Hier auf glatten Felsenwegen
laufe ich tanzend dir entgegen,
tanzend wie Du pfeifst und singst :
der Du ohne Schiff und Ruder,
als der Freiheit frei'ster Bruder
ueber wilde Meere springst.
FRIEDRICH NIETZSCHE

Elementos de álgebra vectorial

En este resumen presentamos algunos resultados matemáticos elementales del álgebra vectorial que son indispensables para la comprensión de este curso[1].

Entendemos por un punto en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ a una tríada ordenada $\{x, y, z\}$ de tres números reales $x, y, z \in \mathbb{R}$. A los números reales, junto con sus unidades físicas, los llamaremos también **escalares**. **escalares**

Definición. Llamaremos aquí "**marco de referencia**" a un sistema Cartesiano constituido por tres ejes o líneas rectas infinitas ortogonales entre sí que se cortan en un punto que llamamos el "origen" del sistema de coordenadas. Sobre cada recta asociamos a cada una las coordenadas x, y , z. **marco de referencia**

Por razones físicas asociamos además una unidad física conveniente con cada eje, por ejemplo de longitud como *metros*. Si ahora nos imaginamos a un segmento de recta que parta del origen y lo una con el punto $P = \{x, y, z\}$ obtenemos lo que llamaremos **vector de posición** del punto P.

Las **unidades físicas** del vector de posición son los metros, lo cual suele denotarse usando los paréntesis cuadrados "[" y "]" como

$$[\vec{r}] = metros, \tag{1}$$

en el **sistema MKS de unidades**, que es el que usaremos.

Definición. Un **vector** cualquiera está caracterizado completamente por su **magnitud**, su **dirección**, y su **sentido**. La magnitud está definida por la longitud del segmento de recta, la dirección por la orientación espacial de la recta infinita sobre la cual se encuentra dicho segmento, y finalmente el sentido esta dado estipulando arbitariamente como "sentido positivo" a desplazamientos alejándose de uno de sus extremos y como "sentido negativo" a desplazamientos inversos. **vector**

[1]Este documento fue elaborado en LaTeX por A. Anzaldo Meneses y puede ser bajado de mx.geocities.com/alfons_physikzwei ó contactando al autor en alfons_rex@hotmail.com

Hay dos maneras usuales de escribir a un vector, que denotaremos simbólicamente como $\vec{r}$. La primera es escribirlo como una matrix de una sola columna

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

vector unitario

La segunda manera de escribirlo es mediante **vectores unitarios**, esto es, de longitud unidad. Asociando un vector unitario con cada eje del sistema de coordenadas y llamándolos, en orden lexicográfico, primero $\hat{\imath}$ para el vector asociado con el eje x, seguidamente $\hat{\jmath}$ con el eje y, y finalmente $\hat{k}$ con el eje z, tenemos

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{3}$$

En ambas maneras de describir a un vector en términos de las coordenadas $\{x, y, z\}$ tenemos implícitas a su magnitud

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{4}$$

cosenos directores

a su dirección por medio, por ejemplo, de los **cosenos directores** dados como los ángulos que hace la línea recta sobre la que se encuentra el vector con los ejes coordenados

$$\cos(\phi_x) = x/r,\ \cos(\phi_y) = y/r,\ \text{y}\ \cos(\phi_z) = z/r, \tag{5}$$

y finalmente tenemos implícito un sentido unívocamente. Claramente, se sigue que

$$\cos(\phi_x)^2 + \cos(\phi_y)^2 + \cos(\phi_z)^2 = 1. \tag{6}$$

Es posible sumar vectores de una manera muy similar a la que sumamos números. Para ello basta definir la suma de dos vectores $\vec{r}_1 = x_1\,\hat{\imath} + y_1\,\hat{\jmath} + z_1\,\hat{k}$ y $\vec{r}_2 = x_2\,\hat{\imath} + y_2\,\hat{\jmath} + z_2\,\hat{k}$, sumando sus respectivas componentes y obteninedo al nuevo vector

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2)\,\hat{\imath} + (y_1 + y_2)\,\hat{\jmath} + (z_1 + z_2)\hat{k}. \tag{7}$$

resultante

Llamamos al vector $\vec{r}$, el **vector resultante** . Lógicamente, podemos sumar más de dos vectores siguiendo el mismo procedimiento. El vector resultante de la suma de los N vectores $\vec{r}_i$ con $i = 1, 2, 3, \cdots, N$, será

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} (x_i\,\hat{\imath} + y_i\,\hat{\jmath} + z_i\hat{k}). \tag{8}$$

Otra operación elemental es el producto de un vector con un número cualquiera $a \in \mathbb{R}$, multiplicando cada una de las componentes del vector por dicho escalar y obteniendo nuevamente un vector, llamémoslo $\vec{R}$, dado por

$$\vec{R} = a\,\vec{r} = ax\,\hat{\imath} + ay\,\hat{\jmath} + az\,\hat{k}. \tag{9}$$

A continuación introduciremos una operación para multiplicar vectores, que se conoce como **producto escalar**. Para el primer caso usamos la multiplicación de matrices, que en ésta aplicación simple consiste en multiplicar por la izquierda vectores renglón (también llamados vectores *transpuestos*) $\vec{r_1}^{\,t} = (\, x_1 \quad y_1 \quad z_1 \,)$, por vectores columna $\vec{r_2}$ por la derecha, multiplicar componente por componente y sumar para obtener un número real

producto escalar

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} \equiv \vec{r_1}^{\,t} \vec{r_2} = (\, x_1 \quad y_1 \quad z_1 \,) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \qquad (10)$$

en donde el punto centrado "$\cdot$" nos indica que debemos usar un vector renglón para el primer vector del producto, y un vector columna para el segundo. Este producto es **conmutativo**, esto es,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = \vec{r_2} \cdot \vec{r_1}, \qquad (11)$$

y **distributivo**

distributividad

$$\vec{r_1} \cdot (\vec{r_2} + \vec{r_3}) = \vec{r_1} \cdot \vec{r_2} + \vec{r_1} \cdot \vec{r_3}. \qquad (12)$$

Además, si λ es un real cualquiera,

$$\vec{r_1} \cdot (\lambda \vec{r_2}) = \lambda (\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}) = (\lambda \vec{r_1}) \cdot \vec{r_2}. \qquad (13)$$

Nos percatamos que en el caso en el que las componentes de ambos vectores sean iguales, esto es $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$, entonces efectivamente tendremos que este producto escalar

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}, \qquad (14)$$

nos proporciona el cuadrado de la longitud del segmento r que une al origen con el punto con coordenadas $\{x, y, z\}$. Si el resultado de la operación $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}$ es cero, decimos que los vectores $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ son **ortogonales** . Es posible demostrar que el resultado del producto escalar de dos vectores arbitrarios $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ está dado por

vectores ortogonales

$$\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = r_1 r_2 \cos(\phi), \qquad (15)$$

en donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores y $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ es la magnitud del vector $\vec{r_i}$. La demostración de esta relación es simple, basta con tomar un marco de referencia $\{x, y, z\}$ tal que los vectores $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$ se encuentren en el mismo plano xy y que además, el vector $\vec{r_1}$ tenga componentes distintas de cero solamente en una de las direcciones. Por ejemplo, podemos tomar $\vec{r_1} = x_1 \hat{i}$ y $\vec{r_2} = r_2 cos(\phi) \hat{i} + r_2 sen(\phi) \hat{j}$, en donde ϕ es el ángulo del vector $\vec{r_2}$ con el eje x, y obtener con ello el resultado deseado. Consecuentemente, el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{r_1}$ y $\vec{r_2}$, está dado por

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}}{r_1 r_2}\right) \qquad (16)$$

Nótese que si $\phi = \pi/2$, las direcciones de los vectores hacen noventa grados y entonces el producto se anula correspondiendo efectivamente a vectores ortogonales. Por lo que escribimos

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0, \Rightarrow \vec{r}_1 \perp \vec{r}_2, \tag{17}$$

a menos que uno de los vectores sea nulo. Además, si el ángulo ϕ es cero, los vectores son paralelos, y el resultado es simplemente el producto de las magnitudes. En particular $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$, como se mencionó con anterioridad. Es fácil entender el significado geométrico del producto escalar, si consideramos el caso en el cual el vector $\vec{r}_2$ tenga la componente $z_2 = 0$ y el vector $\vec{r}_1$ tenga solo la componente $x_1 = 1$ distinta de cero. En tal caso $r_1 = 1$ y el ángulo $\phi = arctan(y_2/x_2)$, así que $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = r_2 cos(\phi)$, el cual es simplemente la proyección de $\vec{r}_2$ sobre el eje x que es la dirección del vector $\vec{r}_1$. En general, el producto escalar, también conocido como **producto punto**, nos da la proyección de un vector sobre la dirección del otro multiplicado por la magnitud del segundo.

producto punto

De manera similar se puede proceder utilizando la segunda forma de expresar vectores. Para ello podemos escribir por ejemplo primero a los vectores unitarios como vectores columna

$$\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

y deducir las reglas de multiplicación siguientes

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \ \hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \ \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \ \hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \ \hat{i} \cdot \hat{k} = 0, \ \hat{j} \cdot \hat{k} = 0, \tag{19}$$

De manera análoga, podemos empezar con estas reglas, y cerciorarnos que conducen a los mismos resultados que la definición de producto escalar en términos de vectores columna y renglón.

Mientras que el producto escalar de dos vectores nos da un escalar, hay un producto que nos proporciona un tercer vector. Dicho producto es conocido como **producto vectorial** y está definido como el determinante

producto vectorial

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \hat{i} - det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} \hat{j} + det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \hat{k}, \tag{20}$$

en donde desarrollamos al determinante de la matriz de 3×3 en términos de sus *menores* de 2×2. Calculando los determinantes de 2×2 obtenemos

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\hat{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\hat{k}. \tag{21}$$

$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1$

Substituyendo las respectivas componentes, se sigue que

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_2 \times \vec{r}_1, \tag{22}$$

esta propiedad es conocida como **anticonmutatividad**. Además, por substitución directa en la definición tenemos para $\lambda \in \mathbb{R}$ que

$$\vec{r}_1 \times (\lambda \vec{r}_2) = \lambda(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = (\lambda \vec{r}_1) \times \vec{r}_2. \tag{23}$$

Este producto también es distributivo

$$\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_3. \tag{24}$$

Tomando $\vec{r}_1 = \lambda \vec{r}_2$, esto es vectores paralelos o antiparalelos, tenemos que $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = -\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ y por tanto $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0$, lo que puede escribirse como

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 0, \Rightarrow \vec{r}_1 || \vec{r}_2 \tag{25}$$

Es fácil cerciorarse, partiendo de la definición, que el producto $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ es perpendicular a los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ simultáneamente. Basta calcular a los productos escalares $\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$ y $\vec{r}_2 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$ y demostrar que se anulan. Esta propiedad es muy importante.

$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}}$

En particular consideremos ahora a los vectores unitarios y sus respectivos productos, obtenemos rápidamente

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath},\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \times \hat{k},\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} = -\hat{k} \times \hat{\jmath},\ \hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0. \tag{26}$$

Nótese el orden lexicográfico en los productos con signos positivos en contraste con el orden anti-lexicográfico en productos con un signo negativo. Estos productos nos facilitan los cálculos cuando escribimos vectores en términos de vectores unitarios.

El significado geométrico del producto vectorial, también conocido como **producto cruz** por razones obvias, se puede deducir de manera similar al del producto escalar. Consideremos dos vectores arbitrarios $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ y elijamos un sistema de referencia tal que ambos vectores se encuentren en el plano xy y elijamos al eje x de tal forma que la dirección y sentido del vector $\vec{r}_1$ coincida con éste. Est es, $\vec{r}_1 = x_1 \hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = x_2 \hat{\imath} + y_2 \hat{\jmath}$. Entonces, de la definición tendremos que

producto cruz

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = x_1 y_2 \hat{k} = r_1 r_2 sin(\phi) \hat{k}, \tag{27}$$

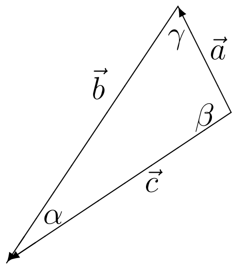
en donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores. Pero, el valor absoluto de estas cantidades es precisamente el **área** contenida en un paralelogramo de lados r_1 y r_2 que hacen un ángulo ϕ, siendo tal el significado geométrico buscado.

Area

Dos aplicaciones bien conocidas de ambos productos son las identidades trigonométricas conocidas como *ley de los cosenos* y *ley de los senos*. Definamos

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{28}$$

en donde los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman un triángulo de ángulos interiores α, β y γ, opuestos a los lados $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente.



Entonces

$$c^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi-\gamma), \tag{29}$$

en donde $\pi-\gamma$ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Pero como $\cos(\pi-\gamma) = -\cos(\gamma)$, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma), \tag{30}$$

Ley de los cosenos

la cual es la conocida **ley de los cosenos**.

Si ahora multiplicamos a $\vec{c}$ vectorialmente por $\vec{a}$ y por $\vec{b}$, tendremos

$$|\vec{a}\times\vec{c}| = ac\ \mathrm{sen}(\beta) = |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\ \mathrm{sen}(\gamma) = |\vec{b}\times\vec{c}| = bc\ \mathrm{sen}(\alpha) = |\vec{b}\times\vec{a}|, \tag{31}$$

o bien, simplificando un poco

$$\frac{\mathrm{sen}(\beta)}{b} = \frac{\mathrm{sen}(\gamma)}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{a}, \tag{32}$$

Ley de los senos

la cual es la **ley de los senos**.

Finalizamos este resumen de rudimentos de álgebra de vectores con el producto mixto $\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2\times\vec{r}_3)$ y el doble producto vectorial $\vec{r}_1\times(\vec{r}_2\times\vec{r}_3)$. Para el primero calculamos lo siguiente

$$\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2\times\vec{r}_3) = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(z_2x_3 - z_3x_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2), \tag{33}$$

en donde la segunda igualdad se obtiene desarrollando nuevamente por menores (de 2×2) al determinante de la matriz de 3×3. Dado que podemos intercambiar cíclicamente el orden de los renglones en la matriz sin alterar el determinante, obtenemos que el punto “$\cdot$” y la cruz “$\times$” se pueden intercambiar

$$\vec{r}_1\cdot(\vec{r}_2\times\vec{r}_3) = (\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\cdot\vec{r}_3 = \vec{r}_2\cdot(\vec{r}_3\times\vec{r}_1), \tag{34}$$

volumen

como puede corroborarse directamente. El significado geométrico de este **producto mixto** es el del **volumen** del paralelepípedo inscrito por los tres vectores, ya que estamos multiplicando un área por una altura.

Ahora veamos al doble producto vectorial $\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$. Como el vector resultante $\vec{r}$ del producto $\vec{r} = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3$ es perpendicular a ambos vectores $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, entonces al multiplicarlo nuevamente vectorialmente por un tercer vector $\vec{r}_1$ obtendremos un vector situado necesariamente en el plano definido por los vectores $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$, así que será una combinación lineal de ambos

$$\vec{r}_1 \times \vec{r} = a\vec{r}_2 + b\vec{r}_3, \;\; a, b \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Para encontrar los valores de las constantes reales a y b basta con substituir en ambos miembros el resultado para la primer componente. Del lado izquierdo tenemos

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r})_x = y_1(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)_z - z_1(\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)_y = y_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_1(z_2x_3 - z_3x_2), \tag{36}$$

y con ello, sumando y restando al término $x_1x_2x_3$ e igualando

$$(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3)x_2 - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)x_3 = ax_2 + bx_3, \tag{37}$$

con lo cual $a = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3$ y $b = -\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$, obteniendo como resultado final la identidad $\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)$

$$\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)\vec{r}_2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)\vec{r}_3. \tag{38}$$

17. Mai 2004