UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Dpto. de Matemáticas
(Área de Álgebra)
Curso 2004/05

RELACIÓN DE PROBLEMAS Nº 2
CONJUNTOS Y APLICACIONES

1. Sean X e Y conjuntos. Demostrar:
   a) $X = X \cup Y \Leftrightarrow Y \subseteq X$.
   b) $X = X \cap Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.

2. Llamaré cardinalidad de un conjunto finito X al número de elementos de X. Para A, B subconjuntos de X, calcular la cardinalidad de $A \cup B$.

3. Se llama diferencia lógica de dos conjuntos $A, B \in P(X)$, al conjunto
$$A - B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \notin B \}$$
Demostrar:
   a) $A - B = A \cap B'$
   b) $(A - B)' = A' \cup B$
   c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   d) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

4. Dados los conjuntos A, B, C, D, demostrar que se verifica:
   a) $A \times C = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.
   b) $B \times D \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq A$ y $D \subseteq C$.
   c) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
   d) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
   e) $\mathit{card}(A \times B) = \mathit{card}(A)\,\mathit{card}(B)$.

5. Se considera la correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida por
$$G = \{(x,y) : 2x + y = 16 \}$$
Se pide:
   a) Calcular el grafo de forma explícita.
   b) Restringir dominio o codominio, si es necesario, para que G determine una aplicación.

6. Estudiar si las correspondencias de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por los siguientes grafos, son aplicaciones. Reducir su dominio o codominio para que lo sean, y estudiar también éstos para deducir la inyectividad y sobreyectividad de las mismas.
$$G =\{(x,y) : y = \cos(x)\}.$$
$$G =\{(x,y) : y = 1/(x-1)\}.$$

7. Dado el conjunto $G = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 16\}$. Se pide:

(a) Estudiar si G es un grafo de una correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En caso contrario reducir G para que lo sea.
(b) Estudiar si la correspondencia del apartado (a) es una aplicación. En otro caso, reducir dominio y/o codominio para que lo sea.
(c) ¿Es la aplicación obtenida en el apartado (b) inyectiva? En caso contrario, reducir dominio y/o codominio para que lo sea.
(d) ¿Es sobreyectiva?. Reducir dominio y/o codominio para que lo sea.

8. Consideremos las aplicaciones f,g,h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x+2,\ g(x) = x/2,\ h(x) = x^2$$

Comprobar que $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ y $h\circ g \neq g\circ h$.

9. Determinar una partición de $\mathbb{Z}$ con al menos 3 conjuntos y de manera que uno de ellos sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x \text{ es par}\}$.

10. Dadas dos aplicaciones f: A → B y g: B → C, si $h = g\circ f$ probar:
    a) Si h es inyectiva, entonces f es inyectiva.
    b) Si h es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
    c) Si f y g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
    d) Si f y g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

11. Sea f: X →Y una aplicación. Entonces
    a. f es inyectiva si y sólo si $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ para todo $A, B \subseteq X$.
    b. f es sobreyectiva si y sólo si $f_*(f^*(C)) = C$ para todo $C \subseteq Y$.

12. Dada una aplicación f: X → Y demostrar que f es inyectiva si y sólo si $f\,g = f\,h \Rightarrow g = h$ para cualesquiera aplicaciones g y h.

13. Dada la correspondencia f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$definida dela forma $f(x) = \dfrac{x+3}{1+2x}$. Estudiar dominio y codominio para que f sea aplicación y calcular la aplicación inversa de f donde sea posible.

14. Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}: x > 7\}$ definida por $f(x) = e^x + 7$. Estudiar la biyectividad de la aplicación y calcular f^{-1} para el dominio y codominio apropiados.

15. En el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ se establece la relación binaria

$$R=\{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

Justificar que es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente.

16. Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales no nulos sobre el que definimos la siguiente relación binaria

$$a \mathrel{R} b \quad \text{sii} \quad a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$$

Comprobar que R es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente.

17. Calcular la descomposición canónica de la aplicación $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

18. En el cuerpo de los números racionales se define la siguiente relación binaria

$$x\ R\ y \Leftrightarrow \text{Existe un número } h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = \frac{3y+h}{3}$$

   a. Probar que R es una relación de equivalencia.
   b. Determina el conjunto cociente.
   c. Razonar si los elementos 2/3 y 4/5 pertenecen a la misma clase.

19. Sea E un conjunto y A un subconjunto de E, fijo. Se define la aplicación g: P(E) $\rightarrow$ P(E) por $g(X) = A \cup X$ para cada $X \in$ P(E).
   a. Hallar la descomposición canónica de g.
   b. Demostrar que existe una biyección entre los conjuntos Im(g) y P(E-A).

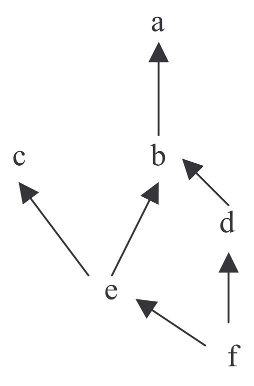
20. Dado el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, consideremos la relación binaria R:

$$x\ R\ y \Leftrightarrow \frac{x-y}{5} \in \mathbb{Z}$$

   a. Demostrar que R es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente $\mathbb{Z}/R$.
   b. Dada la aplicación f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/R$ definida por $f(x) = \overline{y}$ donde y es un número entero menor que 5 relacionado con x. Calcular la descomposición canónica de la aplicación f.

21. Sea X un conjunto ordenado. Estudiar la relación existente entre los maximales y los máximos de los subconjuntos de X.

22. Sea X = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} junto con la ordenación dada por el siguiente diagrama:



Sea Y = {b, f, e, h, i, j} y Z = {j, g, e, b, f, a} subconjuntos de X. Se pide:
   a. Cotas superiores e inferiores de Y y de Z. ¿Existen supremo e ínfimo?.
   b. Máximos y mínimos de Y y Z.
   c. Elementos maximales y minimales de X, Y y Z.