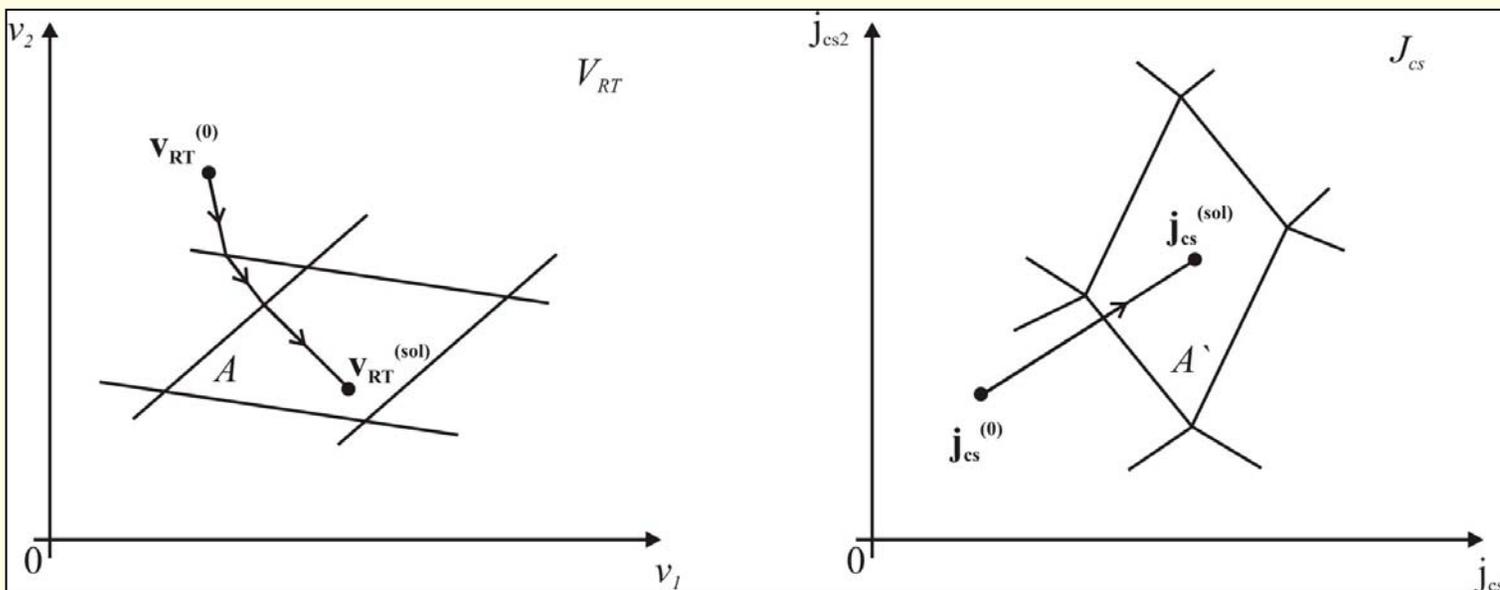
Refinamento no espaço V_{RT}

- Refinamento em torno da última região LPP atingida. Solução da nova rede LPP.



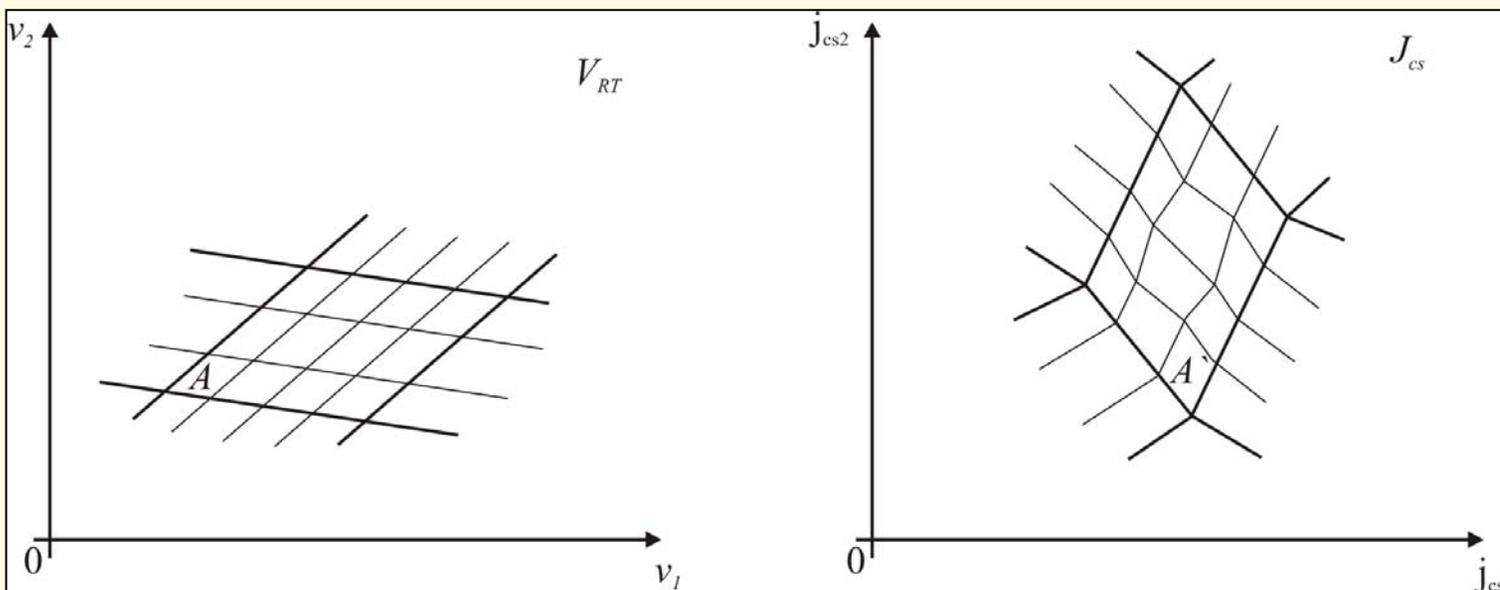
Propriedade Fundamental (1)

- Seja $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ a solução de uma rede LPP pertencente a uma região linear A .
- Sejam A' e $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ as imagens de A e de $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$ no espaço J_{cs} .



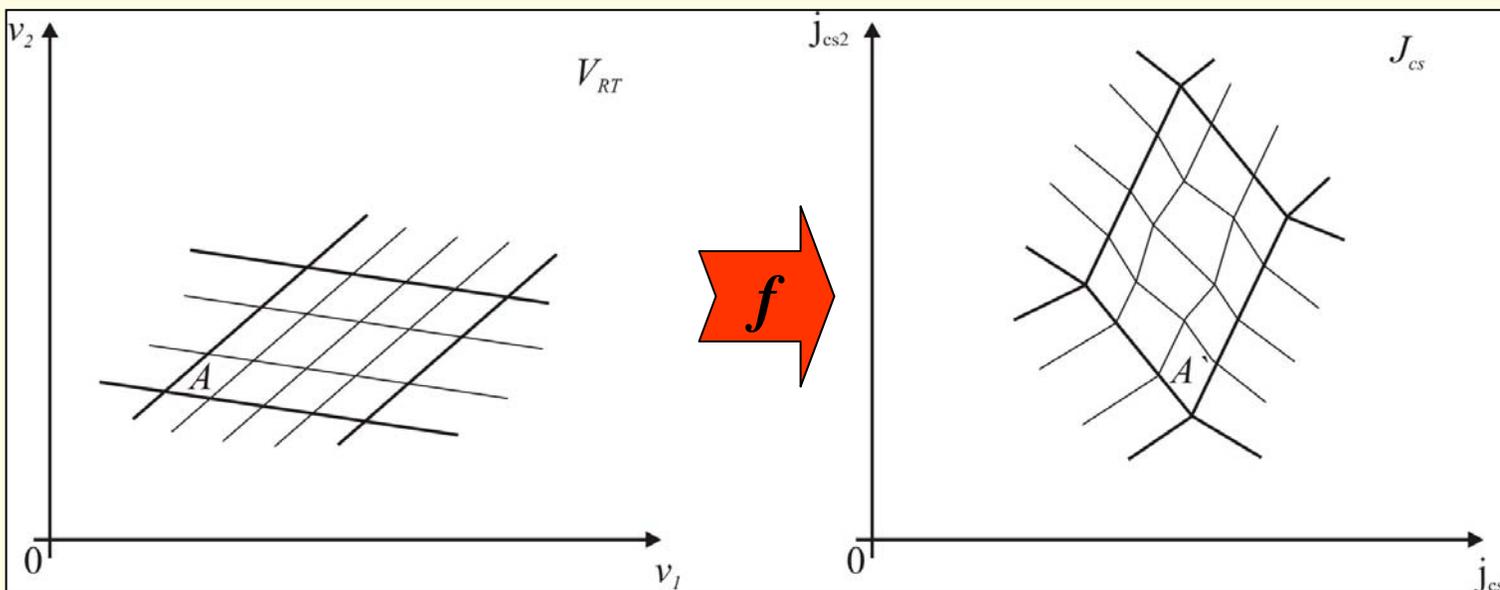
Propriedade Fundamental (2)

- **Refinamento:** mantendo as fronteiras de A , subdividimos A em novas regiões lineares, criando novas fronteiras no espaço V_{RT} .



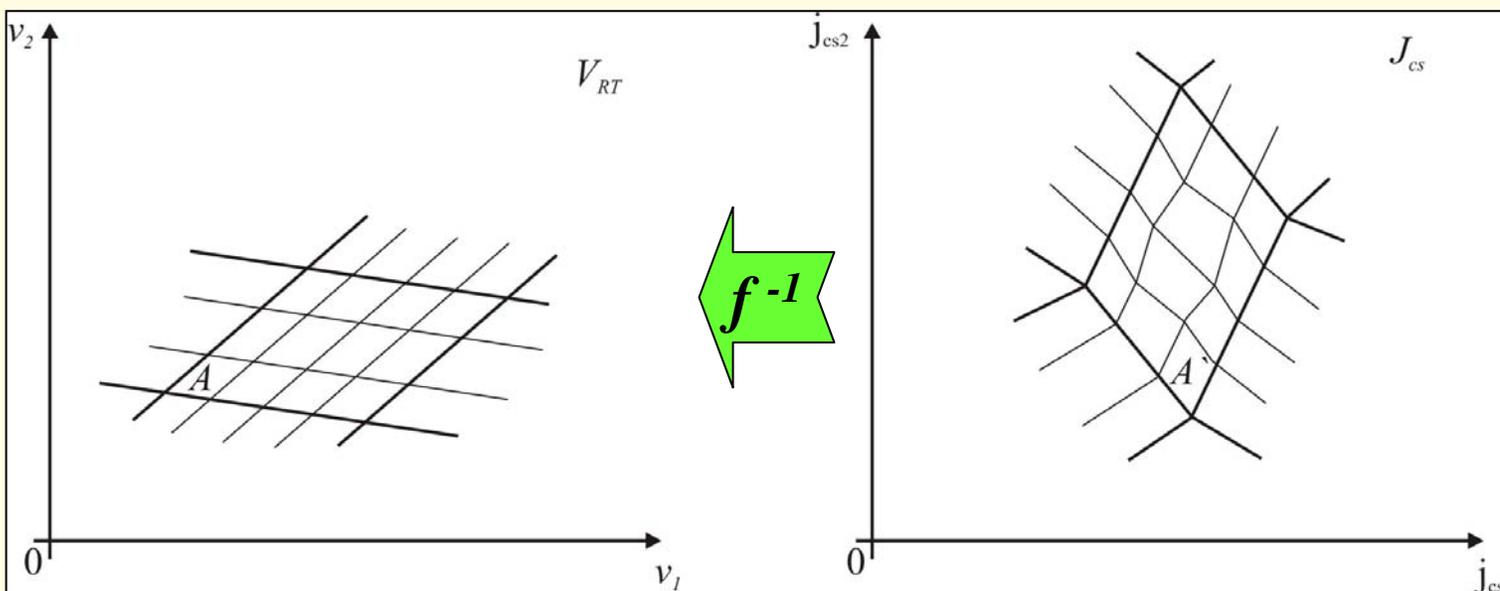
Propriedade Fundamental (3)

- Como o novo mapeamento LPP f é contínuo e A é compacto, A' também é compacto.
- Todos os pontos de A são mapeados em A' .



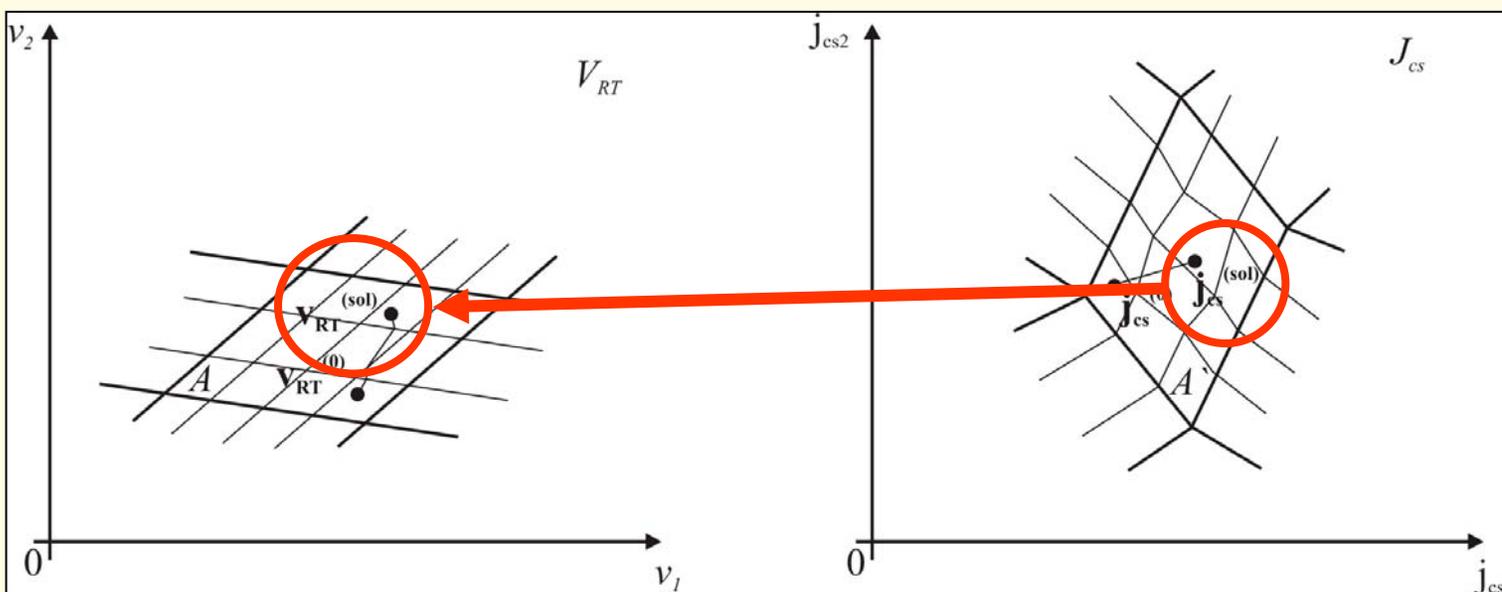
Propriedade Fundamental (4)

- Como o mapeamento f^{-1} também é contínuo, todos os pontos de A' são mapeados em A .



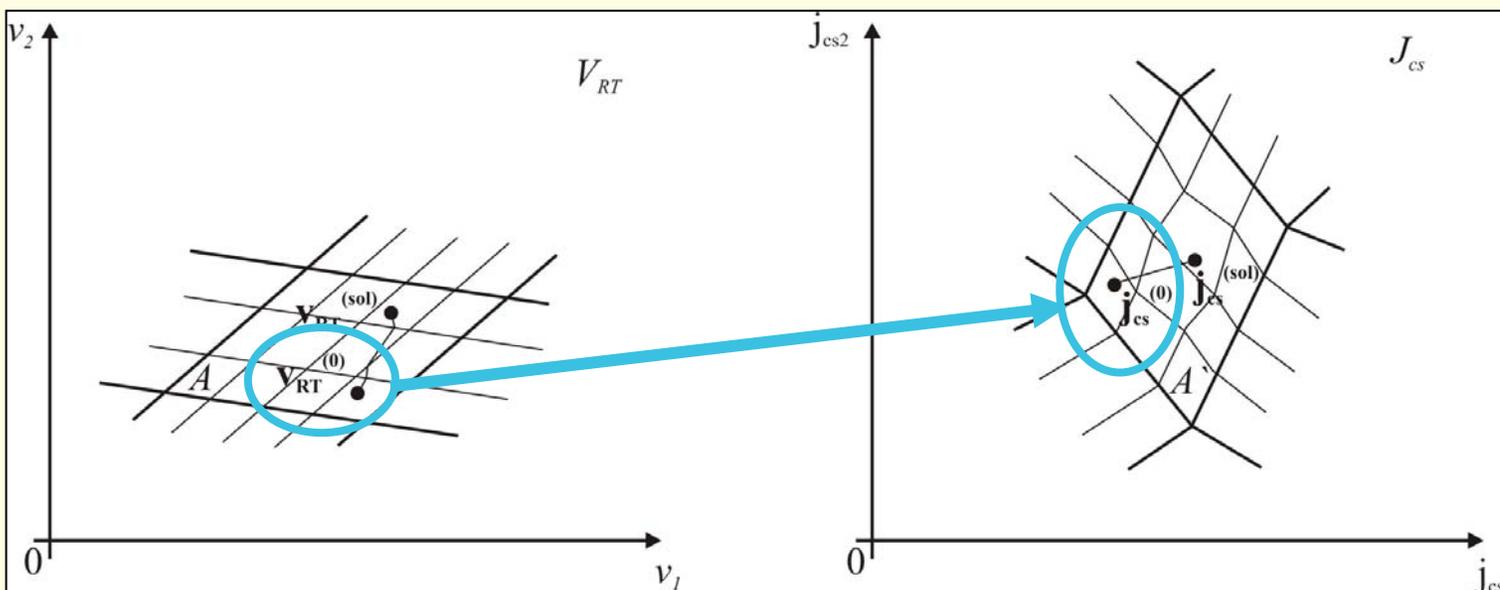
Propriedade Fundamental (5)

- $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)}$ pertence a A' , pois sendo uma entrada da rede, não se altera com o refinamento. $\mathbf{j}_{cs}^{(sol)} = \mathbf{Q}_{T(R),L(J)} \cdot \mathbf{j}_J$
- Logo, o novo ponto $\mathbf{v}_{RT}^{(sol)}$, solução da nova rede LPP, pertencerá ao conjunto A .



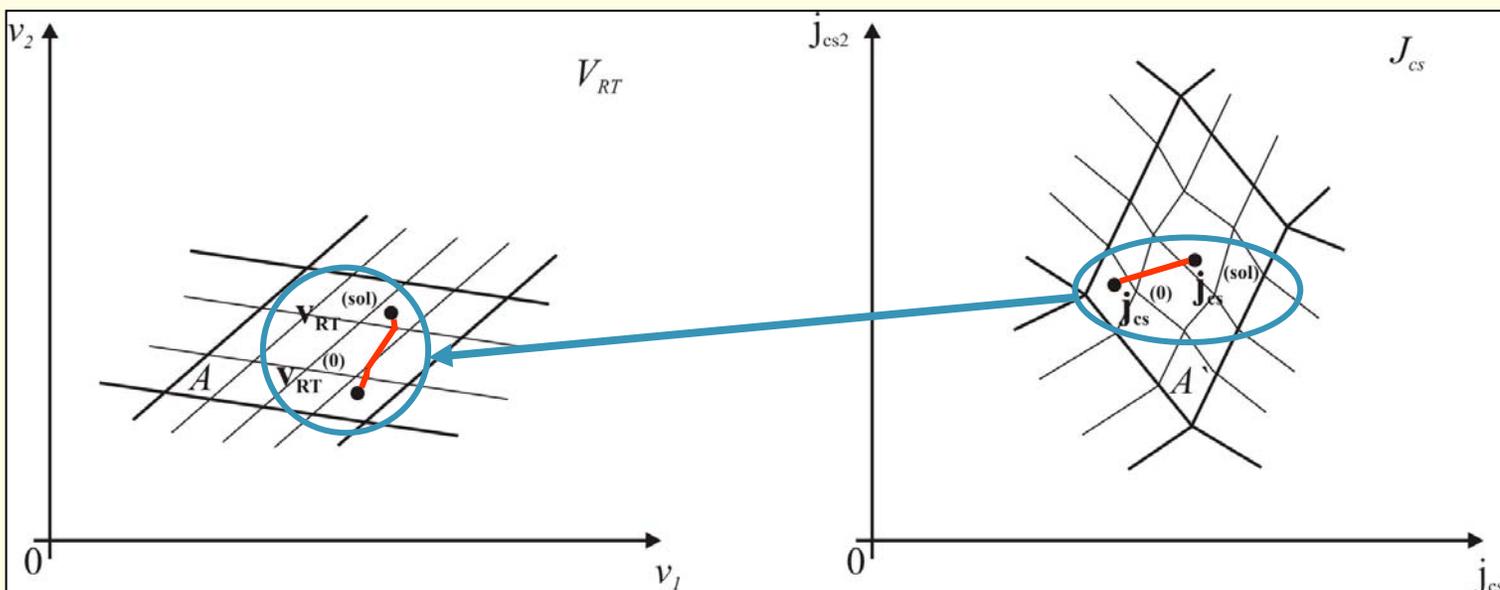
Propriedade Fundamental (6)

- Escolhemos como ponto inicial $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ o ponto encontrado na solução da rede LPP anterior, pertencente à região A .
- Como $\mathbf{v}_{RT}^{(0)}$ pertence ao conjunto A , sua imagem $\mathbf{j}_{cs}^{(0)}$, pertencerá ao conjunto A' .



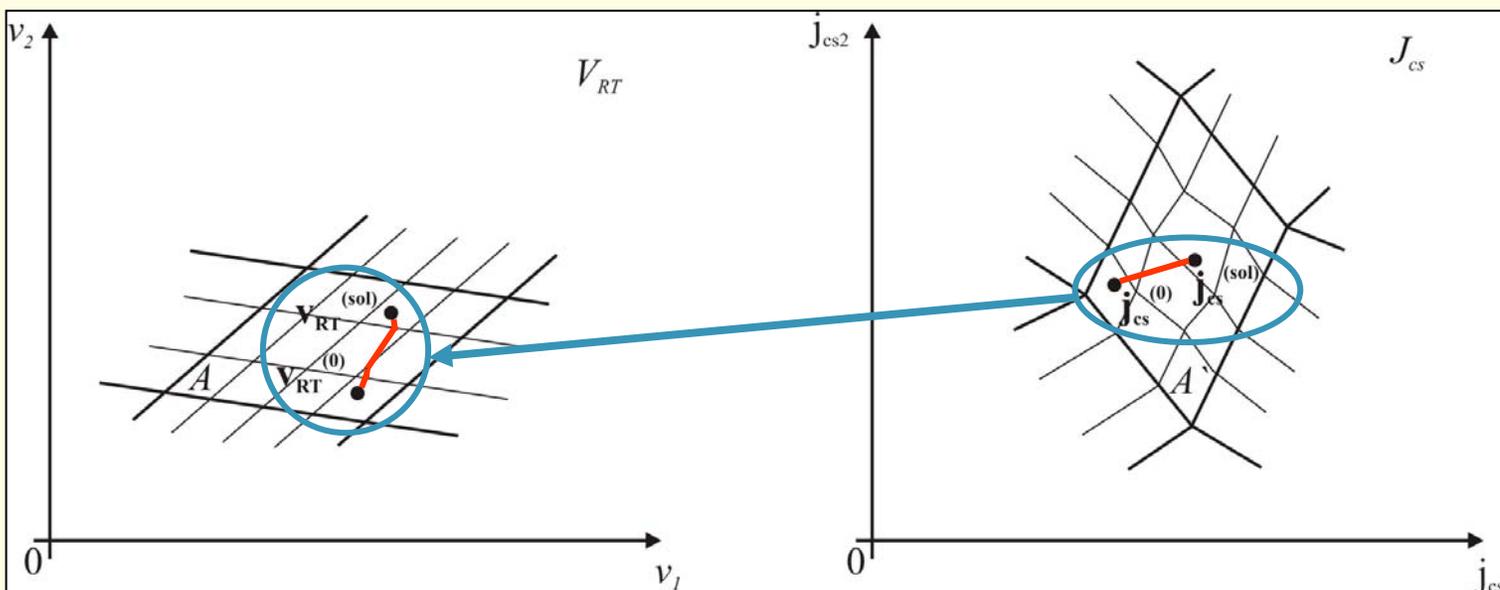
Propriedade Fundamental (7)

- No espaço J_{cs} , a imagem da curva de solução será o segmento de reta $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$.
- Como $(\mathbf{j}_{cs}^{(0)}, \mathbf{j}_{cs}^{(sol)})$ pertence à região A' , note que a curva de solução será traçada inteiramente dentro da região A .



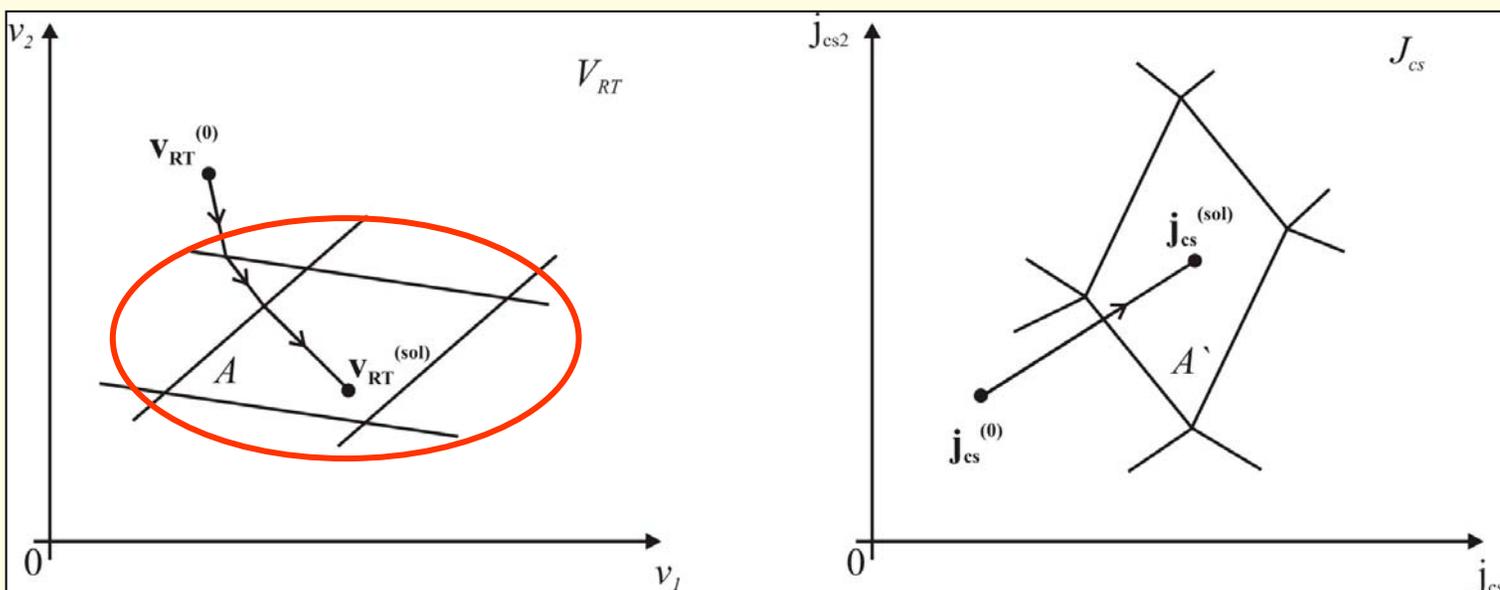
Propriedade Fundamental (8)

- **Teorema:** ao refinarmos a interpolação LPP da rede não linear pela adição de fronteiras no espaço V_{RT} , a curva de solução da nova rede LPP será inteiramente traçada dentro da região da solução da rede LPP anterior.



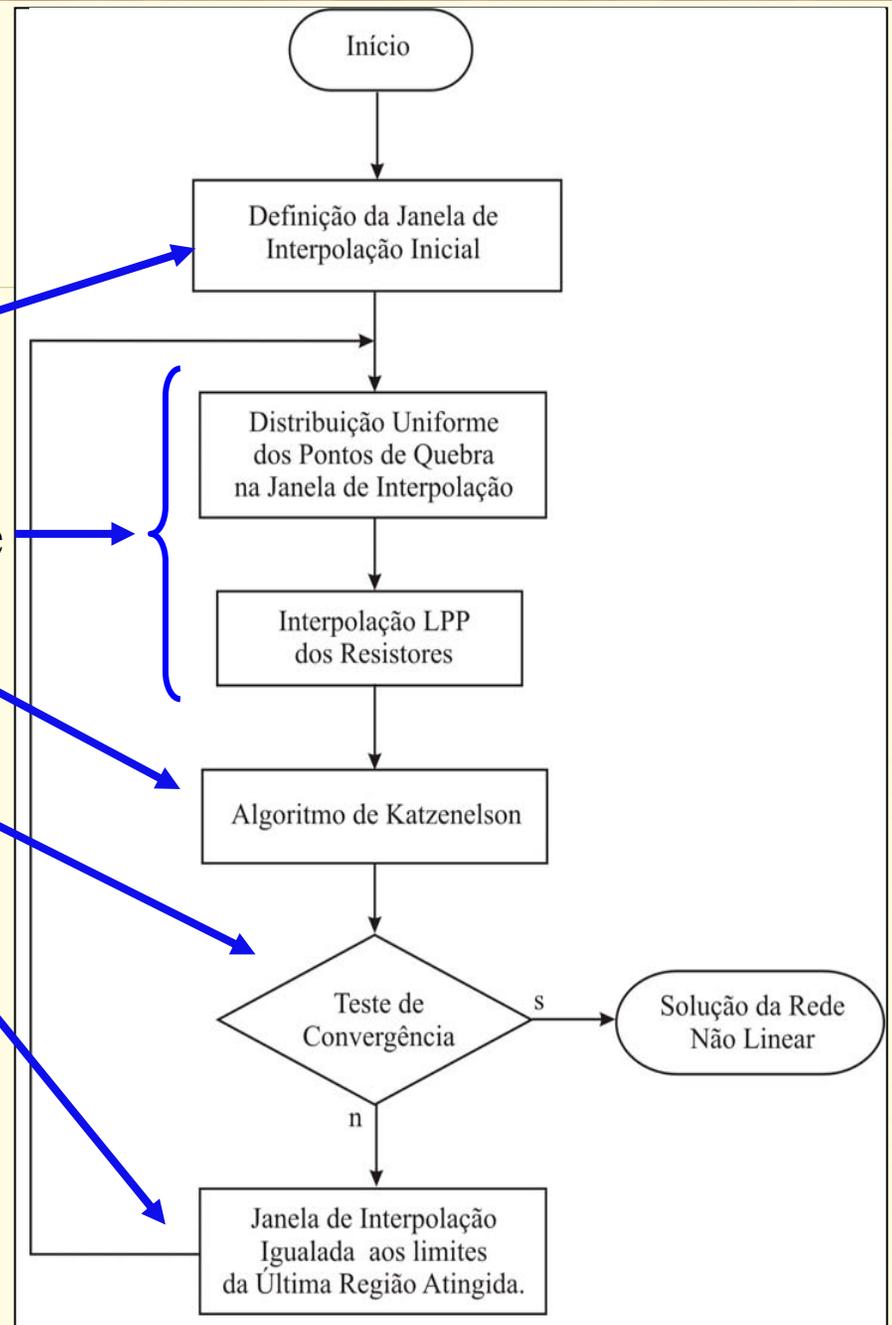
Propriedade Fundamental (9)

- **Corolário:** como a sucessão de refinamentos das interpolações LPP tende para a solução da rede não linear, podemos afirmar que a solução da rede não linear está contida na região da solução de uma rede LPP interpolada da rede original.



Fluxograma

- Definição da Janela de interpolação
- Interpolação LPP da rede
- Solução pelo Algoritmo de Katzenelson
- Teste de Convergência
- Janela de interpolação igualada aos limites da última região atingida.



Critérios de Parada

1. Num Iterações = Num Max Iterações

$$2. \left\| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right\| < \varepsilon_a$$

OU
$$\left\| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} - \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right\| < \varepsilon_a + \varepsilon_r \cdot \min \left(\left| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k+1)} \right|, \left| \mathbf{v}_{\text{RT}}^{(k)} \right| \right)$$

$$3. \left\| \mathbf{E}(\mathbf{v}_{\text{RT}}) \right\| < \delta$$

Onde:

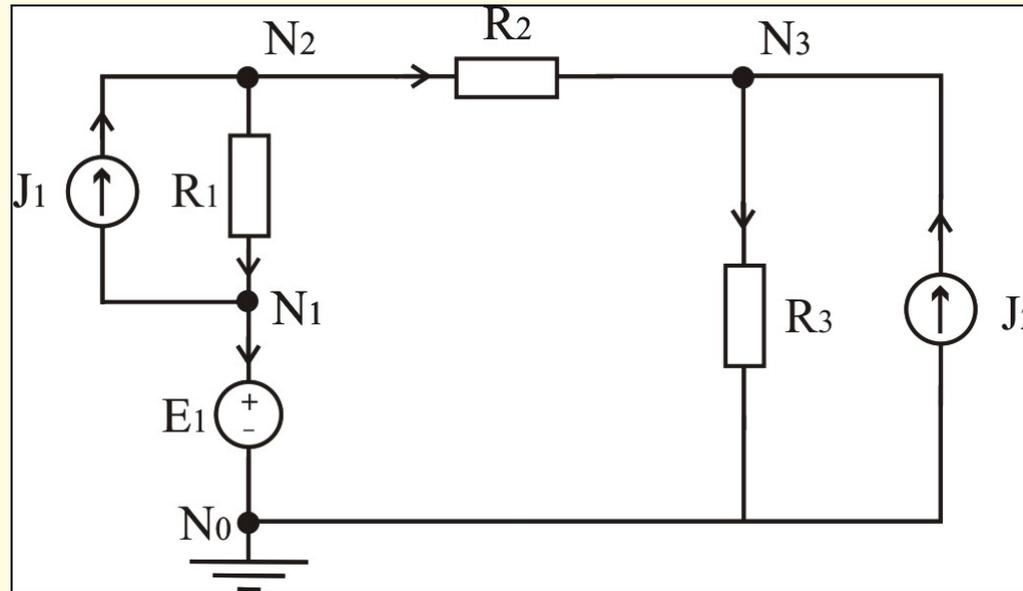
$$\mathbf{E}(\mathbf{v}_{\text{RT}}) = \mathbf{Q}_{\text{T(R),R}} \mathbf{\Gamma} \left(\mathbf{Q}_{\text{T(ER),R}}^t \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\text{E}} \\ \mathbf{v}_{\text{RT}} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{Q}_{\text{T(R),L(J)}} \mathbf{j}_{\text{J}}$$

A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light olive green with a subtle gradient.

Exemplos

Simulações Computacionais

Exemplo 1 – Entrada de Dados



NL = [1 1 1 0 1 0 ;
2 0 2 1 -2 ;
3 2 1 2 0 1 ;
4 0 2 3 -2 ;
5 0 3 0 -2 ;
6 2 0 3 0 1] ;

$$E_1 = 10 \text{ V}$$

$$J_1 = 0,1 \text{ A}$$

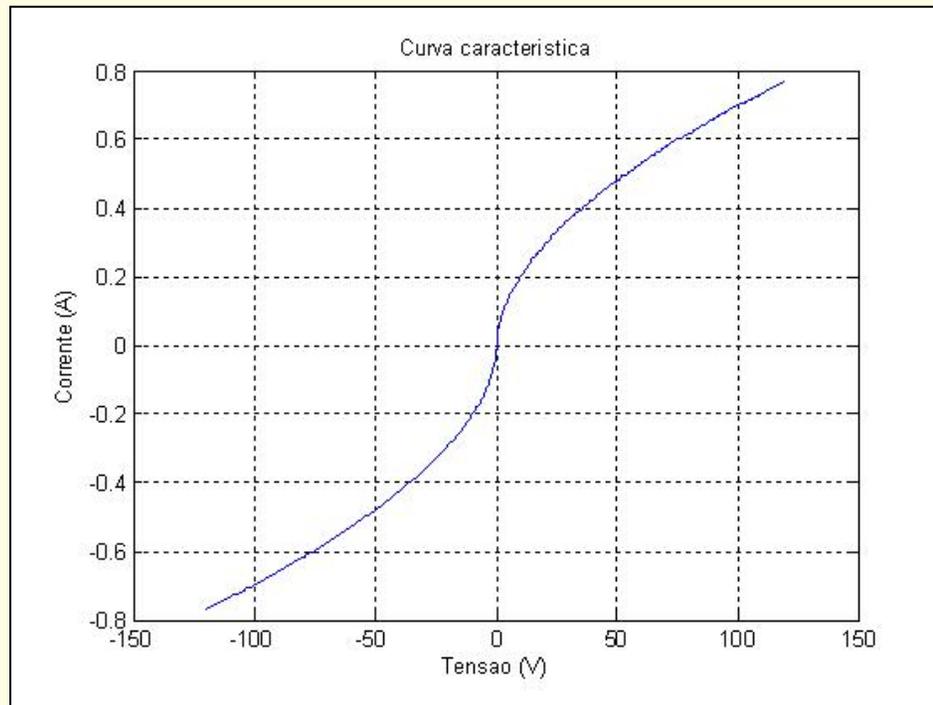
$$J_2 = 0,1 \text{ A}$$

Exemplo 1 – Definição dos Resistores LPP

$$j = \frac{v}{|v|} \cdot \left(\frac{|v|}{194.6084} \right)^{0.54}$$

No. PQ = 5

Janela = [-120V, 120V]

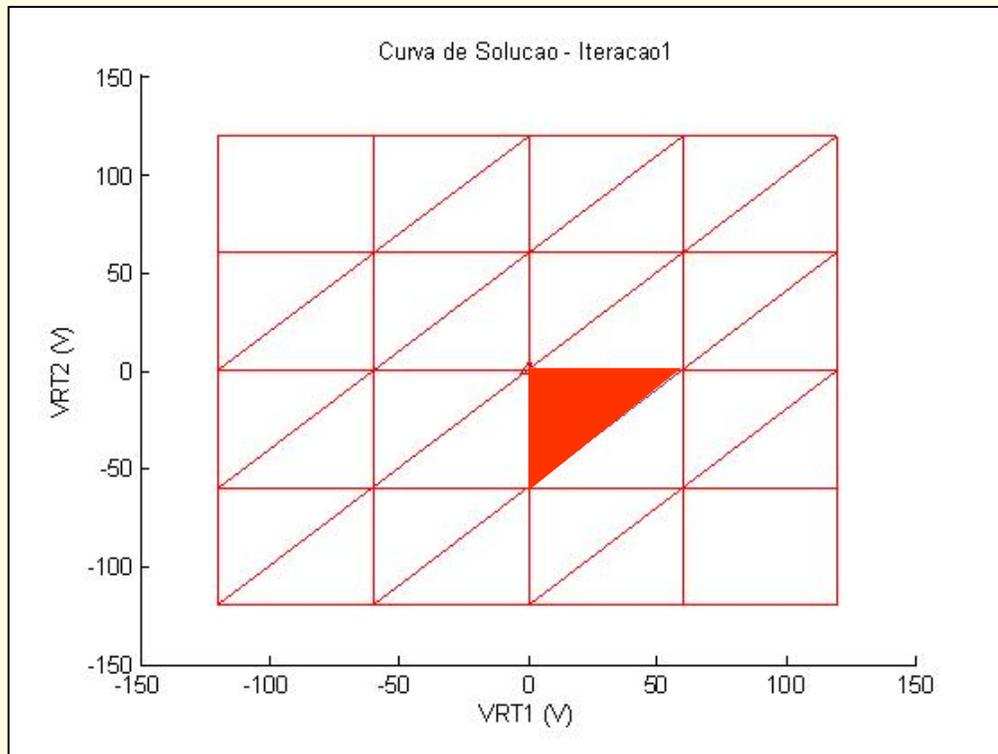


Critério de Parada:

$$E(V_{RT}) < 0.001$$

Exemplo 1

- Iteração 1: solução da primeira rede LPP.



Ponto inicial:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

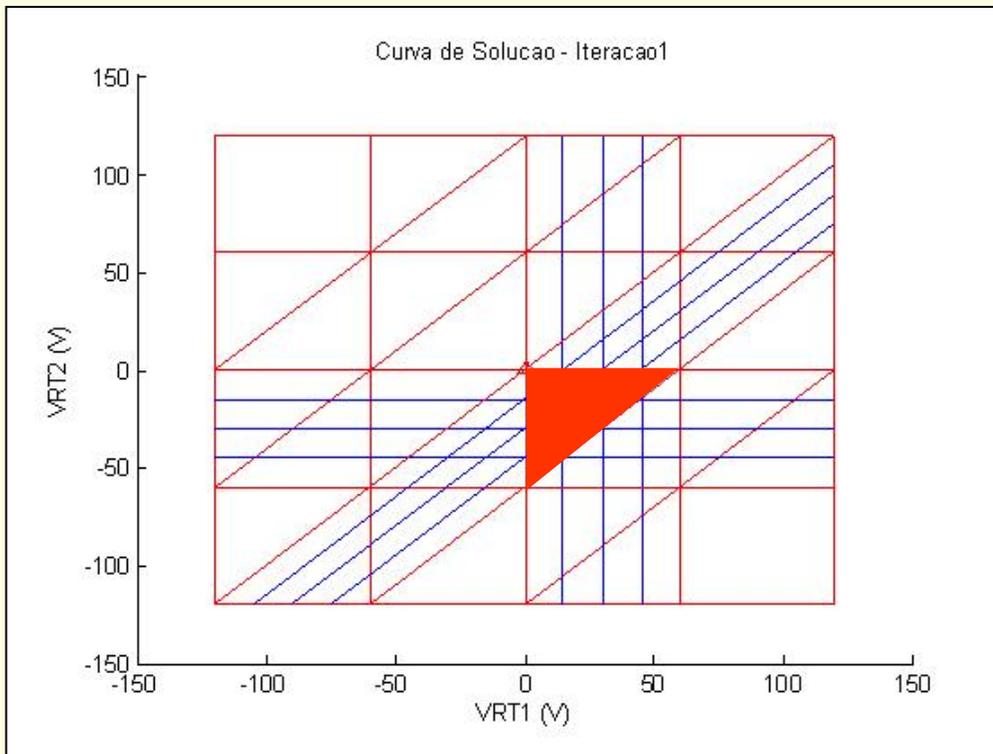
Solução:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 28.8568 \\ -3.6430 \end{bmatrix}$$

$$E(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0601$$

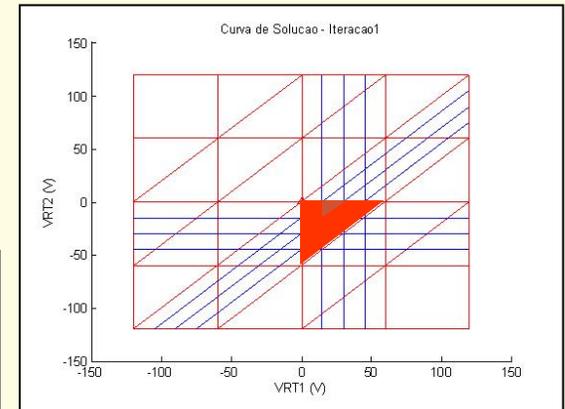
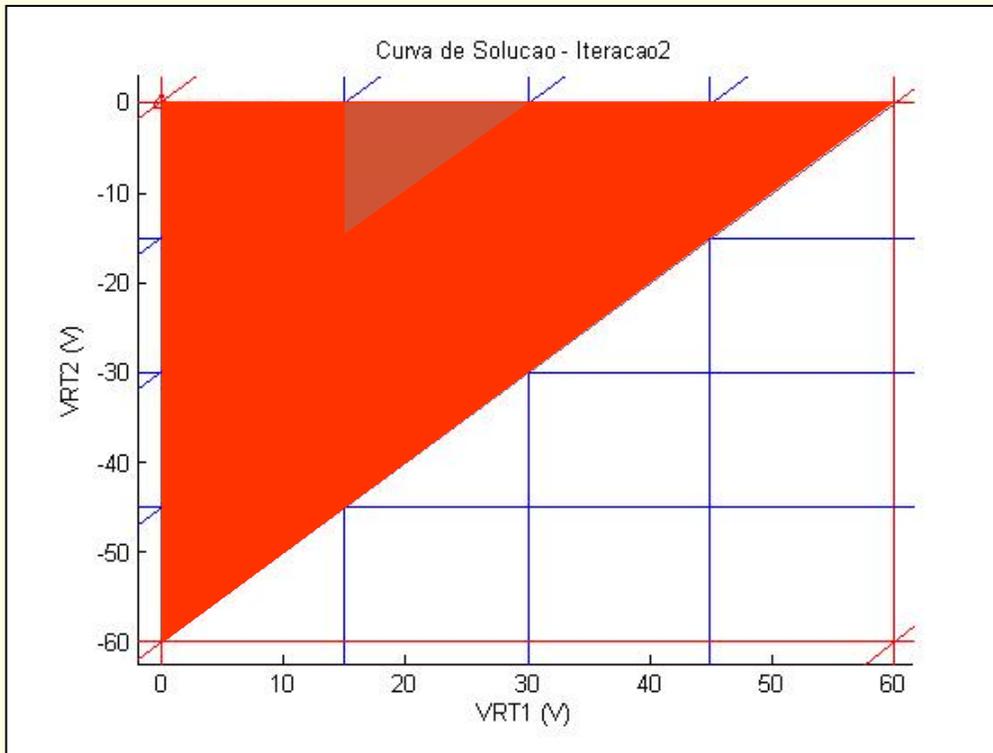
Exemplo 1

- Refinamento da última região LPP atingida.



Exemplo 1

- Iteração 2



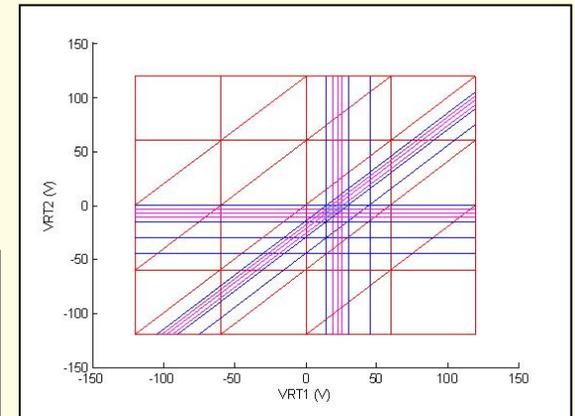
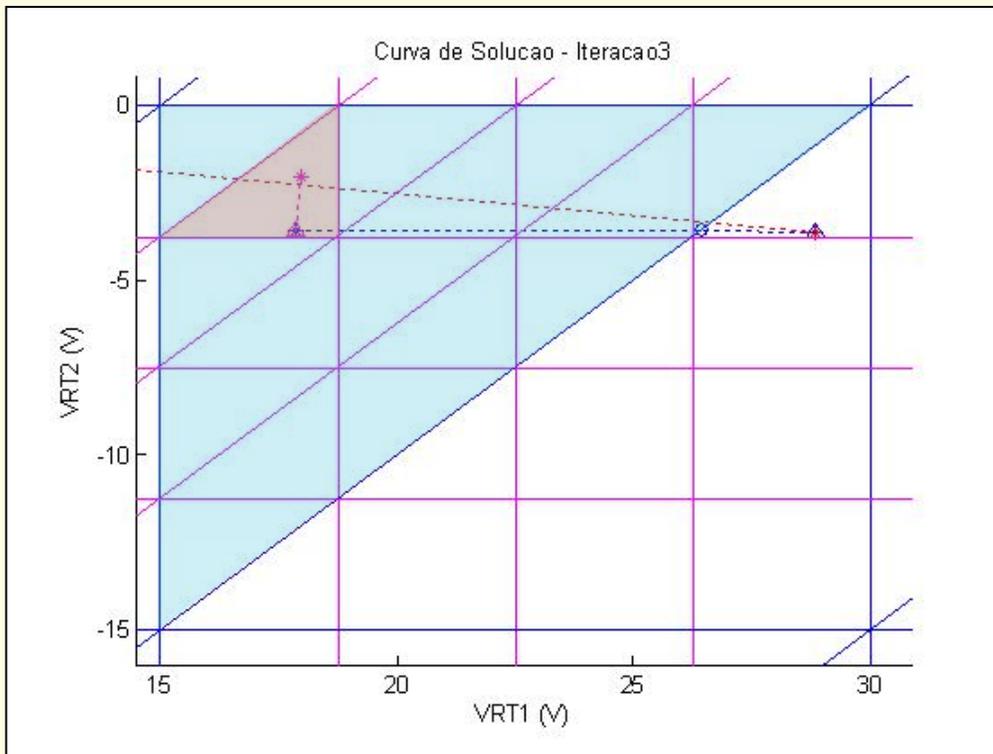
Solução:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 17.8586 \\ -3.5740 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0158$$

Exemplo 1

- Iteração 3



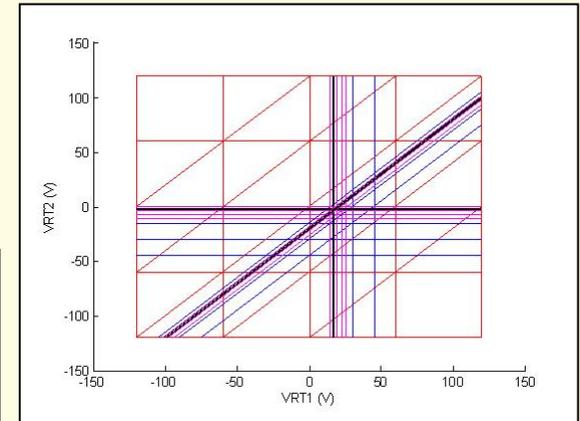
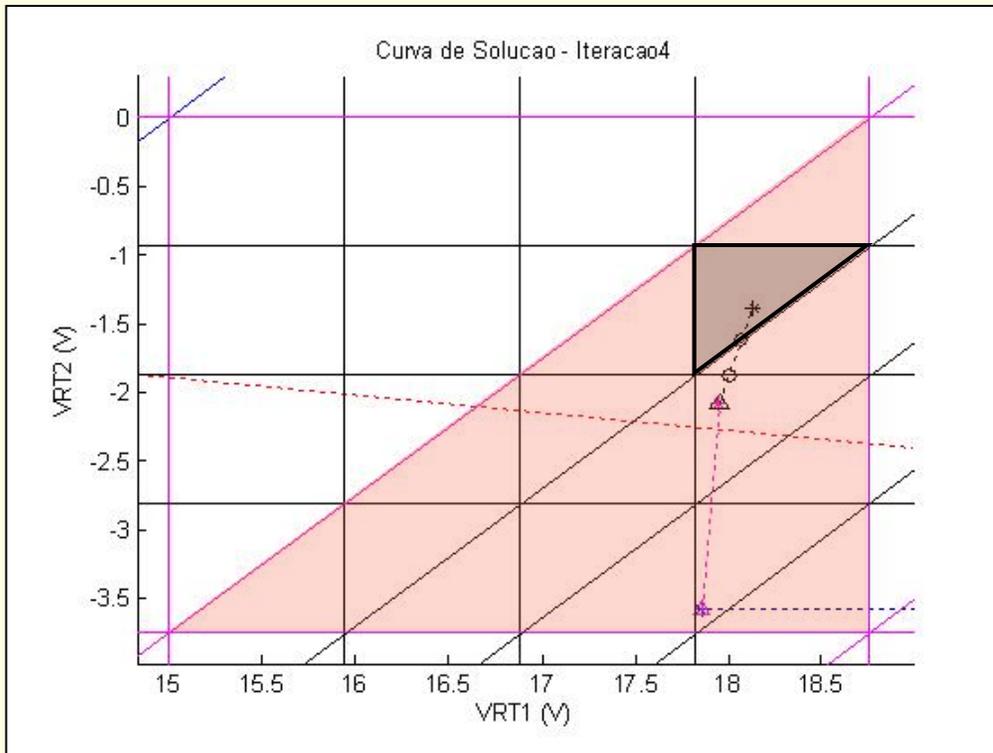
Solução:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 17.9524 \\ -2.0675 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0056$$

Exemplo 1

- Iteração 4



Solução:

$$\mathbf{v}_{RT} = \begin{bmatrix} 18.1288 \\ -1.3785 \end{bmatrix}$$

$$E(\mathbf{v}_{RT}) = 0.0003$$

Exemplo 1 - Solução

```
>> solver(NL)
```

Solução pela Análise dos Conjuntos de Corte

Tempo de Inicialização =0.156s

Tempo de Processamento =0.422s

Tempo de Total =0.578s

Numero de Refinamentos =4

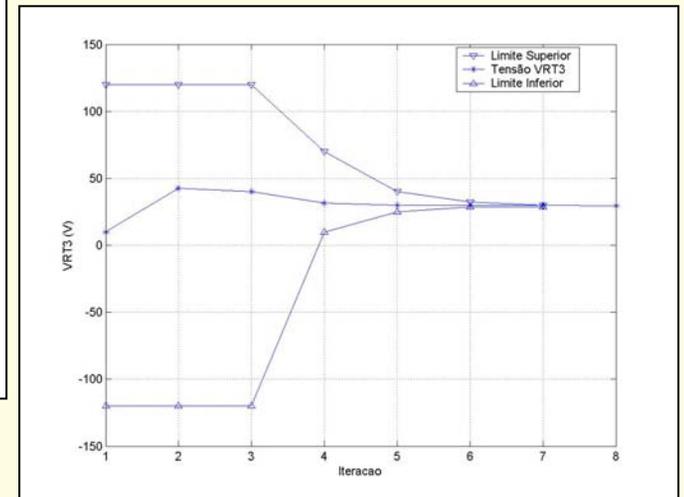
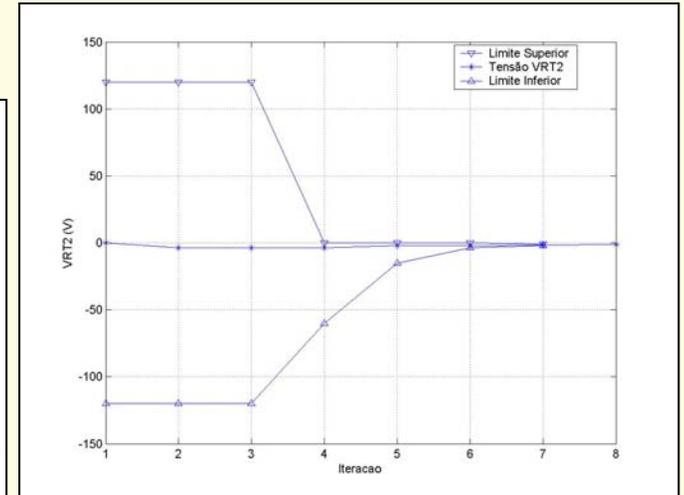
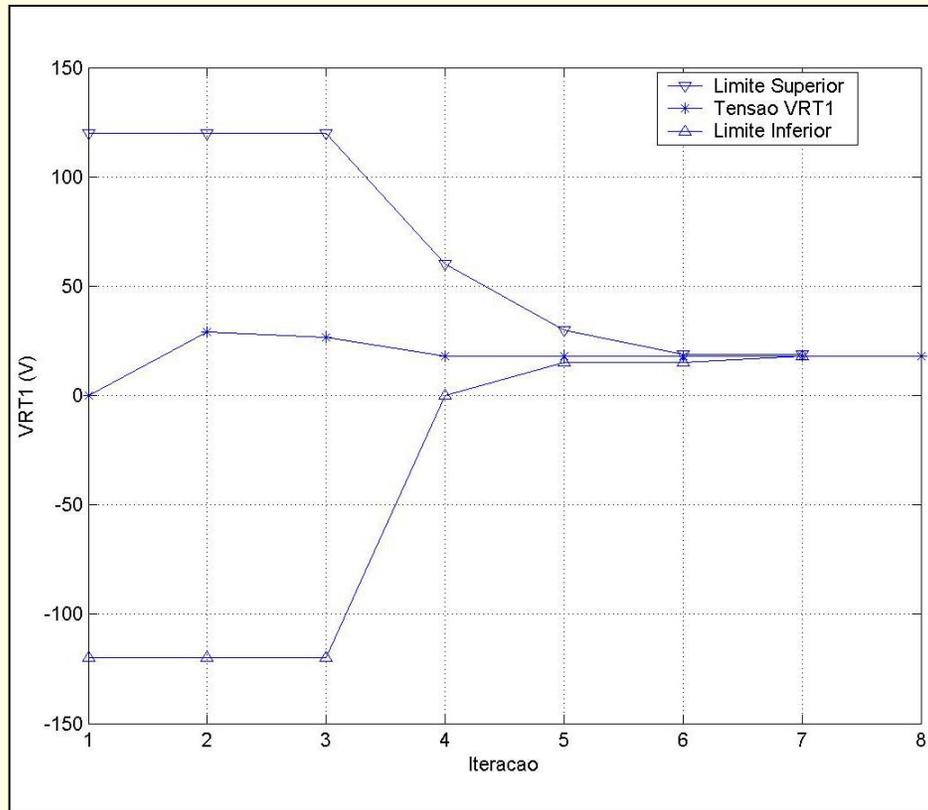
Numero Total de Iteracoes do Katzenelson =7

Erro Estimado =0.00027363

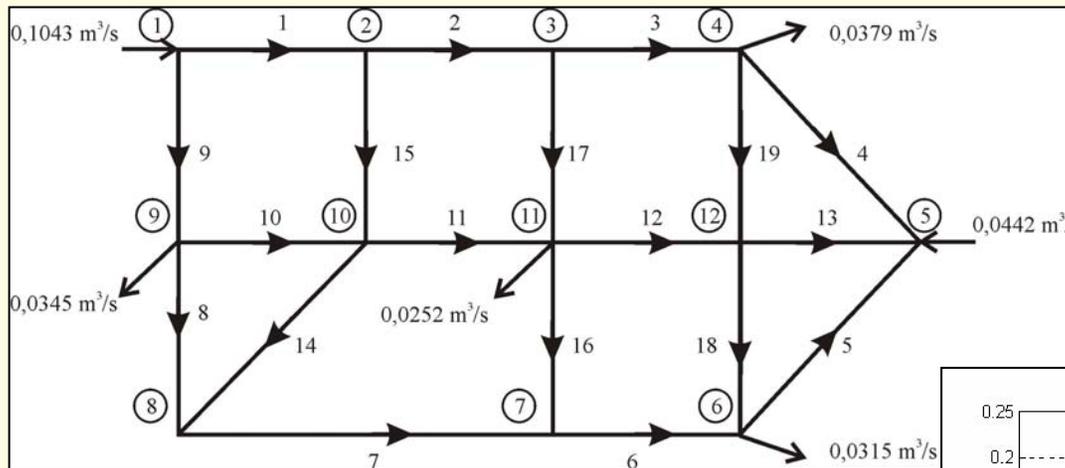
ans =

'id'	'typ'	'Ni'	'Nf'	'(Vf-Vi)'	'I(Ni->Nf)'
[1]	'E'	[1]	[0]	[10]	[0.0184]
[2]	'R'	[2]	[1]	[18.1288]	[0.1184]
[3]	'J'	[1]	[2]	[-18.1288]	[0.1000]
[4]	'R'	[2]	[3]	[-1.3785]	[-0.0187]
[5]	'R'	[3]	[0]	[29.5073]	[0.0816]
[6]	'J'	[0]	[3]	[-29.5073]	[0.1000]

Exemplo 1 – Evolução das tensões nos resistores.

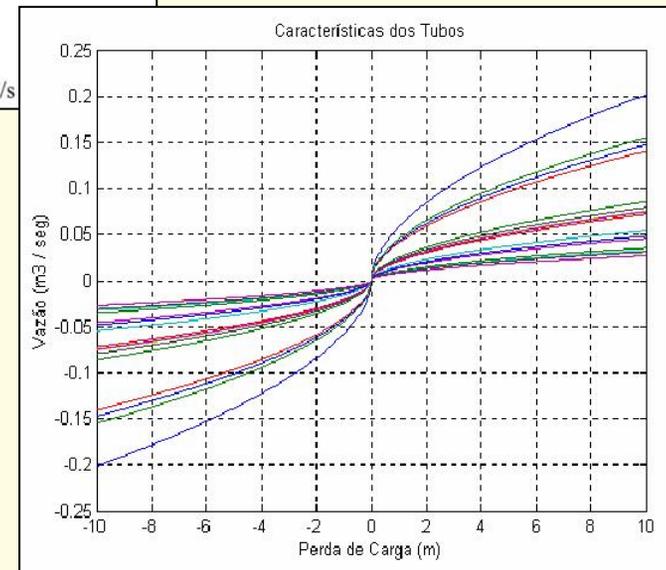


Exemplo 2 – Rede Hidráulica (Wood – 1981)

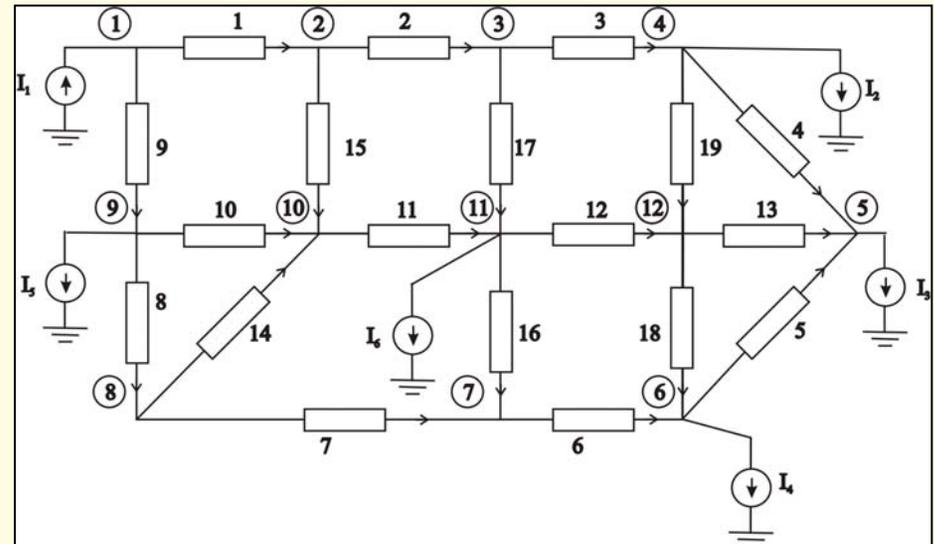
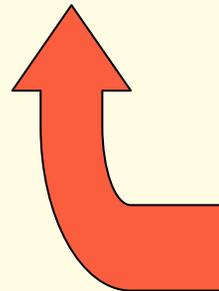
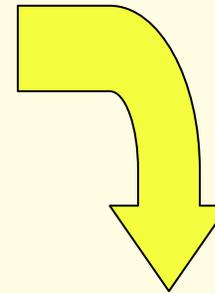
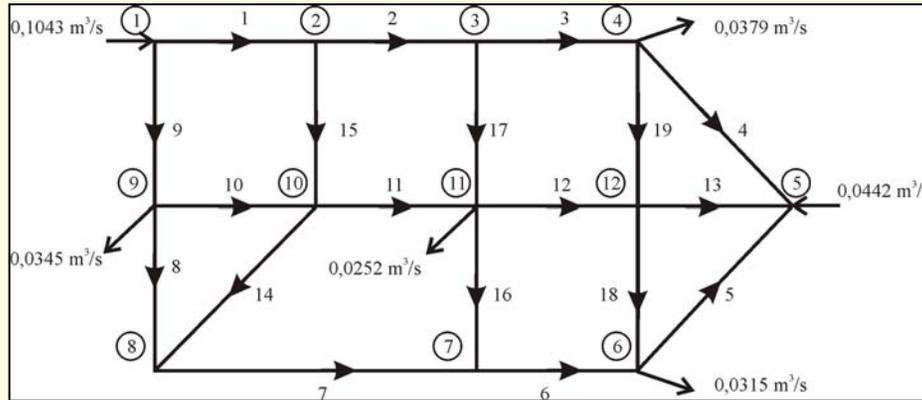


$$h_L = \frac{10,78 \cdot L \cdot q^{1,852}}{C^{1,852} \cdot D^{4,87}} m$$

Nó	Vazão (m³/seg)
1	0,1043
4	-0,0379
5	-0,0442
6	-0,0315
9	-0,0345
11	-0,0252



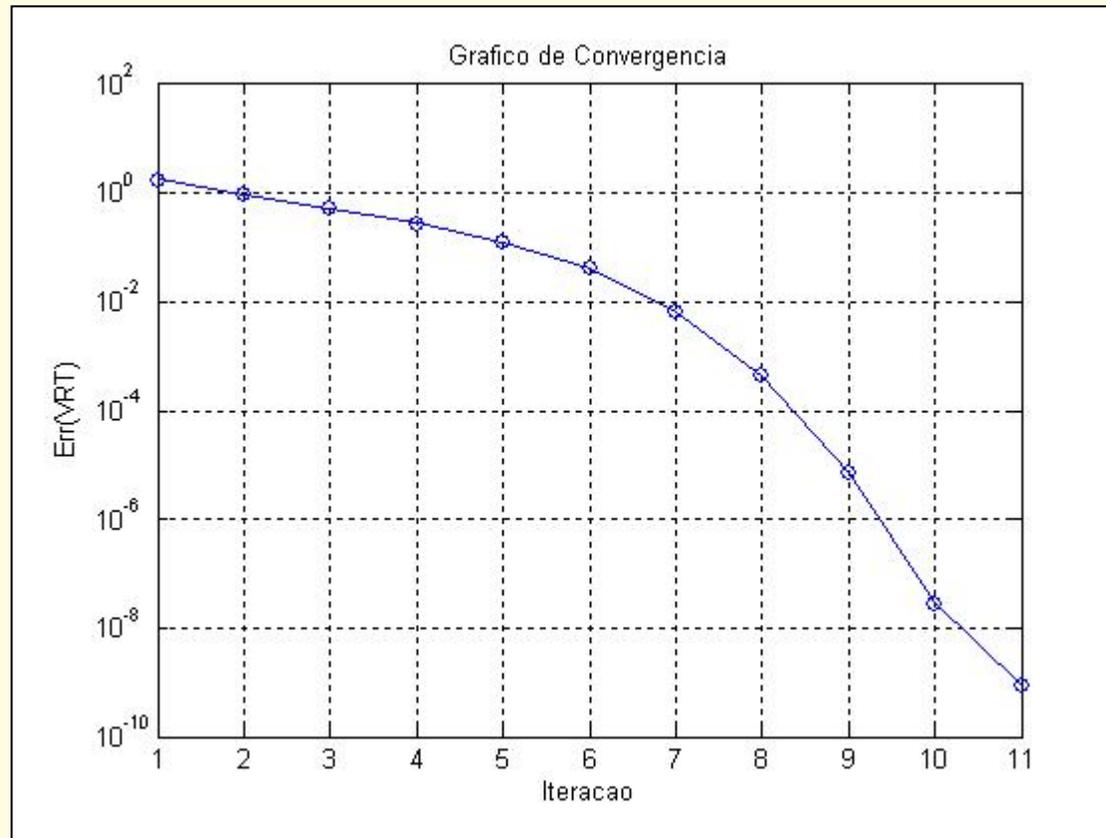
Exemplo 2 – Analogia Elétrica



Exemplo 2 – Aplicação do Método de Refinamento Hierárquico

- Ponto Inicial: $\mathbf{v}_{RT} = \mathbf{0}$
- Janela de Interpolação: $[-10^6, 10^6]$
- No. de pontos de quebra por interpolação: 10
- Critérios de parada:
 - Num_Max_It_Ref = 100
 - Erro_abs = $1e-9$; e Erro_rel = $1e-6$.
 - $\|\mathbf{E}(\mathbf{v}_{RT})\| < 1e-9$

Exemplo 2 – Convergência do Método



A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light greenish-yellow color with a subtle gradient.

Desempenho Computacional

Testes e Observações

Número de Pontos de Quebra e Tamanho da Janela de Interpolação

- Melhor Desempenho:
 - Poucos pontos de quebra
 - Pequena Janela de Interpolação

N° PQ Janela Inicial*	4	10	20	50	100	1000
20	R=9 k=23 t=0.265s	R=5 k=26 t=0.313s	r=4 k=37 t=0.375s	R=3 k=83 t=0.687s	r=2 k=139 t=1.281s	r=1 k=787 t=6.578s
200	R=11 k=24 t=0.359s	R=6 k=35 t=0.407s	r=4 k=51 t=0.453s	R=3 k=94 t=0.75s	r=3 k=153 t=1.343s	r=2 k=700 t=5.828s
2000000	R=19 k=40 t=0.484s	R=10 k=50 t=0.484s	r=7 k=63 t=0.546s	R=6 k=125 t=1.015s	r=5 k=203 t=1.766s	r=3 k=1691 t=14.484s

Escolha do Ponto Inicial

- A escolha do ponto inicial neste exemplo não afetou significativamente o tempo que o algoritmo levou para chegar à solução.

$v_{RT}^{(0)} = k \times \mathbf{1}_n$	Tempo de Processamento	N
$k = 0$	0.453s	0
$k = 4.0292$	0.453s	0
$k = 1.000$	0.453s	0
$k = 50.000$	0.453s	0
$k = 100.000$	0.468s	2
$k = 250.000$	0.579s	17
$k = 500.000$	0.594s	19

Escolha do Ponto Inicial

- Se o número de pontos de quebra escolhido é relativamente pequeno, o tempo de solução do Método de Refinamento Hierárquico praticamente independe do ponto escolhido como solução inicial.

A silver metal spiral binding is visible on the left side of the page, looping through a series of holes in the paper. The background of the page is a light olive green color.

Conclusão

Discussão dos Resultados

Resultados

- Um algoritmo para solução de redes resistivas não lineares com prova de convergência e com bom desempenho computacional.
- Propriedade fundamental: imanência da curva de solução na região da solução do refinamento anterior.

Resultados

- Na solução de redes elétricas: uma eficiente ferramenta de simulação de circuitos não lineares.
- Na solução de redes hidráulicas: ferramenta valiosa, que, ao contrário dos métodos tradicionalmente empregados, possui simultaneamente garantia de convergência e eficiência computacional.

Futuros Estudos

- Inclusão de outros tipos de elementos no circuito;
- Extensão para redes não lineares que possam apresentar múltiplas soluções;
- Extensão para análise dinâmica de redes não lineares.