PRÁCTICA Nº10

Polinomios.
Cálculos básicos con polinomios.

1.- INTRODUCCIÓN.

En esta práctica se pretende estudiar algunas funciones básicas aplicables a polinomios y algunas operaciones básicas entre polinomios. Aprendemos a representarlos, a utilizar el algoritmo de la división y obtener raíces.

2.- REPRESENTACIÓN DE POLINOMIOS DE 1 Y VARIAS VARIABLES.

Un polinomio en Mathematica se define de la misma forma que una función. Por ejemplo para introducir el polinomio $p(x) = x^2 + 1$, escribiremos:

p[x_]:=x^2+1;

Análogamente si el polinomio es de varias variables, por ejemplo si $q(x,y) = xy + x + 1$ escribiremos:

q[x_,y_]:=x*y+x+1;

Para comprobar si una expresión es un polinomio disponemos de la función:

PolynomialQ[expresión,{variable1,variable2,...}]

Ejemplo 1:

Por ejemplo si introducimos:

f[x_]:=1/x
PolynomialQ[f[x],x]

la salida será 'False'.

Y por el contrario si introducimos:

PolynomialQ[x+1,x]

la respuesta será 'True'.

3.- ALGORITMO DE LA DIVISIÓN.

Al igual que en el anillo de números enteros, en el anillo de polinomios existe un algoritmo de la división, entonces para dos polinomios p(x) y q(x)≠0, existen otros dos polinomios únicos c(x) y r(x) en el mismo anillo de polinomios, de forma que:

$$p(x) = q(x)c(x) + r(x)$$
$$gr(r(x))<gr(q(x))$$

donde c(x) es el cociente y r(x) es el resto.

Para calcular c(x) y r(x), disponemos de dos funciones especiales en el Mathematica:

- **PolynomialQuotient[polinomio1, polinomio2, var],** nos devuelve el cociente que resulta de dividir polinomio1 entre polinomio2, considerándolos a éstos como polinomios en la variable ‘var’.
- **PolynomialRemainder[polinomio1, polinomio2, var],** nos devuelve el resto que resulta de dividir polinomio1 entre polinomio2, considerándolos a éstos como polinomios en la variable ‘var’.

Ejemplo 2:

Calcular el cociente y el resto que resulta de dividir $x^7 + 2x^3 - x - 5$, entre $x^2 + 1$.

SOLUCIÓN:

Insertamos las instrucciones siguientes:

PolynomialQuotient[x^7+2x^3-x-5, x^2+1, x]
PolynomialRemainder[x^7+2x^3-x-5, x^2+1, x]

Y el ordenador nos responde:

$$3\,x - x^3 + x^5$$

$$-5 - 4\,x$$

4.- POLINOMIOS EN Z_n.

Si queremos trabajar con polinomios en Z_n utilizaremos la expresión:

PolynomialMod[poly, m]

que nos devolverá el polinomio ‘poly’ módulo ‘m’.

Ejemplo 3:

Calcular el polinomio $2x^2 + x + 1$ módulo 2.

SOLUCIÓN:

Insertamos:

PolynomialMod[2x^2 + x + 1, 2]

Y el ordenador nos devuelve:

$$1 + x$$

5.- FACTORIZACIÓN Y CÁLCULO DE RAICES.

1. *Factorización y cálculo de raíces en Z.*

Para factorizar un polinomio en Z, y en consecuencia determinar sus raices, utilizaremos

Factor[poly]

2. *Factorización y cálculo de raíces en Z_n.*

En Z_n, con n primo, nos permitirá calcular sus raíces y en consecuencia su factorización:

Factor[poly, Modulus->n]

3. *Factorización y cálculo de raíces en R y C.*

Para factorizar en R y C; calcularemos todas las raíces de nuestro polinomio, y distinguiendo cuales de ellas son racionales, cuales son reales y cuales complejas, daremos respuesta a las tres cuestiones. Para calcular todas las raíces de un polinomio podemos utilizar:

```
Roots[polinomio==0, var]
Solve[polinomio==0, var]
```

para calcular las raíces de forma simbólica y:

```
NRoots[polinomio==0, var]
NSolve[polinomio==0, var]
```

para calcularlas de forma aproximada.

Ejemplo 4:

Calcular las raíces y la factorización de $x^5 + x + 1$ en Z, Z_2, Z_3, R y C.

SOLUCIÓN:

Introduciremos:

```
Factor[x^5+x+1]
Factor[x^5+x+1, Modulus -> 2]
Factor[x^5+x+1, Modulus -> 3]
NRoots[x^5+x+1==0,x]
```

y el ordenador nos responderá:

Factorización en Z:

$$\mathbf{(1 + x + x^2)(1 - x^2 + x^3)}$$

Factorización en Z_2:

$$\mathbf{(1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^3)}$$

Factorización en Z_3:

$$\mathbf{(2 + x^2)(1 + 2x^2 + x^3)}$$

Raíces del polinomio:

x == -0.754878 || x == -0.5 - 0.866025 I || x == -0.5 + 0.866025 I ||
x == 0.877439 - 0.744862 I || x == 0.877439 + 0.744862 I

6. OTRAS INSTRUCCIONES ÚTILES PARA POLINOMIOS.

Además de las ya mencionadas existen algunas otras instrucciones interesantes para polinomios:

- **Expand[polinomio]** quita los paréntesis, realiza la operación contraria a factor.
- **FactorList[polinomio]** nos devuelve una lista de los factores del polinomio junto con sus exponentes.
- **CoefficientList[polinomio, var]** devuelve una lista de coeficientes de potencias en ‘var’, empezando por 0.
- **Collect[polinomio, x]** junta los términos con la misma potencia en x.
- **PolynomialGCD[poly1,poly2]** devuelve el máximo común divisor de los polinomios ‘poly1’ y ‘poly2’.
- **PolynomialLCM[poly1,poly2]** devuelve el mínimo común múltiplo de los polinomios ‘poly1’ y ‘poly2’.

<u>Ejercicio 1:</u>

Calcular la factorización y las raíces del polinomio $x^6 + x^5 + 5x$ en C, R, Z y Z_2.

<u>Solución:</u>