PRÁCTICA Nº7

Álgebras de Boole: funciones booleanas.

0.- INTRODUCCIÓN.

En esta práctica aprenderemos a definir las funciones booleanas de dos variables. Además y de forma análoga a como se hizo en la práctica 3 calcularemos la tabla de verdad de cualquier función booleana.

1.- FUNCIONES BOOLEANAS DE 1 VARABLE.

Existen cuatro funciones booleanas de 1 variable:

x	g_0	g_1	g_2	g_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Todas ellas serían muy fáciles de definir en el Mathemática:

```
g0[x_]:=0;
g1[x_]:=x;
g2[x_]:=Mod[x+1,2];
g3[x_]:=1;
```

Excepto g2 todas son triviales, g2 realmente es el complemento de una variable, podemos fijarnos que cambia el valor a 1 si éste es 0 y a 0 si éste es 1, por tanto la vamos a renombrar y escribiremos:

```
Neg[x_]:=Mod[x+1,2]
```

2.- FUNCIONES BOOLEANAS ELEMENTALES DE DOS VARIABLES.

Sabemos que existen 16 tipos distintos de funciones booleanas elementales de 2 variables:

x	**y**	**f_0**	**f_1**	**f_2**	**f_3**	**f_4**	**f_5**	**f_6**	**f_7**	**f_8**	**f_9**	**f_{10}**	**f_{11}**	**f_{12}**	**f_{13}**	**f_{14}**	**f_{15}**
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Escrituras mas usuales:	**Nombres más usuales:**
$f_0(x,y)=0$	*Constante 0, contradicción*
$f_1(x,y)=x\downarrow y$	*Operación de Pierce, NOR, ni*
$f_2(x,y)=\overline{x}\wedge y$	
$f_3(x,y)=\overline{x}$	*Complemento de la 1ª componente*
$f_4(x,y)=x*y$	*Inhibidor*
$f_5(x,y)=\overline{y}$	*Complemento de la 2ª componente*
$f_6(x,y)=x\oplus y$	*Diferencia simétrica o exclusiva, XOR*
$f_7(x,y)=x\uparrow y=x\mid y$	*Operación de Sheffer, exclusión, NAND*
$f_8(x,y)=x\wedge y=xy$	*Ínfimo, producto, AND*
$f_9(x,y)=x\leftrightarrow y=x^y$	*Equivalencia lógica, potencia booleana*
$f_{10}(x,y)=y$	*Proyección de la segunda componente*
$f_{11}(x,y)=x\rightarrow y$	*Implicación lógica, condicional*
$f_{12}(x,y)=x$	*Proyección de la primera componente*
$f_{13}(x,y)=x\leftarrow y$	*Implicación recíproca*
$f_{14}(x,y)=x\vee y=x+y$	*Supremo, suma, OR*
$f_{15}(x,y)=1$	*Constante1, tautología*

Algunas de ellas se pueden definir con Mathematica de manera directa:

f0[x_,y_]:=0
f10[x_,y_]:=y
f12[x_,y_]:=x
f15[x_,y_]:=1

de esta forma definimos f_0, f_{10}, f_{12} y f_{15} respectivamente.

También podemos definir f_8 así:

f8[x_,y_]:=x*y

Y utilizando el complementario podemos obtener f_7**,** f_5 y f_3 fácilmente:

f7[x_,y_]:=Neg[f8[x,y]]
f3[x_,y_]:=Neg[x]
f5[x_,y_]:=Neg[y]

Para definir f_{14} vamos a utilizar las Leyes de Morgan y entonces nos quedará:

f14[x_,y_]=Neg[f8[Neg[x],Neg[y]]]

El resto de funciones se pueden definir fácilmente utilizando las anteriores.

Ejercicio 1:

Determinar funciones que representen todas las funciones booleanas elementales de dos variables que no han sido definidas hasta ahora.

Solución:

3.- TABLAS DE VERDAD DE FUNCIONES BOOLEANAS.

Una vez que sabemos la forma de representar las funciones booleanas elementales de dos variables, utilizando el ordenador, el siguiente paso que vamos a dar será escribir un programa que calcule las tablas de verdad de una función boolena cualquiera. Es evidente, teniendo en cuenta la semejanza con el cálculo de tablas de verdad de una forma enunciativa, que dicho programa tendrá un gran parecido con el que aparecía en la práctica 3.

Ejemplo 1:

Calcular la tabla de verdad de la función booleana : $f(x,y,z) = (x \wedge \overline{y}) \vee z$.

SOLUCIÓN:

PROGRAMA	COMENTARIOS	
Neg[a_]:= Mod[a+1,2]; **f8[a_,b_]:= a*b;** **f14[a_,b_]:= Neg[f8[Neg[a],Neg[b]]];**	Zona para incluir las definiciones de las funciones elementales que necesitemos.	
n=3;	Nº de variables de la función	
x=Table[0,{t,n}];	Variables de la función.	
Funcion:=f14[f8[x[[1]], Neg[x[[2]]]],x[[3]]];	Función booleana cuya tabla de verdad queremos calcular.	
tabla=Table[0,{r,(2^n+1)},{s,n+1}];	Tabla donde introduciremos los valores resultantes.	
For[k=1,k<n+1,k++,tabla[[1,k]]=k];	Bucle que introduce los valores de la primera fila de la tabla, que indican a que variable nos referimos en cada columna.	
tabla[[1,n+1]]="Exp";	Da el valor “exp” a la última columna.	
For[i=0,i<2^n,i++, **j=i;**		Bucle que recorre todas las posibles combinaciones de valores que pueden tomar las variables de función.
For[f=n,f>0,f--, **resto=Mod[j,2];** **j=Floor[j/2];** **If[resto==0,x[[f]]=0;tabla[[i+2,f]]=0,x[[f]]=1;tabla[[i+2,f]]=1];** **];**	Bucle que calcula la combinación de valores que toman las variables de función.	
tabla[[i+2,n+1]]=funcion; **];**	Introducimos en la última columna la imagen de la función booleana.	
MatrixForm[tabla]	Muestra en pantalla la tabla de verdad.	

En la primera linea escribiremos las definiciones de todas las funciones booleanas elementales que necesitemos.

En el programa han sido destacadas dos zonas sombreadas con gris claro que nos resaltan las líneas que son especiales para el cálculo de la tabla de verdad de esta función booleana en particular. La primera línea:

n=3;

define el número de variables de la función booleana. La segunda línea:

funcion=f14[f8[x[[1]], Neg[x[[2]]]],x[[3]]];

introduce en el ordenador la función booleana con el nombre 'función', cuya tabla de verdad queremos calcular.

Tras copiar el programa e insertar la salida que nos dará el Mathematica será:

1	2	3	Exp
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

<u>Ejercicio 2:</u>

Calcula las tablas de verdad de las siguientes funciones booleanas:

a) $f_1(x,y,z,t,u) = (x \vee t) \wedge \overline{(y \wedge u)} \wedge z$

b) $f_2(x,y,z,t) = ((x \oplus t) \wedge \overline{y}) \vee z$

c) $f_1(x,y,z,t,u) = (x \downarrow \overline{y}) \wedge (t \leftarrow z)$

<u>Solución:</u>

4.- FORMA CANÓNICA EN MINTÉRMINOS Y EN MAXTÉRMINOS.

Con unos pequeños cambios en el programa que vimos en la práctica 4 y que nos daba las formas normales de una forma enunciativa cualquiera nos va a permitir calcular la forma canónica en mintérminos y maxtérminos de cualquier función booleana.

Ejemplo 2.-

Calcular la tabla de verdad de la función booleana : $f(x,y,z)=(x\wedge \overline{y})\vee z$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

PROGRAMA	COMENTARIOS
Neg[a_]:= Mod[a+1,2]; **f8[a_,b_]:= a*b;** **f14[a_,b_]:= Neg[f8[Neg[a],Neg[b]]];**	Zona para incluir las definiciones de las funciones elementales que necesitemos.
n=3;	Nº de variables de la función
cadena=""; **cadena2="";** **cad="";** **cad2="";**	
cero=True;	Suponemos que es la función cero
uno=True;	Suponemos que es la función uno.
x=Table[0,{t,n}];	Variables de la función.
Funcion:=f14[f8[x[[1]], Neg[x[[2]]]],x[[3]]];	Función booleana cuya tabla de verdad queremos calcular.
For[i=0,i<2^n,i++, **j=i;** **cad="";** **cad2="";**	Bucle que recorre todas las posibles combinaciones de valores que pueden tomar las variables de función.
For[f=n,f>0,f--,	Bucle que calcula la combinación de valores que toman las variables de función.
resto=Mod[j,2]; **j=Floor[j/2];**	
If[resto==0,x[[f]]=1; **If[f==n,** **cad=StringJoin["x",ToString[f],cad],** **cad=StringJoin["x",ToString[f]," . ",cad]];** **If[f==n,** **cad2=StringJoin["(~x",ToString[f],")",cad2],** **cad2=StringJoin["(~x",ToString[f],")"," + ",cad2]];** **,x[[f]]=0;** **If[f==n,** **cad=StringJoin["(~x",ToString[f],")",cad],** **cad=StringJoin["(~x",ToString[f],")"," . ",cad]];** **If[f==n,** **cad2=StringJoin["x",ToString[f],cad2],** **cad2=StringJoin["x",ToString[f]," + ",cad2]];** **];** **];**	
If[Mod[funcion,2]==1, **If[cadena=="",cadena=StringJoin[cadena, "(", cad, ")"],** **cadena=StringJoin[cadena, " + (",cad,")"]];** **cero=False;** **,**	Determina si es la constante cero y va calculando la forma canónica en mintérminos.

If[cadena2=="",cadena2=StringJoin[cadena2, "(", cad2, ")"], cadena2=StringJoin[cadena2, " . (",cad2,")"]]; uno=False;];];	Determina si es la constante uno y va calculando la forma canónica en maxtérminos.
If[cero, Print["Es una función constante 0."], Print["No es la función constante 0 y la forma canónica en mintérminos es: ",cadena]]; If[uno, Print["Es una tautología."], Print["No es la función constante 1 y la forma canónica en maxtérminos es: ",cadena2]];	Salida de resultados.

La salida que nos dará el Mathematica será:

No es la función constante 0 y la forma canónica en mintérminos es: (x1 . x2 . x3) + (x1 . (~x2) . x3) + (x1 . (~x2) . (~x3)) + ((~x1) . x2 . x3) + ((~x1) . (~x2) . x3)

No es la función constante 1 y la forma canónica en maxtérminos es:
((~x1) + (~x2) + x3) . (x1 + (~x2) + x3) . (x1 + x2 + x3)

Ejercicio 3:

Calcula las formas canónicas en mintérminos y maxtérminos de las funciones booleanas del ejercicio anterior.

Solución: