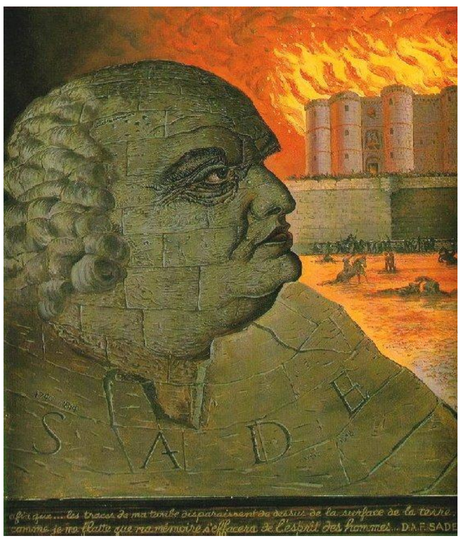
Unidad 2

Energía y Trabajo



Ja, es ist stark, wie du uns inspirierst
in immer neuen,
Verwandlungen,
als weibliche Daemlichkeit und als
maennliche Idiotie,
wie du uns aus den blutunterlaufenen
Augen des Schlaegers
leuchest . . . !

Hans Magnus Enzensberger[a]

[a]Imagen del *Divino Marquéz* por Man Ray tomada de: www.hrgiger.com. Versos de H. M. Enzensberger, "Kiosk", p. 25. Suhrkamp, 1997.

En este capítulo[1] vamos a introducir el concepto fundamental de este curso. Se trata de la noción de **energía**, cuya comprensión fue el fruto de un largo periodo de desarrollos en mecánica clásica.

2.1 Energía y trabajo para masas puntuales

Consideremos a una partícula puntual de masa inercial constante m sujeta a una fuerza neta externa, y por tanto que satisface

$$\vec{F} = m\,\vec{a}.$$

El intento por comprender a fondo esta sencilla relación llevó a la consideración de la componente de la fuerza $\vec{F}$ sobre la trayectoria de la partícula. La proyección de la fuerza sobre la tangente a la trayectoria en un punto dado, está determinada por la proyección de $\vec{F}$ sobre la velocidad $\vec{v}$. Dicha proyección es facil de evaluar mediante el producto interno como

[1]Notas de curso, en LaTeX por A. Anzaldo Meneses.

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \, \frac{d\,\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}, \tag{2.1}$$

ya que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. El lado izquierdo está dado en coordenadas cartesianas por

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = F_x \, \frac{dx}{dt} + F_y \, \frac{dy}{dt} + F_z \, \frac{dz}{dt}.$$

El lado derecho es puramente geométrico y tiene una forma sencilla. Resulta que nos recuerda a la derivada del cuadrado de una función. Según la regla de Leibnitz, aplicada al producto de dos functiones $A(t)$ y $B(t)$, tenemos que

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{dA}{dt} \, B + A \, \frac{dB}{dt}.$$

Es por tanto claro, que para $A = B$

$$A \, \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \, \frac{d(A^2)}{dt}.$$

Si ahora aplicamos suscesivamente esta regla a cada sumando del producto escalar del lado derecho, y usando que las constantes pueden ser escritas de cualquier lado de una derivada, tendremos que

$$m(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}) = \frac{d}{dt} \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Este es un resultado importante. Hemos obtenido que el factor de integración $\vec{v}$ permite escribir al lado derecho como a la derivada de una función escalar dada por un medio del producto de la masa inercial por el cuadrado de la rapidez. Dado que estamos básicamente usando nada más la segunda ley de Newton no es sorprendente que esta cantidad sea fundamental también. Se denomina **Energía Cinética** a la cantidad

$$E_{cin.} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \tag{2.2}$$

Las unidades físicas de toda energía son los “Joules” que son Newtons·metro. Con ello tendremos que

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} E_{cin.}. \tag{2.3}$$

Pensemos ahora que queremos conocer la contribución total de la fuerza $\vec{F}$ al desplazamiento de la masa m desde el punto $\{x_A, y_A, z_A\}$ al tiempo t_A, hasta el punto $\{x_B, y_B, z_B\}$ al tiempo t_B. Esto lo logramos sumando (“en el sentido de Riemann”) de la manera siguiente

$$\int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} E_{cin.} \, dt. \tag{2.4}$$

Pero el lado derecho es simplemente la energía cinética evaluada en el límite superior menos la energí cinética evaluada en el límite inferior por un teorema bien conocido del cálculo, así que tendremos

$$\int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt = \Delta_{AB} \, E_{cin.}. \tag{2.5}$$

En donde hemos escrito al cambio de la energía cinética como $\Delta E_{cin} = E_{cin}(t_B) - E_{cin}(t_A)$. La cantidad del lado izquierdo se define como el **Trabajo** W ejercido por el campo de fuerzas $\vec{F}$ efectuado sobre la partícula de $\vec{r}_A$ a $\vec{r}_B$, esto es

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \tag{2.6}$$

Aquí hemos reescrito a la integral en términos del vector de posición $\vec{r}$, este cambio de variables de integración siempre es posible para los problemas que tenemos en mente. Además usamos que $d\vec{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz$ y escribimos $\vec{F} = \hat{\imath}F_x + \hat{\jmath}F_y + \hat{k}F_z$. Integrales del tipo mostrado se conocen como *integrales de línea*. Las unidades físicas del trabajo son igualmente los Joules.

Resumiendo lo anterior, llegamos a la parte medular de este cálculo.

Teorema del Trabajo y la Energía

$$W_{AB} = \Delta_{AB}\, E_{cin}. \tag{2.7}$$

El trabajo ejercido por un campo de fuerzas $\vec{F}$ sobre una partícula puntual de masa m desde $\vec{r}_A$ hasta $\vec{r}_B$ esta dado por el cambio en su energía cinética.

Ahora bien existen cierto tipo de campos de fuerzas para los cuales es posible calcular fácilmente la integral del trabajo. Tal situación ocurre cuando la cantidad $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ es una diferencial exacta que llamaremos $-dU$, y por tanto el resultado depende solamente de los límites de integración. Así pues escribimos

$$\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = -(U_B - U_A) = -\Delta_{AB} U. \tag{2.8}$$

En donde U_A y U_B son los valores de la función U evaluada en los extremos de la trayectoria de $\vec{r}_A$ a $\vec{r}_B$. La función U que acabamos de introducir es muy importante y se conoce como **Energía Potencial**, y a los campos de fuerzas que tienen asociada una energía potencial se les llama **Conservativos**.

De lo anterior tenemos que si la fuerza neta es conservativa entonces

$$W_{AB} = -\Delta_{AB} U = \Delta_{AB} E_{cin}, \tag{2.9}$$

con lo cual

$$\Delta_{AB}(E_{cin} + U)) = 0. \tag{2.10}$$

Este importante resultado es el **Principio de Conservación de la Energía**

$$\Delta_{AB} E = 0.$$

A la cantidad conservada

$$E = E_{cin} + U, \tag{2.11}$$

se le denomina **Energía Mecánica Total**.

En general, tan solo una parte de los campos de fuerzas son conservativos (macroscópicamente vistos), por tanto dividimos al trabajo en dos partes como

$$W_{total} = W_{no\ cons.} + W_{cons.} = W_{no\ cons.} - \Delta U, \tag{2.12}$$

en donde el trabajo total W_{total} está dado como la suma del trabajo $W_{no\ cons.}$ debido a las fuerzas no conservativas mas el trabajo $W_{cons.} = -\Delta U$ debido a las fuerzas conservativas dado por el negativo del cambio en la energía potencial asociada a tales campos de fuerzas. Con esta diferenciación tenemos que en general el teorema del trabajo y la energía lo escribiremos como

$$W_{no\ cons.} = \Delta_{AB} E, \tag{2.13}$$

con $E = E_{cin} + U$.

Definimos para concluir esta sección a la **Potencia** como el producto interno

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}, \tag{2.14}$$

que será por tanto la rapidez con que el campo de fuerzas realiza trabajo sobre la partícula. Las unidades físicas de la potencia son los Joules $\cdot$ seg^{-1} que se denominan "Watts".

2.2 Energía y Trabajo para Cuerpos Rígidos.

El movimiento del centro de masas está determinado mediante

$$\vec{F}_{ext} = M\, \vec{a}_{c.m.}. \tag{2.15}$$

Además tendremos que la cantidad de movimiento total del cuerpo rígido será igual a la cantidad de movimiento del centro de masas, $\vec{P} = M\vec{v}_{c.m.}$. Finalmente, como el trabajo efectuado por las fuerzas internas es cero, el cambio en la energía cinética del cuerpo rígido está dado por el trabajo realizado por las fuerzas externas a él

$$\Delta E_{cin} = W_{ext}. \tag{2.16}$$

Si las fuerzas externas son además de tipo conservativo y por tanto derivables de un potencial U_{ext}, entonces, $W_{ext} = \Delta U_{ext}$ y con ello **la energía total del cuerpo rígido se**
IMP.▷ **conserva** .

$$\Delta E = 0. \tag{2.17}$$

en donde definimos a la energía total como $E \equiv E_{cin} + U_{c.m.}$, siendo la **energía potencial**
DEF. **del cuerpo rígido** $U_{c.m.} \equiv U_{ext}$.

Finalmente, para la energía cinética de un elemento de masa dm que describe un círculo de radio R_z alrededor del eje z con velocidad angular $\omega\,\hat{k}$, está dada por $(dm)R_z^2\omega^2/2$, por lo que nuevamente sumando en el sentido de Riemann todas las contribuciones sobre el volumen del sólido obtenemos para la **energía cinética del cuerpo rígido** *rotando alrededor de un eje fijo*

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2. \tag{2.18}$$

Si el cuerpo rígido *rueda sin resbalar*, su energía cinética estará dada por la contribución debida al desplazamiento de su centro de masas mas la energía cinética rotacional como

$$E_{cin} = \frac{1}{2} M\, v_{c.m.}^2 \,+\, \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2, \tag{2.19}$$

en donde el primer sumando es la energía cinética traslacional del sólido y M es su masa.

2.3 Campo gravitacional y ley de Hooke

Vamos a considerar ahora dos ejemplos sencillos de campos de fuerzas conservativos. El primero es el campo de fuerzas gravitacional (simplificado) considerado como una fuerza constante de magnitud mg para una pequeña masa gravitacional m. Elegimos un sistema coordenado de tal forma que la fuerza apunte en la dirección negativa del eje z y evaluamos el trabajo efectuado por el campo gravitacional para una trayectoria que va de una altura inicial z_0 a una altura final z, con esto tenemos

$$W_g = \int_{z_0 \hat{j}}^{z \hat{j}} \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\int_{z_0}^{z} mgdz = -mg(z - z_0) = -\Delta U_g, \tag{2.20}$$

en donde la diferencia de alturas es $h = z \,-\, z_0$. La energía potencial es entonces

$$U_g = mgz, \tag{2.21}$$

salvo una constante aditiva arbitraria. La energía total es entonces

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + mg(z - z_0). \tag{2.22}$$

Notemos que no importa cual sea el camino que sigamos tendremos el mismo resultado, si la diferencia total de alturas es h, ya que asumimos que no hay fuerzas no triviales actuando en las direcciones horizontales. Ahora bien, dado que E es constante, así como las velocidades en las direcciones horizontales, tendremos que derivando con respecto al tiempo considerando a z como función del tiempo

$$\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m v_z^2 + mgz). \tag{2.23}$$

y con esto

$$0 = \dot{z}(m \ddot{z}^2 + mg). \tag{2.24}$$

que no es sino la aplicación de la segunda ley en la dirección vertical $-mg = m\ddot{z}$. Las ecuaciones asociadas a las componentes horizontales resultan de la constancia de las respectivas componentes de la velocidad.

El siguiente ejemplo que queremos considerar es la ley de Hooke

$$\vec{F}_H = -k\vec{\delta}, \tag{2.25}$$

en donde k es la constante (fenomenológica) del resorte y $\vec{r}$ es un vector cuya longitud nos da la deformación neta sufrida por el resorte. El sentido de la fuerza depende de que se trate de una compresión (sentido positivo) o una elongación (sentido negativo). Para facilitar el cálculo supongamos, sin pérdida de generalidad, que la deformación tiene lugar en la dirección radial y que ésta coincide con el eje x, entonces el trabajo será ahora

$$W_H = -\int_{r_0}^{r} k\vec{r}\cdot d\vec{r} = -\int_{x_0}^{x} kx\,dx = -\frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}\,x_0^2 = -\Delta U_H, \tag{2.26}$$

en donde x denota la deformación. La energía potencial es

$$U_H = \frac{1}{2}k\,x^2, \tag{2.27}$$

salvo una constante aditiva. La energía total es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,x^2. \tag{2.28}$$

Notemos que derivando esta ecuación con respecto al tiempo recobramos, en el caso unidimensional, la ley de Hooke

$$\frac{dE}{dt} = 0 = m\,\dot{v}_x\,v_x + k\,v_x\,x, \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\,k\,x.$$

2.4 Impulso

Dado que en general la manera en que una fuerza actúa sobre un sistema de partículas puede ser bastante complicada, resulta adecuado definir a la fuerza promedio que es ejercida sobre un cuerpo. Para ello partimos de la ecuación de movimiento y la integramos entre los tiempos t_1 y t_2 en que queremos analisar la interacción

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt = \vec{P}(t_2)\;-\;\vec{P}(t_2) = \Delta\vec{P}. \tag{2.29}$$

Del lado derecho tenemos simplemente el cambio en el momento lineal ó ímpetu total del sistema
DEF. $\vec{P}$. A la cantidad del lado izquierdo se le denomina el **impulso** y lo escribimos como

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt. \tag{2.30}$$

Claramente las unidades físicas del impulso son las mismas que las del momento lineal. A las fuerzas que son ejercidas durante un pequeño intervalo de tiempo se les denomina **fuerzas**
DEF. **impulsivas**. Ahora bien, si queremos definir a la **fuerza promedio** $\langle\vec{F}\rangle$ ejercida en el intervalo (t_1, t_2) nos bastará con dividir al impulso por el tiempo transcurrido $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\langle\vec{F}\rangle = \frac{\vec{J}}{\Delta t}. \tag{2.31}$$

2.5 Colisiones

Entendemos por una **colisión** ó *impacto* a una interacción entre dos cuerpos cuya duración es muy corta. Además pensamos que el sistema formado por los dos cuerpos durante la colisión está aislado, por lo que todas las fuerzas actuando son internas. Si además (como hemos supuesto para la demostración de la conservación de la cantidad de movimiento lineal total) suponemos ahora que todas las fuerzas internas son binarias y satisfacen la tercer ley de Newton, entonces **en una colisión se conservará la cantidad de movimiento total**. Esto es $\Delta\vec{P} = \vec{0}$. Esta será la parte mas importante para resolver problemas simples de colisiones para sistemas aislados. Si consideramos a dos cuerpos de masas m_1 y m_2 con momentos iniciales $\vec{p}_{1i}$ y $\vec{p}_{2i}$ antes de la colisión y momentos finales $\vec{p}_{1f}$ y $\vec{p}_{2f}$ después de la colisión, tendremos

$$\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}. \tag{2.32}$$

Ahora bien, consideraremos dos tipos de colisiones. A aquellas colisiones para las cuales la energía cinética se conserva, $\Delta E_{cin} = 0$, las llamaremos **colisiones elásticas** y a aquellas para las cuales la energía cinética **no** se conserva las llamaremos **colisiones inelásticas**.

Para colisiones elásticas tenemos entonces la condición adicional

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}. \tag{2.33}$$

Consideraremos aquí solamente un tipo de colisiones inelásticas: llamaremos **colisiones completamente inelásticas** aquellas colisiones inelásticas para las cuales los dos cuerpos quedan unidos después de la colisión. A estas colisiones también se les denomina *impactos plásticos*. En tal caso, no se conserva la energía cinética pero el problema es aún más sencillo por que al final tenemos solamente a un cuerpo de masa $M = m_1 + m_2$ y momento $\vec{P}_f$. Por la conservación del momento lineal se seguirá que

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = M\vec{P}_f, \tag{2.34}$$

que nos bastará para resolver este caso.

Finalmente, para problemas en *una sola dimensión*, las ecuaciones anteriores se simplifican notoriamente. La ec.(2.32) expresada en términos de las velocidades es equivalente a

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}). \tag{2.35}$$

A la condición de conservación de la energía cinética para colisiones elásticas la podemos reescribir de la siguiente forma

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \tag{2.36}$$

Pero recordemos ahora la identidad

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

. Por lo que dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones se llega a

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}, \tag{2.37}$$

la cual junto con la ec.(2.35) nos permite escribir

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{M} v_{1i} + \frac{2m_2}{M} v_{2i}, \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{M} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{M} v_{2i}. \tag{2.38}$$

2.6 Problemas

Entendemos por problema o ejemplo numérico a aquel problema que requiere de conocimientos elementales de programación, como los que en la actualidad se encuentran al alcance de cualquier estudiante de bachillerato. Las matemáticas involucradas son así mismo básicas.

Problema 1. Potencial gravitacional simplificado. Consideremos a una masa m que partiendo de una altura desconocida H a una velocidad inicial cero se desliza sobre una superficie sin fricción y llega a una altura final h con una velocidad $\vec{v}_f$ conocida. Se pide calcular la altura inicial H y graficarla como función de h y de la rapidez v_f.

Solución. Dado que las fuerzas que actuan son conservativas se satisface el principio de conservación de la energía

$$\Delta E = 0, \tag{2.39}$$

en donde la energía total es $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$, siendo z la altura medida desde alguna altura cero arbitraria. Las energías inicial y final son

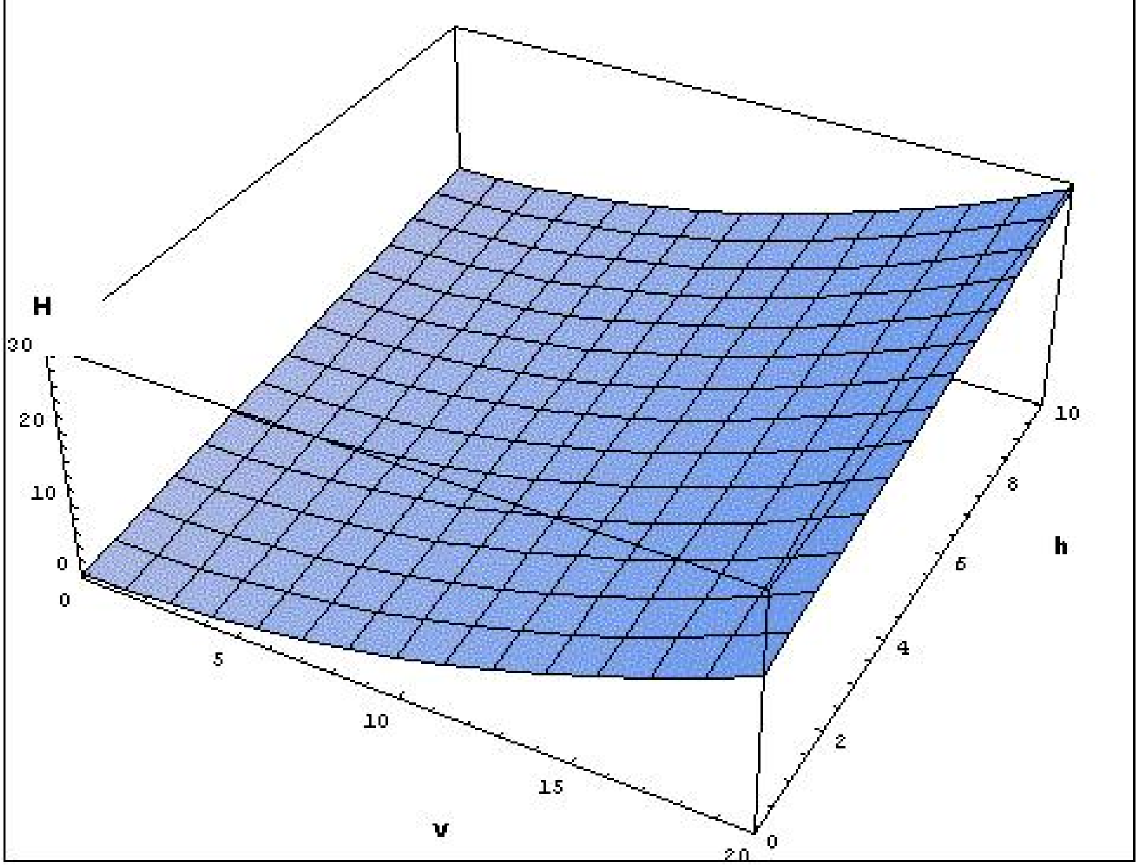
$$E_i = mgH, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh. \tag{2.40}$$

Por lo que igualandolas a ambas, obtenemos

$$H = \frac{1}{2g}v_f^2 + h. \tag{2.41}$$

la cual es independiente de m. En la **Figura 3.1** se muestra en la dirección vertical a H como función de $v_f/\sqrt{2g}$ y de h en el plano horizontal.

```
(*Problema 1 Unidad 2. Potencial gravitacional simplificado*)
(*Graficamos a la altura H inicial en función de la velocidad final
  v a la altura final h, partiendo del reposo*)
g2 = 9.81*2;
Plot3D[v^2/g2 + h, {v, 0, 20}, {h, 0, 10}]
```



Problema 2. Movimiento circular y Energía. Veamos ahora a una varilla ideal de longitud r que gira en un plano vertical alrededor de un punto y que tiene una masa m adherida a su extremo libre. Ahora queremos calcular la tensión de la varilla para una inclinación ϕ con respecto a la horizontal, *si suponemos que dicha tensión se anula en el punto máximo.*

Solución. Nuevamente dado que las fuerzas que actúa son conservativas la energía total se conserva. Llamemos E_{max} a la energía en el punto máximo en donde la tensión se anula. Midiendo la altura con respecto a la altura del centro de giro, tenemos

$$E_{max} = \frac{1}{2}mv_m^2 + mgr, \quad E_\phi = \frac{1}{2}mv_\phi^2 + mgr\sin(\phi). \tag{2.42}$$

En donde v_m es la rapidez en el punto máximo, y v_ϕ es la rapidez en el punto localizado a un ángulo ϕ. Igualando nuevamente a ambas energías obtenemos que

$$mv_\phi^2 = mv_m^2 + 2mgr(1 - \sin(\phi)). \tag{2.43}$$

Ahora bien, dado que la aceleración centrípeta debe de ser igual a la tensión mas la componente del peso en la dirección radial, entonces dado que $v = \omega r$, $a_\phi = \alpha/r$ y la aceleración centrípeta es $a_r = -\omega^2 r$,

$$T_\phi + mg\sin(\phi) = \frac{mv_\phi^2}{r}. \tag{2.44}$$

Por lo que para el punto máximo con $v_{\pi/2} = v_m$, $\phi = \pi/2$ y $T_{\pi/2} = 0$, tendremos que

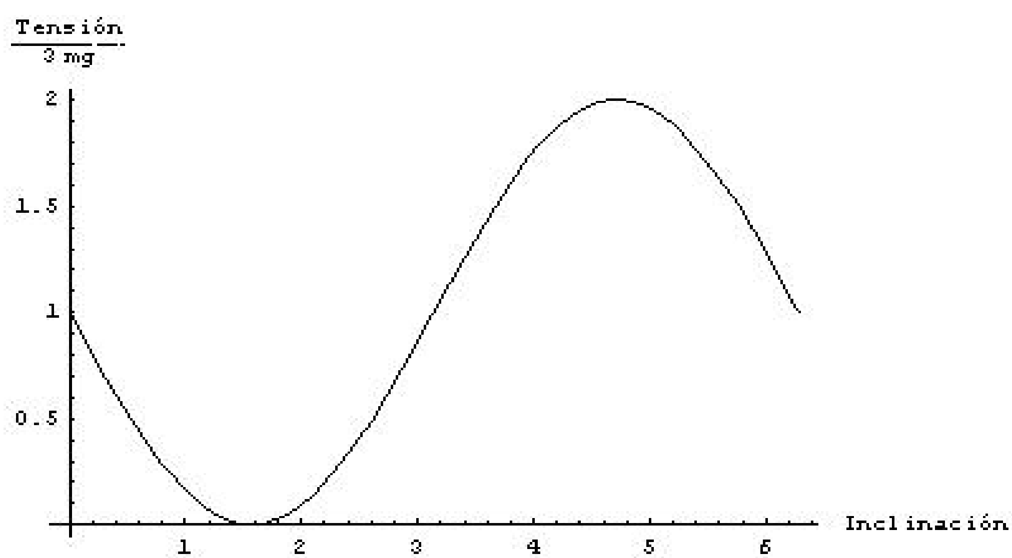
$$mv_m^2 = mgr, \tag{2.45}$$

Con esto obtenemos a la tensión en cualquier punto como

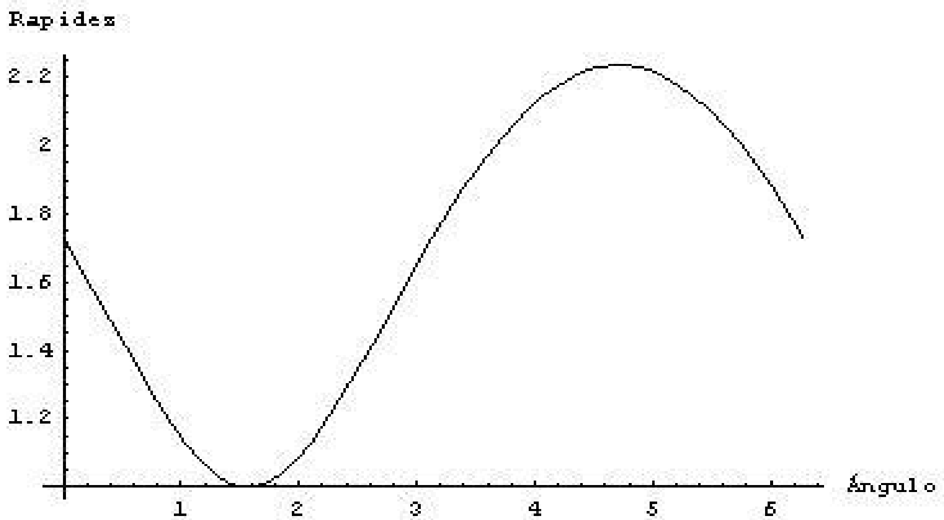
$$T_\phi = 3mg(1 - \sin(\phi)). \tag{2.46}$$

y para la varilla $v_\phi = \sqrt{mgr(3 - 2\sin(\phi))}$.

```
(*Ejemplo 2, Unidad dos. Movimiento circular y energía*)
(*Graficamos a la tensión (en unidades de 3 mg) de una varilla ideal
  que gira en un plano vertical con extremo fijo y una masa m en el otro,
 como función del angulo con respecto a la horizontal. Suponemos
  además que la tensión de la varilla a 90 grados es cero.*)
Plot[1 - Sin[t], {t, 0, 2 Pi}, AxesLabel → {Inclinación, Tensión / (3 mg)}]
```



```
(*Graficamos a la rapidez en unidades de Sqrt{mgr}*)
gr = 1.0;
v = 1.0;
Plot[Sqrt[v^2 + 2 gr (1 - Sin[t])], {t, 0, 2 Pi}, AxesLabel → {Ángulo, Rapidez}]
```



Problema 3. Calcular la Velocidad de escape de una masa m necesaria para abandonar un planeta de masa M y radio R.

em Solución. La diferencia de energía potencial gravitacional de una masa pequeña m entre un punto en la superficie de un planeta de masa M y radio R y un punto a una distancia infinita es

$$\Delta U = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{\infty} = \frac{GMm}{R}. \tag{2.47}$$

Por lo que ésta tendrá que ser igual a la energía cinética necesaria para un objeto que se mueva en dirección radial

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R}. \tag{2.48}$$

despejando v obtenemos

$$v = \sqrt{2GM/R}. \tag{2.49}$$

Para la superficie de nuestro planeta sabemos el valor de

$$g = GM/R^2,$$

por lo que para tal situación

$$v = \sqrt{2gR},$$

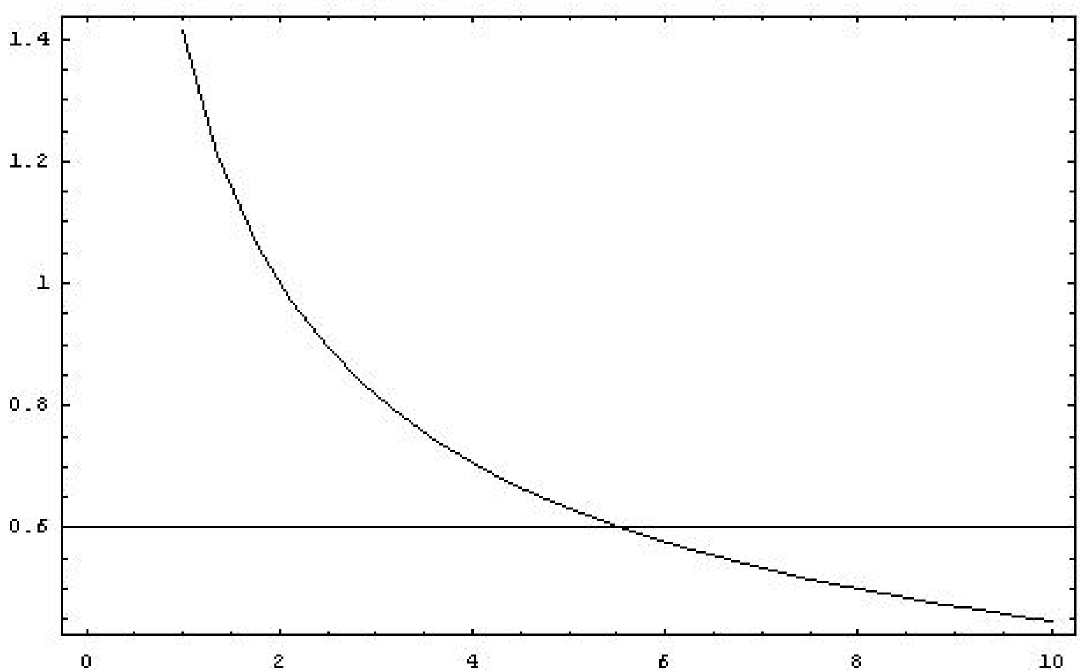
que es del orden de 10^4 metros por segundo, independientemente de la masa (objetos pequeños).

Es interesante recordar aquí que de acuerdo a la ***Teoría especial de la Relatividad*** no es posible para ningún objeto masivo alcanzar la velocidad de la luz c, aproximadamente 300 mil kilómetros por segundo, esto es $v < c$ siempre. Por lo que si escribimos $v = c$ en la relación que obtuvimos para la velocidad de escape y despejamos al radio de la ec.(2.49), obtendremos

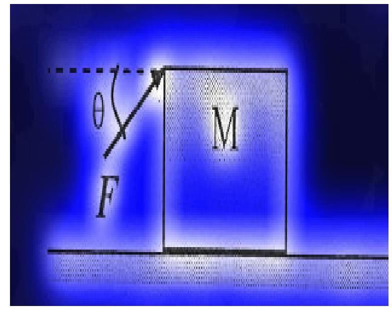
$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \leq R,$$

en donde R_S es conocido como **Radio de Schwarzschild**. Y como la velocidad de un cuerpo siempre es menor que c, entonces deducimos que **es imposible abandonar un cuerpo con radio menor a R_S**. Este enunciado nos hace comprensible la existencia de los llamados **agujeros negros**, objetos celestes de los cuales no hay escapatoria alguna.

```
(* Ejemplo 3 Velocidad de escape y atracción gravitacional.
   Calculamos la velocidad mínima de escape (en unidades de √GM)
  de un pequeño objeto para escapar a la atracción de un planeta
  de masa M, como función de su distacia al centro del planeta*)
Plot[Sqrt[2.0 / r], {r, 1, 10}, Frame → True]
```



Problema 4. Para empujar una caja de M Kg por el suelo, un obrero ejerce una fuerza constante de magnitud F dirigida θ radianes debajo de la horizontal. Cuando la caja se ha movido x metros calcular: a) El trabajo realizado sobre la caja por el obrero, por la fuerza de gravedad y la fuerza de fricción cinética si el coeficiente de fricción cinética es μ_c. b) La velocidad final si $v_{inicial}$ es conocida.



Problema 5. Si un collarín de masa M Kg es soltado desde el reposo en el punto B y alcanza una velocidad conocida v_A en el punto A, encuentra la longitud no deformada del resorte de rigidez k N/metro dada. Despreciar la fricción con la guía.

Problema 6. Un cuerpo de masa M y sección circular de radio r es soltado desde el reposo a altura $h = 2R$ y rueda sin resbalar cuesta abajo por un rizo semicircular de radio R. Obtener el momento de inercia del cuerpo si al pasar por el punto Q tiene una velocidad de $v_Q = \sqrt{10\,Rg/7}$.

Problema 7. Dos bloques de masas m_A y m_B se encuentran originalmente en resposo. Despreciando la fricción y suponiendo que la polea es ideal obtener la velocidad del bloque A después de que ha recorrido una distancia x_A.

Problema 8. Un cuerpo de masa m Kg es soltado desde el reposo y resbala sin rozamiento. Obtener la fuerza ejercida por la superficie sobre el objeto cuando pasa por el punto B.

Problema 9. Dos patinadores se abrazan con rapideces iniciales v_1 y v_2 formando ángulos $\phi_1 = 0$ y ϕ_2 radianes. Obtener su velocidad final despreciando a la fricción con el piso.

Problema 10. Se observa en una cámara de burbujas a un protón que choca con una partícula de masa M desconocida e inicialmente en reposo. El protón es desviado un ángulo ϕ_1 y la masa M es desviada un ángulo ϕ_2 con respecto a la dirección del protón incidente. Obtener m/M.