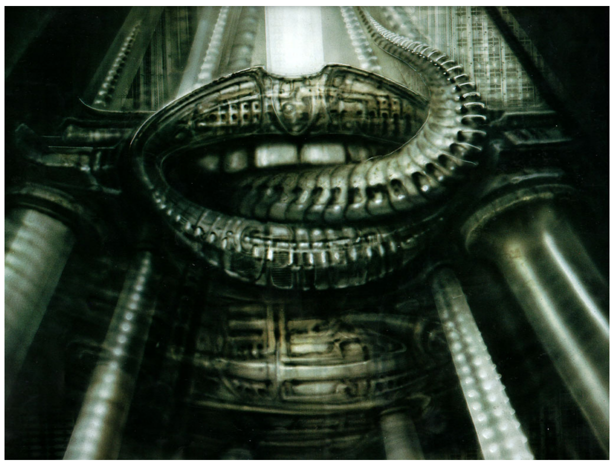
Unidad 3

Oscilaciones Mecánicas



H.R. Giger*

3.1 Oscilaciones Pequeñas

Consideremos ahora un sistema dinámico muy simple, el llamado **oscilador armónico**. Un modelo físico de este sistema es el de una masa puntual m sujeta a un resorte de constante k cuya ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{3.1}$$

en donde $x = 0$ es la posición de equilibrio de la masa m. Para que esta ecuación sea aplicable a un resorte real, es necesario que la **deformación del resorte sea muy pequeña** comparada por ejemplo con la longitud natural (i.e. no deformada) del resorte en cuestión.

Otro problema de interes en muy diversas aplicaciones es el **péndulo físico**. Dicho sistema consiste en un cuerpo rígido oscilando libremente en el plano $x - y$ alrededor de un punto fijo bajo la acción de la gravedad. Si llamamos θ al ángulo que hace con la vertical el

*Tomado de: www.hrgiger.com

segmento de recta que une al punto fijo con el centro de masa, y denotamos por l a la longitud de dicho segmento, tendremos que

$$\vec{\tau} = I\,\ddot{\theta}\hat{k}, \tag{3.2}$$

en donde la torca neta $\vec{\tau}$ está dada por

$$\vec{\tau} = -mgl\,sen(\theta)\hat{k}. \tag{3.3}$$

Con esta ecuación obtenemos a la ecuación diferencial siguiente

$$I\,\ddot{\theta} = -mgl\,sen(\theta). \tag{3.4}$$

Esta ecuación es no lineal en θ lo que complica grandemente su solución en general. Por ello suponemos ahora que las **oscilaciones son muy pequeñas**, lo suficiente como para escribir $sen(\theta) \cong \theta$. Esto nos permite *linearizar* la ecuación como

$$I\,\ddot{\theta} = -mgl\,\theta. \tag{3.5}$$

Esta ecuación es nuevamente de la misma forma que la ecuación para el oscilador armónico representado por la ec.(3.1).

3.1.1 Soluciones periodicas

Hay varias maneras de resolver a las ecuaciones diferenciales ec.(3.1, 3.5). Reescribamoslas como

$$\ddot{x} = -\omega_o^2\,x, \tag{3.6}$$

seleccionando adecuadamente al parámetro $\omega_o = \sqrt{k/m}$ en el primer caso y como $\omega_o = \sqrt{mgl/I}$ en el segundo. Las unidades físicas de ω_o son los segundos a la menos uno, esto es, las de una **frecuencia**. Dado que k y m son mayores que cero, ω_o es un número real.

Comencemos partiendo del **primer Ansatz**

$$x(t) = A\,cos(\omega_o t) + B\,sen(\omega_o t), \tag{3.7}$$

con A y B constantes por determinar. Vemos que la primer derivada es

$$\dot{x}(t) = \omega_o(-A\,sen(\omega_o t) + B\,cos(\omega_o t)), \tag{3.8}$$

y la segunda

$$\ddot{x}(t) = \omega_o^2(-A\,sen(\omega_o t) - B\,cos(\omega_o t)) = -\omega_o^2 x(t), \tag{3.9}$$

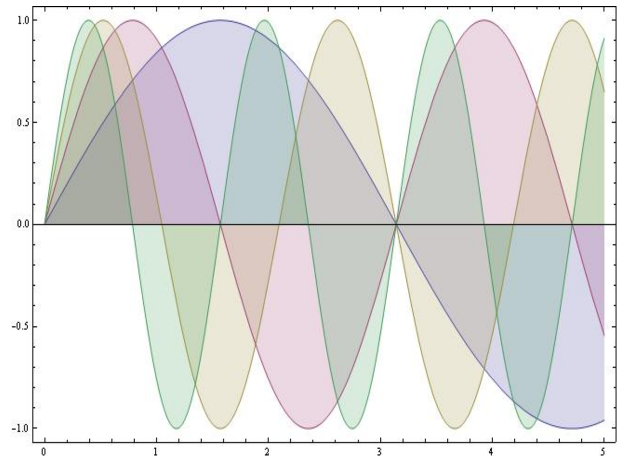
por lo que se satisface la ecuación ec.(3.6). Por tanto la solución $x(t)$ es una función periódica del tiempo con **periodo** $T = \frac{2\pi}{\omega_o}$. Esto significa que $x(t) = x(t+nT)$, para cualquier número entero n, lo cual se cumple gracias a que $cos(\omega_o t + n2\pi) = cos(\omega_o t)$ y que $sen(\omega_o t + n2\pi) = sen(\omega_o t)$. Además, si evaluamos a las funciones $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ en $t = 0$, las **condiciones iniciales** del problema, obtenemos

$$A = x(0), \quad B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_o}. \tag{3.10}$$

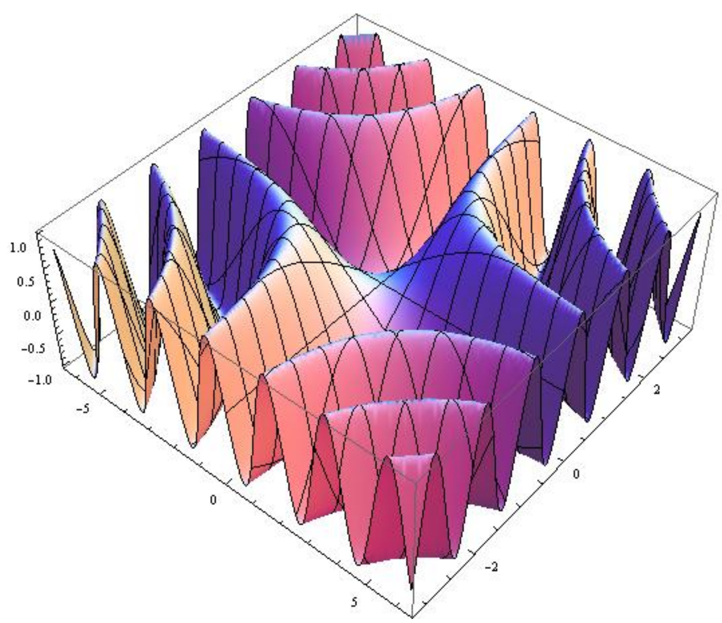
Con lo que finalmente

$$x(t) = x(0)cos(\omega_o t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_o} sen(\omega_o t). \tag{3.11}$$

En la figura siguiente mostramos a $x(t)$ para las frecuencias $\omega_o = 2\pi/n$ con $n = 1, 2, 3, 4$.



En la figura siguiente mostramos también a $x(t)$ como función de $t \in (-2\pi, 2\pi)$ y de $\omega \in (-\pi, \pi)$.



Una **segunda manera alternativa** de resolver este simple problema consiste en proponer

$$x(t) = A_1 cos(\omega_o t + \delta), \tag{3.12}$$

para A_1 y δ constantes por determinar. Dado que la función coseno está acotada por los valores ± 1, la función $x(t)$ oscila entre los valores $+A_1$ y $-A_1$. Por ello se le denomina a la constante A_1 la **amplitud** de las oscilaciones. La constante δ es llamada **la constante ó el corrimiento de fase**, ya que por medio de ella podemos "mover" a la izquierda o a la derecha la gráfica de la función $x(t)$ como función del tiempo. Las derivadas son ahora

$$\dot{x}(t) = -\omega_o A_1 sen(\omega_o t + \delta), \tag{3.13}$$

y

$$\ddot{x}(t) = -\omega_o^2 A_1 cos(\omega_o t + \delta). \tag{3.14}$$

Evaluando nuevamente los valores iniciales obtenemos

$$x(0) = A_1 cos(\delta), \quad \dot{x}(0) = -\omega_o A_1 sen(\delta). \tag{3.15}$$

Despejando a las constantes encontramos

$$\delta = -\, arccot(\frac{x(0)}{\omega_o \dot{x}(0)}), \quad A_1 = \frac{x(0)}{cos(\delta)}. \tag{3.16}$$

Una **tercer manera** de resolver este problema consiste en proponer

$$x(t) = A_2 sen(\omega_o t + \alpha), \tag{3.17}$$

nuevamente para A_2 y α constantes por determinar. Las derivadas serán ahora

$$\dot{x}(t) = \omega_o A_2\, cos(\omega_o t + \alpha), \tag{3.18}$$

y

$$\ddot{x}(t) = -\omega_o^2 A_2\, sin(\omega_o t + \alpha). \tag{3.19}$$

Evaluando nuevamente los valores iniciales obtenemos

$$x(0) = A_2\, sen(\alpha), \quad \dot{x}(0) = \omega_o A_2 cos(\alpha). \tag{3.20}$$

Despejando a las constantes encontramos en este caso

$$\alpha = arctan(\frac{x(0)}{\omega_o \dot{x}(0)}), \quad A_2 = \frac{x(0)}{sen(\alpha)}. \tag{3.21}$$

Una **cuarta forma** de resolver ecuaciones diferenciales de este tipo consiste en proponer soluciones de la forma

$$x(t) = C exp(\lambda t), \tag{3.22}$$

donde nuevamente C y λ son constantes por determinar. Substituyendo en la ecuación diferencial eq.(3.6) llegamos a

$$\lambda^2 = -\omega_o^2, \tag{3.23}$$

que es una ecuación algebráica de segundo orden, la cual es un caso muy simple de las llamadas **ecuaciones de eigenvalores**. Las soluciones de la ecuación de eigenvalores son llamadas

"Eigenvalores" ó también "valores propios". La ecuación de eigenvalores nos dice en este caso que el cuadrado del número λ debe ser negativo, cosa imposible para los números reales. El problema se resuelve fácilmente con la introducción de un número i tal que

$$i^2 = -1. \tag{3.24}$$

Si aceptamos esta ecuación entonces tendremos que los dos eigenvalores son

$$\lambda = \pm i\omega_o, \tag{3.25}$$

dado que tenemos dos signos posibles para cualquier raíz cuadrada, tenemos dos soluciones linealmente independientes, esto significa que hay dos funciones que no se pueden expresar una en términos de la otra mediante relaciones lineales. Así pues la solución será ahora

$$x(t) = Aexp(i\omega_o t) + Bexp(-i\omega_o t), \tag{3.26}$$

y aplicando nuevamente las condiciones iniciales

$$x(t) = x(0)\frac{1}{2}(exp(i\omega_o t) + exp(-i\omega_o t)) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_o}\frac{1}{2i}(exp(i\omega_o t) - exp(-i\omega_o t)). \tag{3.27}$$

Dado que la solución es única, comparando con la solución eq.(3.11), debe satizfacerse que

$$cos(\omega_o t) = \frac{1}{2}(exp(i\omega_o t) + exp(-i\omega_o t)), \;\; sin(\omega_o t) = \frac{1}{2i}(exp(i\omega_o t) - exp(-i\omega_o t)). \tag{3.28}$$

Estas relaciones se pueden usar para expresar las exponenciales en términos de senos y cosenos, sumando y restando ambas ecuaciones

$$exp(i\omega_o t) = cos(\omega_o t) + i\,sin(\omega_o t), \;\; exp(-i\omega_o t) = cos(\omega_o t) - i\,sin(\omega_o t). \tag{3.29}$$

La introducción de la **unidad "imaginaria"** definida por el número i nos permite escribir también una solución al problema en cuestión, pero aún tenemos que interpretar geométricamente que significa el nuevo campo numérico que hemos introducido. Dicho campo se llama el **campo de los números complejos** denotado por $\mathbb{C}$, y está formado por todos los números de la forma

$$z = x + i\,y, \;\; z \in \mathbb{C}, \tag{3.30}$$

para x y y reales. Dado que $i^2 = -1$ es un número real, entonces el producto z_3 de dos números complejos z_1 y z_2 es también un número complejo

$$z_3 = z_1\,z_2 = (x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) = x_3 + i\,y_3, \tag{3.31}$$

para $x_3, y_3 \in \mathbb{R}$. Un caso particular de esta importante propiedad de *cerradura* es el correspondiente a tomar $x_1 = x_2 = x$ y $y_1 = -y_2 = y$ y a escribir $|z|^2 = z_3$ lo que conduce a

$$|z|^2 = z\,z^* = x^2 + y^2, \tag{3.32}$$

en donde definimos al *complejo conjugado* del número complejo z como

$$z^* = x - iy. \tag{3.33}$$

Evidentemente podemos tomar $|z|$ mayor o igual a zero, dicho número positivo es llamado el **módulo** del número complejo $z = x + iy$. Nótese que además $|z| = |z^*|$. Finalmente, estas relaciones nos permiten calcular el inverso z^{-1} de una número complejo mediante

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}, \tag{3.34}$$

en particular $i^{-1} = -i$.

3.1.2 Espacio Fase

Una manera muy útil de analizar este problema consiste en ver que características geométricas tiene asociadas. Para mayor simplicidad consideremos primeramente al sistema formado por el resorte de constante k con una masa puntual m sujeta por un extremo. Multiplicando por $\dot{x}$ a la ecuación del movimiento asociada obtenemos

$$m\dot{x}\ddot{x} = m\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}^2}{2} = -\,k\,\frac{d}{dt}\frac{x^2}{2},$$

ó bien

$$\frac{d}{dt}(E_c(t)\,+\,U(t)) = \frac{d}{dt}E = 0, \tag{3.35}$$

en donde $E_c = m\dot{x}^2/2$ es la energía cinética de la masa, $U = kx^2/2$ es la energía potencial del resorte y $E = E_c + U$ es la energía total. Claramente la **energia total es constante**.

Es conveniente ahora ver a las trayectorias en un plano tomando como absisa a la variable $x(t)$ y como ordenada a la cantidad de movimiento $p(t) = m\dot{x}(t)$, dicho plano es un ejemplo simple de lo que denomina **espacio fase** en el estudio de sistemas dinámicos y del cual veremos aquí varios ejemplos simples.

La ecuación

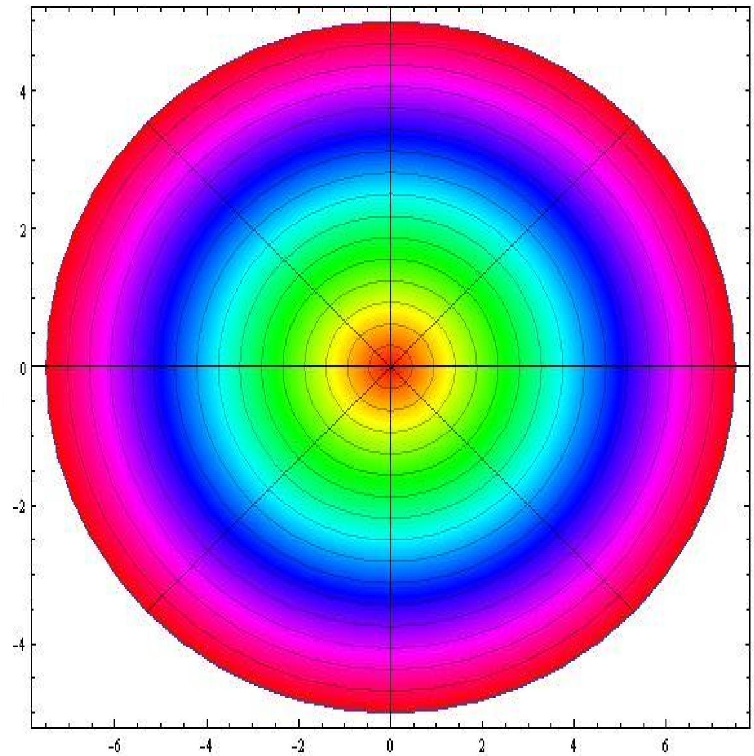
$$\frac{p^2}{2mE}\,+\,k\,\frac{x^2}{2E}\,=\,1, \tag{3.36}$$

corresponde a una curva algebráica en el plano $x - p$. Definiendo a las constantes $a = \sqrt{2E/k}$ y $b = \sqrt{2mE}$ tenemos que

$$\frac{x^2}{a^2}\,+\,\frac{p^2}{b^2}\,=\,1, \tag{3.37}$$

que corresponde a una **elipse** con semiejes de longitudes a y b y con excentricidad $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Esta curva está parametrizada por el tiempo mediante

$$x(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \delta), \quad p(t) = a\,m\,\omega_0\,\cos(\omega_0 t + \delta). \tag{3.38}$$



Espacio fase $\{x, p\}$ del oscilador armónico.

Ahora veamos que sucede con el péndulo físico. Multipliquemos por $\dot{\theta}$ a la ecuación (3.4) para obtener

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{I}{2}\,\dot{\theta}^2 \,+\, mgl\,cos(\theta)\Big) = 0,$$

por lo que

$$E = \frac{I}{2}\,\dot{\theta}^2 \,+\, mgl\,cos(\theta),$$

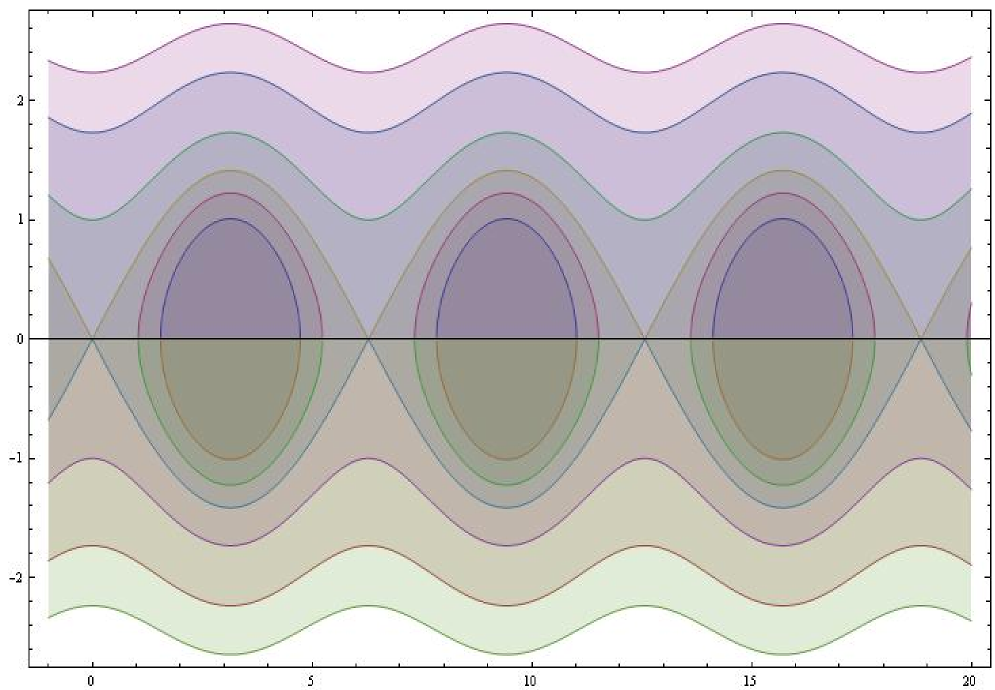
es la energía mecánica constante. Las curvas definidas por esta ecuación ya no son elipses. En la figura siguiente mostramos al espacio fase para el péndulo. Notemos que hay **curvas de tres tipos**.

1. En primer tipo se encuentran las curvas cerradas. Físicamente, este caso corresponde a oscilaciones del péndulo alrededor del punto mas bajo sin alcanzar nunca la posición mas alta. En este caso la energía cinética del punto mas bajo es menor que la energía potencial del punto mas alto. La velocidad angular se anula para algún ángulo intermedio entre 0 y $\pm\pi$.

2. El segundo tipo está dado por las curvas onduladas por arriba o por abajo de la curvas cerradas. La energía cinética del punto mas bajo es mayor que la energía potencial del punto mas alto y por tanto al alcanzar el centro de masas dicho punto se sigue sin detenerse para dar mas vueltas indefinidamente. La velocidad angular nunca se anula y tiene siempre el mismo sentido.

3. En el tercer tipo tenemos a las curvas *singulares* que separan a los dos tipos anteriores. Aquí la energía potencial del punto más alto es igual a la energía cinética del punto mas bajo. El péndulo se tarda un tiempo infinito en alcanzar la cúspide o en salir de ella. La velocidad angular se anula asintóticamente para $t \to \infty$.

Para oscilaciones pequeñas, esto es para θ suficientemente pequeño, el coseno se puede aproximar por $1 - \theta^2/2$, con lo que en tal caso las curvas son nuevamente elipses centradas en $\pm(2n-1)\pi$ con $n = 1, 2, \ldots$.



Espacio fase $\{\theta, \dot{\theta}\}$ del péndulo.

3.2 Oscilador Armonico Amortiguado

Si introducimos una fuerza de amortiguamiento dada por

$$F_a = -b\dot{x}, \tag{3.39}$$

donde b es una constante positiva, la ecuación del movimiento para el problema del resorte de constante k será ahora

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \tag{3.40}$$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente de manera similar a la cuarta forma mostrada en la sección anterior mediante el estudio de la ecuación de eigenvalores . Proponemos entonces como solución a

$$x(t) = A\, e^{\lambda\, t}, \tag{3.41}$$

para A y λ constantes. Entonces, susbstituyendo llegamos a

$$\lambda^2 \, + \, 2\gamma\lambda \, + \, \omega_o^2 = 0, \tag{3.42}$$

con $\omega_o = \sqrt{k/m}$ y $\gamma = b/2m$. Para otros problemas, como por ejemplo el péndulo, estas constantes estaran dadas en términos de los correspondientes parámetros físicos. Esta ecuación de eigenvalores tiene nuevamente dos soluciones, a saber

$$\lambda_{\pm} = \gamma \, \pm \, \sqrt{\gamma^2 \, - \, \omega_o^2}. \tag{3.43}$$

Estos eigenvalores estan formados por el número real positivo γ y el número $\tilde{\omega} = \sqrt{\gamma^2 \, - \, \omega_o^2}$ que puede ser real o imaginario. Si $\gamma > \omega_o$, entonces $\tilde{\omega}$ es real. Si $\gamma = \omega_o$ entonces $\tilde{\omega} = 0$. Finalmente si $\gamma < \omega_o$, entonces $\tilde{\omega}$ es imaginario puro. Es entonces claramente posible analizar este problema mediante el uso de la técnica de los eigenvalores, no obstante, mostraremos un camino mas simple a continuación que consiste en reducir esta ecuación a una mas simple. Para ello se propone como solución a

$$x(t) = exp(-\gamma t) y(t), \tag{3.44}$$

en donde γ es una constante por determinar. Calculando las derivadas con respecto al tiempo y substituyendo en la ecuación para $x(t)$, resulta que $y(t)$ debe satizfacer

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \tag{3.45}$$

con frecuencia ω dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}, \;\; \gamma = \frac{b}{2m}, \;\; \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \tag{3.46}$$

habiendo elegido γ de tal forma que la primer derivada de $y(t)$ en la ecuación resultante tenga un coeficiente nulo. Debido ahora que tenemos una diferencia de dos números positivos en la definición de ω, tendremos tres casos distintos que analizamos a continuación.

3.2.1 Caso Subamortiguado

Este caso corresponde a $\omega_o > \gamma$, con lo que $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ es un número real positivo, tal y como sucede para el oscilador armónico simple. La solución será entonces

$$x(t) = A\, exp(-\gamma t)\, cos(\omega t + \delta). \tag{3.47}$$

Las constantes A y δ estan dadas en términos de las condiciones iniciales. Tenemos que

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) - \omega A\, exp(-\gamma t)\, sen(\omega t + \delta). \tag{3.48}$$

Evaluando para $t = 0$, se sigue que

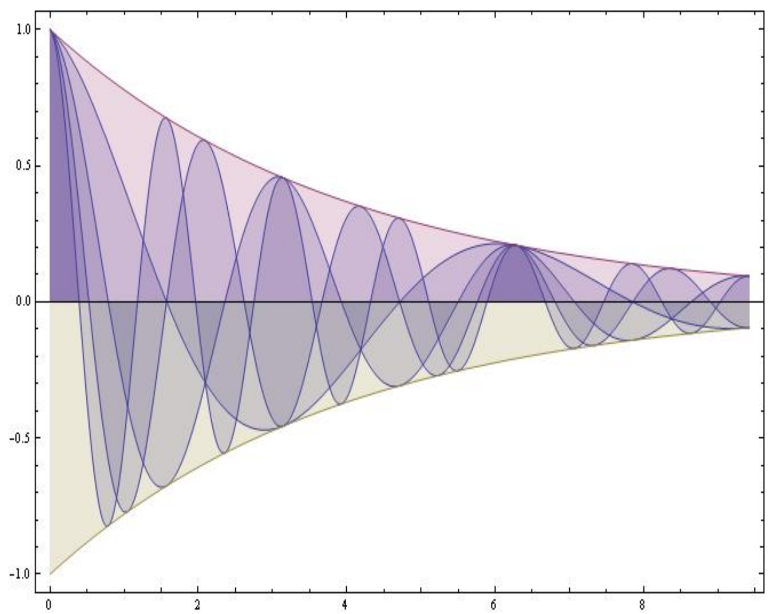
$$x(0) = A\,\cos(\delta), \quad \dot{x}(0) = -\gamma x(0) - \omega A\, sen(\delta). \tag{3.49}$$

Con lo cual,

$$A = \frac{x(0)}{\cos(\delta)}, \quad \delta = -\tan^{-1}\frac{\dot{x}(0) + \gamma x(0)}{\omega x(0)}. \tag{3.50}$$

La solución en este caso decrece exponencialmente con el tiempo, como resultado de la fuerza de amortiguamiento y la amplitud de las oscilaciones varía entre $\pm|A|exp(-\gamma t)$.

En la figura mostramos a $x(t)$ para las frecuencias $n\pi$ seg^{-1} con $n = 1, 2, 3, 4$ y $\gamma = 0.25$ seg^{-1}.



Programa para la figura. (*Oscilador armonico armortiguado y forzado, posición como función del tiempo para diversas fecuencias*)

omega = Pi/2 + .5; (*frecuencia angular*)

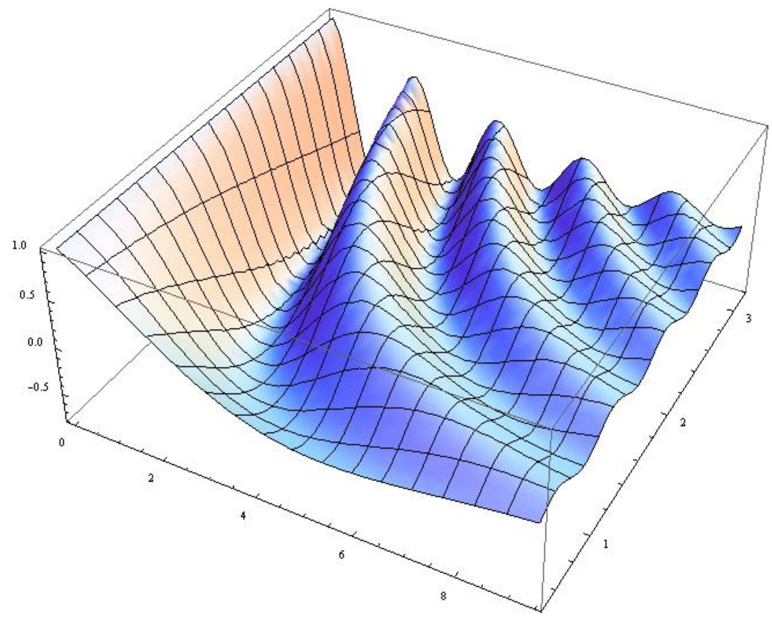
omegaf = Pi/2; (*frecuencia de la oscilacion forzada*)

gama = 0.2;

af0 = 1.0;

Plot[{Evaluate[Table[Exp[-gama t] Cos[n omega t] + af0 Sin[omegaf t], n, 3]], Exp[-gama t], -Exp[-gama t]}, {t, 0, 6 Pi}, Filling -> Axis, PlotRange -> All, Frame -> True, PlotPoints -> 50]

En la figura mostramos a continuación a x como función de t y de ω.



3.2.2 Caso de Amortiguamiento Critico

Este caso corresponde a b tal que $\omega = 0$. La ecuación diferencial para $y(t)$ es simplemente $\ddot{y} = 0$ con solución $y(t) = a + bt$, con a y b constantes. Las condiciones iniciales son ahora

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = -\gamma\, a \,+\, b, \tag{3.51}$$

esto es $b = \dot{x}(0) + \gamma\, x(0)$. La solución completa es

$$x(t) = \, (x_o + (\dot{x}_o + \gamma x_o)t) \; exp(-\gamma t). \tag{3.52}$$

En el caso crítico, la solución también decrece exponencialmente al aumentar el tiempo, aunque un poco mas lentamente que para el caso subamortiguado. Pero lo interesante es que ahora ya *no hay oscilaciones presentes*.

3.2.3 Caso Sobreamortiguado

Finalmente, para $\omega_o < \gamma$, tendremos que ω será imaginaria, $\omega = \, i\,\sqrt{\gamma^2 \,-\, \omega_o}$. La ecuación para $y(t)$ es ahora

$$\ddot{y} \,-\, \tilde{\omega}^2 y = 0, \tag{3.53}$$

con $\tilde{\omega} = \sqrt{\gamma^2 \,-\, \omega_o^2} > 0$. Las soluciones son entonces de la forma

$$y(t) = A_1\, e^{-\tilde{\omega} t} + A_2\, e^{\tilde{\omega} t}. \tag{3.54}$$

Con lo que

$$x(t) = e^{-\gamma t}\, (A_1\, e^{-\tilde{\omega} t} + A_2\, e^{\tilde{\omega} t}). \tag{3.55}$$

La primer derivada esta dada por

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + e^{-\gamma t}\,\omega\,(-A_1\,e^{-\tilde{\omega}t} + A_2\,e^{\tilde{\omega}t}). \tag{3.56}$$

Y las condiciones iniciales son

$$x(0) = A_1 + A_2, \quad \dot{x}(0) = -\gamma x(0) + \omega\,(-A_1 + A_2). \tag{3.57}$$

Despejando a los coeficientes encontramos

$$A_1 = -\frac{\dot{x}(0)}{2\tilde{\omega}} + \frac{x(0)}{2\tilde{\omega}}(\tilde{\omega} - \gamma), \quad A_2 = \frac{\dot{x}(0)}{2\tilde{\omega}} + \frac{x(0)}{2\tilde{\omega}}(\tilde{\omega} + \gamma). \tag{3.58}$$

3.2.4 Disipación de la Energía

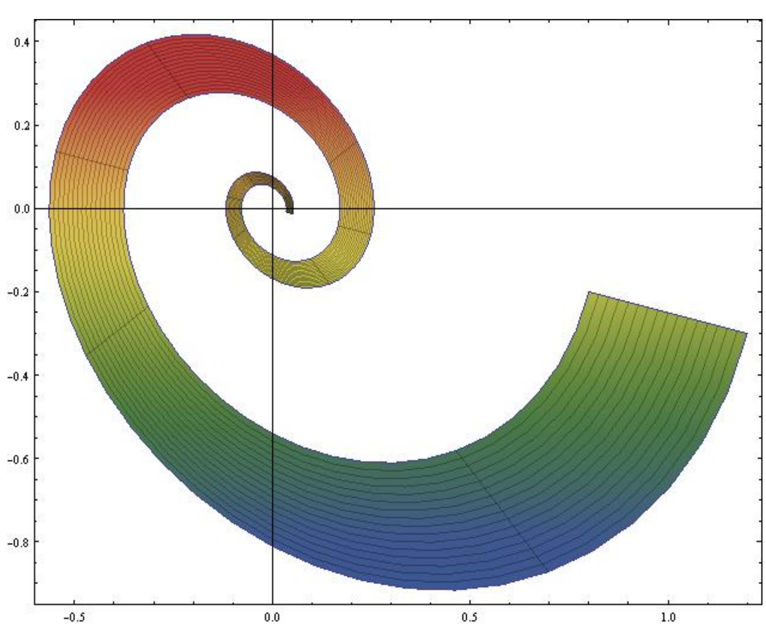
Multipliquemos ahora a la ecuación del movimiento por $\dot{x}$ para obtener

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2) = -b\dot{x}^2. \tag{3.59}$$

Claramente el término entre paréntesis del lado izquierdo no es mas que la energía del oscilador libre. Esto es tenemos una ecuación que nos dice la variación ó disipación de la energía del oscilador atraves del amortiguador de constante b

$$\frac{d}{dt}E = -b\dot{x}^2. \tag{3.60}$$

Mostramos a continuación el espacio fase para un caso subamortiguado con $\gamma = 0.25$ seg^{-1}.



3.3 Oscilador Forzado

En esta sección consideramos al oscilador armónico amortiguado sujeto a una fuerza externa periodica en el tiempo $F = F_o\, sen(\omega_F\, t)$, en la cual ω_F es ahora una frecuencia arbitraria. La ecuación del movimiento es por tanto la siguiente

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_o\, sen(\omega_F\, t). \tag{3.61}$$

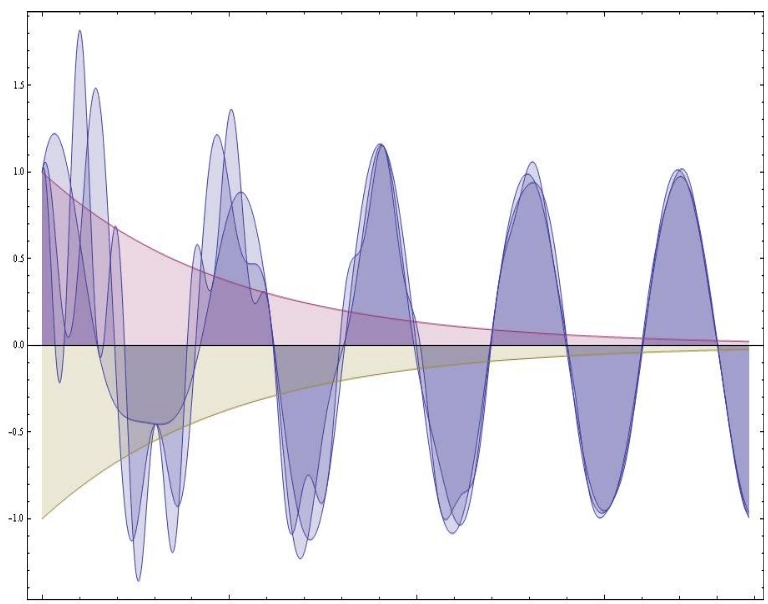
Esta es una ecuación lineal de segundo orden no homogénea. Su solución general se puede escribir como la suma de la solución general $x_h(t)$ de la ecuación homogénea, aquella para $F_o = 0$, mas una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación inhomogénea

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \tag{3.62}$$

Las soluciones posibles de la ecuación homogénea fueron analizadas en la sección anterior. En **todos los casos** $b \neq 0$ encontramos que $x_h(t) \to 0$ para $t \to 0$. Por lo que para un tiempo suficiententemente grande la solución $x(t)$ de nuestro presente problema tenderá a la solución particular

$$x(t) \to x_p(t). \tag{3.63}$$

En la figura siguiente mostramos a la solución completa como funcion del tiempo para tres frecuencias distintas $\omega_0 = n\,\pi/2 + 0.5\,\mathrm{seg}^{-1}$, con $n = 1, 2, 3$ y la frecuencia $\omega_F = \pi/2$. Claramente notamos como las tres soluciones tienden para t suficientemente grande a la misma solución particular que como veremos es de la forma de $F(t)$.



Dado que el lado derecho de la ecuación inhomogénea es conocido podemos suponer que la solución particular será de la misma forma, esto es

$$x_p(t) = A\, sen(\omega_F\, t + \delta). \tag{3.64}$$

Esto implica que

$$\dot{x}_p(t) = \omega_F\, A\, \cos(\omega_F\, t + \delta), \quad \ddot{x}_p(t) = -\omega_F^2\, A\, sen(\omega_F\, t + \delta). \tag{3.65}$$

Y substituyendo en la ecuación inhomogénea

$$(\omega_o^2 - \omega_F^2)\, A\, sen(\omega_F\, t + \delta) + \frac{b}{m}\omega_F\, A\, cos(\omega_F\, t + \delta) = \frac{F_o}{m}\, sen(\omega_F\, t). \tag{3.66}$$

Recordemos ahora que $cos(a{+}b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$ y que $sen(a{+}b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$ por lo que la ecuación última se transforma en

$$\begin{aligned}&(\omega_o^2 - \omega_F^2)\, A\, (sen(\omega_F\, t)cos(\delta) + cos(\omega_F\, t)sen(\delta)) \\ &+ \frac{b}{m}\omega_F\, A\, (cos(\omega_F\, t)cos(\delta) - sen(\delta)sen(\omega_F\, t)) = \frac{F_o}{m}\, sen(\omega_F\, t).\end{aligned} \tag{3.67}$$

Ahora empleamos el hecho que las funciones $cos(\omega_F t)$ y $sen(\omega_F\, t)$ son independientes para identificar a los coeficientes respectivos. Despejando a la amplitud A y a la fase δ tenemos

$$\frac{sen(\delta)}{cos(\delta)} = \frac{2\gamma\omega_F}{\omega_F^2 - \omega_0^2}, \quad A = \frac{F_o}{m((\omega_o^2 - \omega_F^2)cos(\delta) - 2\gamma\omega_F\, sen(\delta))}. \tag{3.68}$$

en donde nuevamente definimos $\gamma = b/2m$. Estas ecuaciones nos dan una solución particular completa ya que de la primera deducimos que

$$\delta = \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega_F}{\omega_F^2 - \omega_0^2}. \tag{3.69}$$

Sin embargo para analizar mejor al resultado obtenido nos conviene despejar a $sen(\delta)$ en términos de $cos(\delta)$ y substituirlo en la ecuación para la amplitud y llegar a

$$A = \frac{F_o}{m\, cos(\delta)((\omega_o^2 - \omega_F^2) - 4\gamma^2\omega_F^2/(\omega_o^2 - \omega_F^2))}. \tag{3.70}$$

Además, de la primer ecuación de ec.(3.68) vemos que

$$\frac{sen(\delta)^2}{cos(\delta)^2} = \frac{1 - cos(\delta)^2}{cos(\delta)^2} = \frac{4\gamma^2\omega_F^2}{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2}. \tag{3.71}$$

De donde despejamos a el coseno como

$$\frac{1}{cos(\delta)} = \pm\sqrt{1 + \frac{4\gamma^2\omega_F^2}{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2}} = \frac{\pm 1}{(\omega_o^2 - \omega_F^2)}\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}, \tag{3.72}$$

concluimos que la amplitud esta dada como

$$A = \frac{\pm F_o}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}. \tag{3.73}$$

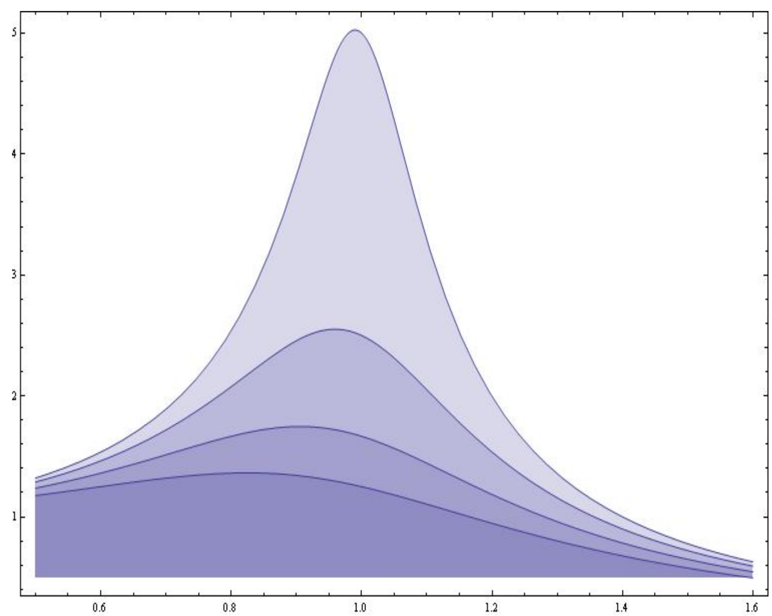
La amplitud será máxima como función de ω_F para cuando el denominador de la última expresión sea mínimo. Dicho valor lo obtenemos como es usual derivando parcialmente con respecto a ω_F e igualando a cero

$$\frac{\partial}{\partial\omega_F}((\omega_F^2 - \omega_o^2)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2) = 4\omega_F(\omega_F^2 - \omega_o^2) + 8\gamma^2\omega_F = 0, \tag{3.74}$$

Por lo que $\omega_F^{res} = 0$ ó bien

$$\omega_F^{res} = \pm\sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2}. \tag{3.75}$$

Cuando la amplitud alcanza su valor máximo, para $\omega_F = \omega_F^{res}$, decimos que el oscilador está en **resonancia**. La frecuencia ω_F^{res} se llama **frecuencia de resonancia**. Notemos que para $\gamma \geq \omega_o/\sqrt{2}$ la frecuencia de resonancia es siempre igual a cero. En la figura mostramos a la amplitud como funci ón del cociente ω_F/ω_0 para cuatro valores del coeficiente de amortiguamiento. Se nota claramente la frecuencia de resonancia cunado la amplitud es máxima.



Una solución alternativa y mucho mas clara es la siguiente. Supongamos que en lugar de resolver el problema para la fuerza externa $F_o \cos(\omega_F t)$ queremos resolver el porblema mas complicado para la fuerza externa compleja $F_o e^{i\omega_F t}$. Llamemos “z(t)” a la solución de este problema aparentemente mas complicado. Esto es, buscamos la solución de la ecuación

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = F_o\, e^{i\omega_F\, t}. \tag{3.76}$$

Nuevamente intentamos como solución a una función tal que al substituirla en la ecuación nos conduzca a una ecuación con tan solo constantes por determinar. Ahora en cambnio nos damos cuenta que dado que las derivadas de una exponencial son nuevamente exponenciales, en este caso multiplicadas por constantes, el problema se torna mas simple. Substituyendo entonces

$$z(t) = A\, e^{i\omega_F t}, \tag{3.77}$$

con una constante compleja $A = Re(A) + i\,Im(A)$, en la ecuación diferencial obtenemos rápidamente

$$(-m\omega_F^2 + ib\omega_F + k)\,A = F_o. \tag{3.78}$$

De la cual obtenemos el valor absoluto de A como

$$|A| = \frac{|F_o|}{m\sqrt{(\omega_o^2 - \omega_F^2)^2 + 4\gamma^2\omega_F^2}}. \tag{3.79}$$

Finalmente, como a cualquier número complejo lo podemos escribir como el producto de su módulo por un número complejo de módulo uno, tendremos que

$$A = |A|e^{i\delta} = |A|(\cos(\delta) + i\,\sin(\delta)). \tag{3.80}$$

En donde δ es un número real llamado el "argumento" de A y está dado por

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega_F}{\omega_F^2 - \omega_0^2}. \tag{3.81}$$

Con ello la solución será finalmente

$$z(t) = |A|e^{i\omega_F t + i\delta}. \tag{3.82}$$

Si a esto aunamos la reescritura de la exponencial en términos de funciones trigonométricas

$$e^{i\omega_F t + i\delta} = \cos(\omega_F t + \delta) + i\,\sin(\omega_F t + \delta), \tag{3.83}$$

y escribimos $z(t) = x(t) + i\,y(t)$, tendremos que

$$x(t) = |A|\cos(\omega_F t + \delta), \tag{3.84}$$

es la solución de un oscilador forzado por una fuerza $F_o\cos(\omega_F t)$ y que

$$y(t) = |A|\sin(\omega_F t + \delta), \tag{3.85}$$

es la solución para el problema con una fuerza externa $F_o\sin(\omega_F t)$.

3.4 Problemas

Problema 1. Un péndulo físico consta de dos varillas idénticas cada una de masa m y longitud L. Calcular el periodo T suponiendo que las oscilaciones son pequeñas.

Problema 2. Un bloque de masa m es soltado desde el reposo en la posición indicada. Si A es la posición de equilibrio, el periodo es T y d es también conocida, determina despreciando la fricción y la masa del resorte: la amplitud del movimiento, la rapidez máxima y la constante de fase δ.

Problema 3. Una varilla delgada de masa m y longitud L se encuentra en equilibrio en la posición horizontal mostrada. Determina para oscilaciones pequeñas la frecuencia angular suponiendo conocido el valor de la constante k del resorte.

Problema 4. Una varilla ideal de masa M y longitud L se encuentra en equilibrio en la posición horizontal mostrada. Se le da un pequeño desplazamiento hacia abajo Δ a su extremo B y se suelta. Obtén la velocidad angular al tiempo t si el resorte de constante k conocida está todo el timepo pegado al extremo B de la varilla.

Problema 5. Un disco homogéneo de peso W y radio R rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal. Si la constante k del resorte y la constante b del amortiguador son conocidas encuentra para oscilaciones pequeñas la frecuencia natural de las oscilaciones respecto a su posición de equilibrio.

Problema 6. Considera a un oscilador armónico con constante k y frecuencia ω_0 conocidas. Supón que dicho oscilador es colocado momentos después en un medio disipativo tal que su amplitud inicial de oscilación decae a un décimo al cabo de N oscilaciones. a) Encuentra la constante de amortiguamiento y la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas. b) Si con el fin de contrarrestar el amortiguamiento se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos(\omega_F t)$, determina el valor que debe tener ω_F para una amplitud máxima.

Problema 7. Un disco de radio R y masa M está unido a una varilla de longitud L y masa m. Si al tiempo $t = 0$ la incliantión θ_0 y la velocidad angular $\dot{\theta}_0$ son conocidas, determina la amplitud de las oscilaciones pequeñas, la constante de fase y la frecuencia de las oscilaciones.

Problema 8. Un disco homogéneo de radio R y masa M, que puede girar libremente sobre su eje fijo, está sujeto a una cuerda ideal unida a un resorte de constante k conocida como se muestra. Encuentra la frecuencia de las oscilaciones pequeñas al rededor de la posición de equilibrio.

Problema 9. Leyes de Kepler. Considera un sistema de dos masas puntuales m y M, digamos un planeta o un satélite y el sol. Suponiendo que M está fija demuestra que:

1. Los planetas o satélites se mueven en órbitas elípticas con el sol en uno de sus focos o bien en otras secciones cónicas.

2. La línea que une al sol con cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. El periodo de un planeta es proporcional al semieje mayor de su órbita.

Sugerencia: Deduce que el inverso de la distancia r al sol $\xi = 1/r$ satisface que $\frac{d^2\xi}{d\theta^2} = -\xi+$ constante.

Solución. Supongamos que el movimiento se realiza en el plano $\{x, y\}$, En coordenadas polares con el sol en el origen, tenemos

$$\vec{r} = r\,(\cos\theta\hat{\imath} + sen\theta\,\hat{\jmath}) = r\,\hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}(-sen\theta\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta,$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta.$$

Usando ahora a la ley de la gravitación universal tenemos que las ecuaciones de movimiento son

$$-\frac{GMm}{r^2}\,\hat{e}_r = m\ddot{\vec{r}}.$$

Por lo que igualando componentes radiales y tangenciales llegamos a

$$-\frac{GMm}{r^2} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2, \quad 0 = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}.$$

Multiplicando a la segunda por r nos damos cuenta que

$$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\,r^2\,\dot{\theta} = 0,$$

por lo que $r^2\dot{\theta}$ **es constante**. Notemos ahora que el **momento angular** es

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = mr^2\dot{\theta}\,\hat{k},$$

ya que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{k}$ y $\hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0 = \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\theta$. Así que hemos deducido que **el momento angular se conserva**. Ahora, dado que $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}/2$ es el área barrida por el planeta m en un intervalo de tiempo dt, entonces la **velocidad areal** está dada como

$$\frac{d}{dt}A = \frac{1}{2}r^2\,\dot{\theta},$$

y es constante. Con esto está probado el inciso dos.

Como acabamos de ver

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m},$$

es constante siendo L la magnitud del momento angular. Si ahora substituimos de aquí a $\dot{\theta}$ en la componente radial de las ecuaciones del movimiento y multiplicamos por $\dot{r}$, tendremos que

$$-\frac{GMm}{r^2}\dot{r} = m\dot{r}\ddot{r} - \dot{r}\frac{L^2}{mr^3},$$

Esta ecuación puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}) = 0.$$

Por lo que el término entre paréntesis se conserva. Identificamos a dicha constante con la **energía mecánica total**

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Los primeros dos términos son la energía cinética y el tercero es la energía potencial gravitacional. Notemos que el segundo término puede escribirse como $L^2/2mr^2$ por lo que es llamado *Barrera Centrífuga Repulsiva*. hagamos pues ahora el cambio de variable sugerido

$$\xi = \frac{1}{r}, \Rightarrow \dot{\xi} = -\frac{1}{r^2}\dot{r} = -\frac{m}{L}\dot{r}\dot{\theta},$$

así que

$$\dot{r} = -\frac{L}{m}\frac{d\xi}{d\theta}.$$

Usando esta última expresión en la ecuación para la energía en términos solo de r y de $\dot{r}$ llegamos a

$$E = \frac{L^2}{2m}\Big((\frac{d\xi}{d\theta})^2 + \xi^2\Big) - GMm\,\xi.$$

Si finalmente la derivamos con respecto a θ llegamos a

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} = -\xi + \frac{GMm^2}{L^2}.$$

esta relación es del mismo tipo de las ecuaciones que hemos tratado para estudiar las oscilaciones armónicas en este capítulo. Su solución es

$$\xi(t) = \frac{1}{r} = A\cos(\theta + \theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2}.$$

Las constantes A y θ_0 se pueden utilizar para satisfacer condiciones iniciales, pero a nosostros nos conviene elegir $\theta_0 = 0$ (la orientación de la órbita está alineada de acuerdo al eje x). Si además definimos a $d = 1/A$ y $ed = L^2/GMm^2$, tendremos que

$$e = \frac{r}{d - r\cos\theta},$$

la cual es la ecuación polar de una elipse con excentricidad e y distancia d a la línea guía. Recordemos que si $e = 0$ la curva es un círculo, si $1 > e > 0$ la curva es una elipse, si $e = 1$ tenemos una parábola y si $e > 1$ la trayectoria es una hipérbola. Con esto queda demostrado el inciso (1). Para el inciso (3) nos es conveniente expresar a la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas $x = r\,\cos\theta$ y $y = r\,\mathrm{sen}\theta$ como

$$\frac{(x - ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a = \frac{ed}{1 - e^2}, \quad b = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

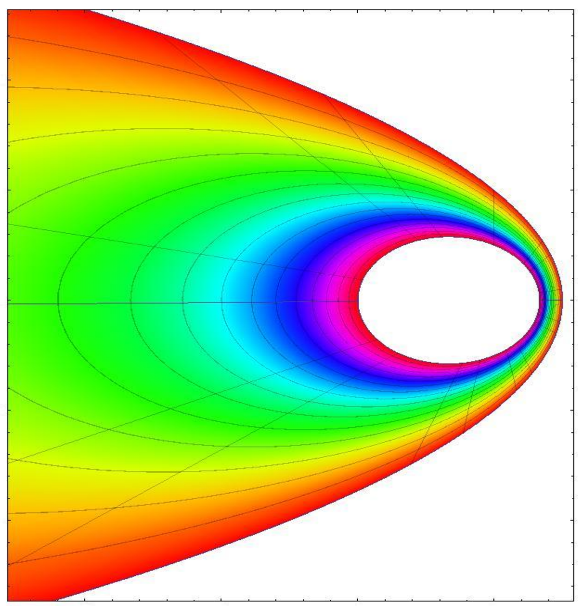
Para el inciso (2) basta integrar la velocidad areal sobre toda una vuelta escrita en términos del momento angular para obtener

$$A = \frac{LT}{2m}.$$

Dado que el área de la elipse es $\pi\, a\, b$ y notando que $b = \sqrt{\frac{aL^2}{GMm^2}}$ obtenemos

$$T = \frac{2\pi\, a^{2/3}}{\sqrt{GM}}.$$

En la figura siguiente mostramos a las órbitas elípticas, limitadas por una órbita parbólica, para varias energías que corresponden a los diversos colores.

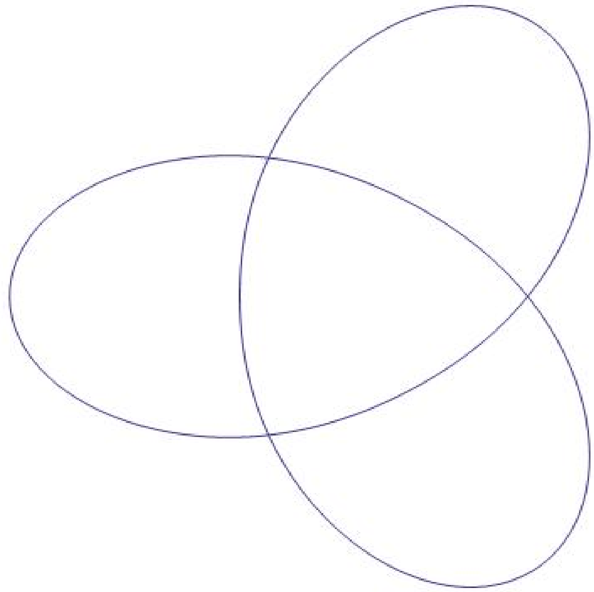


Orbitas elípticas del problema de Kepler para diversas energías

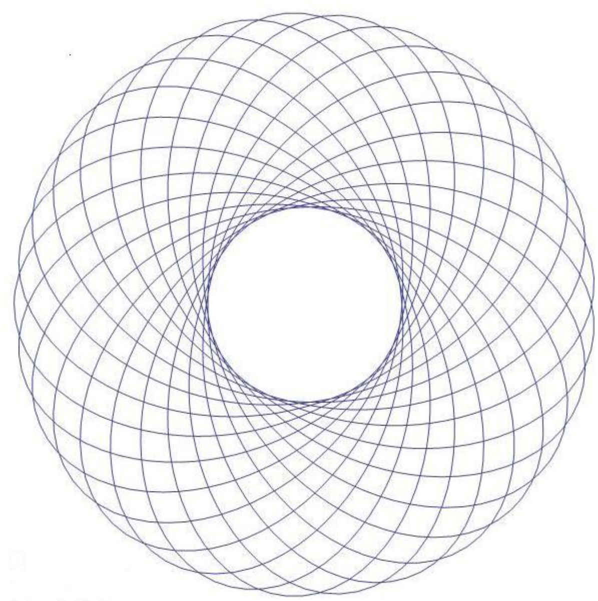
Si modificamos al potencial gravitacional con un término perturbativo

$$V_{pert.} = \frac{\alpha}{r^2},$$

entonces las órbitas pueden ser o no cerradas aun para energías para las cuales hubiesen sido elípticas. En las figuras siguientes mostramos dos órbitas cerradas con periodos tres y veintinueve circunvoluciones.

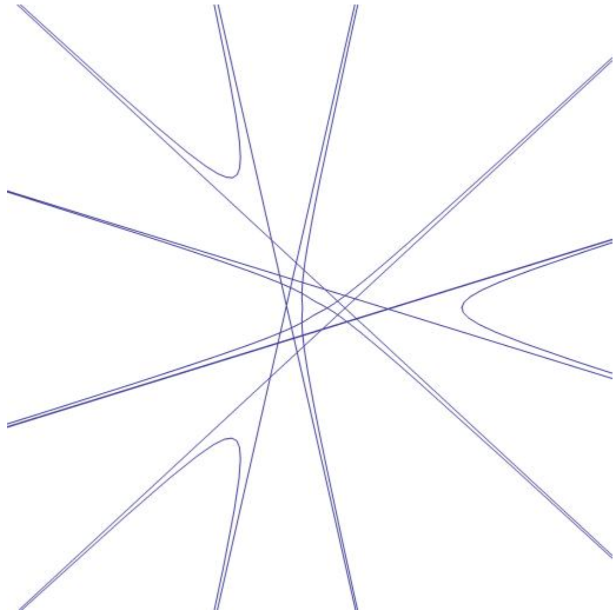


Orbita periodica del problema de Kepler modificado



Orbita periodica del problema de Kepler modificado

La siguiente figura es para órbitas abiertas de tipo hiperbólico y un potencial perturbado.



Orbitas hiperbólicas del problema de Kepler modificado