Unidad 1

Dinámica del Cuerpo Rígido

Auf dieser Welt der Erscheinung
ist weder wahrer Gewinn
noch wahrer Verlust moeglich

A. Schoppenhauer

1.1 Cuerpos Rígidos

Definimos como **cuerpo rígido** o **sólido** a un sistema de muchas partículas cuyas distancias entre cualesquier dos de ellas permanecen constantes. Esto es, si la magnitud del vector $\vec{r}_{ij}$, que une a las partículas i y j para toda $i, j = 1, \cdots, N$, permanece constante como función del tiempo **DEF.**

Ach, daß ich durch diese seraphischen Seiten das Antlitz dessen nicht sehen kann, der mich liest! *Lautréamont/Maldoror*

$$|\vec{r}_{ij}| = c_{ij}, \tag{1.1}$$

en donde las c_{ij} son constantes dadas. Notemos aquí que nos bastará fijar tres puntos de cualquier sólido para especificar por completo su posición y su orientación. Para cerciorarnos de esta afirmación basta con seleccionar primero a un punto cualquiera del sólido mediante sus tres coordenadas, digamos (x_1, y_1, z_1). Luego de ello seleccionemos otro punto mas del sólido, digamos el punto localizado en (x_2, y_2, z_2). Estos dos puntos determinan unívocamente una recta que pasa por ambos. Dado que el sólido aun puede tener un sin número de orientaciones alrededor de dicha recta, bastará con fijar un tercer punto del sólido fuera de la recta, digamos (x_3, y_3, z_3), para fijar por completo la posición y orientación del cuerpo. Dado que las distancias entre los tres puntos están dadas, nos quedan así de las nueve coordenadas de posición de los tres puntos, tan solo tres cantidades libres para especificar la posición y orientación de cualquier sólido por completo.

Esto implica entre otras cosas que la fuerza neta interna $\vec{F}_{int}$ se anula. Esto se puede ver escribiendo a la fuerza neta sobre el sólido como la suma de la fuerza neta de origen externo al cuerpo $\vec{F}_{ext}$ y la fuerza neta interna ejercida entre las p"articulas que componen al sólido $\vec{F}_{int}$,

$$\vec{F} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}.$$

Pero dado que estamos suponiendo que hay solo interacciones binarias, entonces si $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza que la partícula i-ésima ejerce sobre la partícula j-ésima, se sigue que

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji},$$

y que

$$\vec{F}_{int} = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \sum_{i<j} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = 0.$$

Auqí, la primer sumatoria es sobre todas las partículas que compongan al sólido, en la segunda sumatoria hemos separado a la primera en las contribuciones de las fuerzas ejercidas por las partículas i-ésimas sobre las j-ésimas con $i > j$ mas aquellas para las que $i > j$, pero cambiado el nombre del subíndice i por j y viceversa. Con esto tenemos que la fuerza neta es simplemente

$$\vec{F} = \vec{F}_{ext}.$$

Recordemos ahora que el **momento lineal** $\vec{p}_i$ de la partícula i-ésima esta dado por el producto de su masa inercial por su velocidad, $\vec{p}_i = m_i \, \vec{v}_i$. Las ecuaciones del movimiento de la partícula i-ésima son

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i,$$

por lo que si sumamos sobre todas las partículas llegamos a

$$\vec{F}_{ext} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}}.$$

En esta ecuación utilizamos el hecho que la fuerza neta está dada por las fuerzas externas y hemos definido al **momento lineal total** $\vec{P}$ del sólido. Resulta así obvio que si la fuerza neta externa se anula, esto es si $\vec{F}_{ext} = 0$, entonces

$$\dot{\vec{P}} = \vec{0},$$

o sea que **el momento total del sólido se conserva**, lo cual lo podemos escribir como $\vec{P} =$ constante.

En la definición anterior de cuerpo rígido, estamos suponiedo que se trata de objetos formados por partículas puntuales, la cual es una visión muy idealizada, aún en un modelo atomístico. En la práctica resulta más adecuado pensar que un cuerpo rígido es una *distribución contínua de masa*. Ahora es conveniente pensar, como es usual en el Cálculo Diferencial e Integral, que dichas distribuciones contínuas pueden imaginarse como constituidas por un sinfin de elementos diferenciales de volumen

$$dV = dx\,dy\,dz, \tag{1.2}$$

con una cantidad diferencial de masa

$$dm = \rho(x, y, z)\,dV, \tag{1.3}$$

en donde $\rho(x, y, z)$ es la **densidad de masa** por unidad de volumen del material en el punto (x, y, z). Para que dicha distribución de masa corresponda a un cuerpo rígido es necesario adicionalmente que las distancias entre cualesquier dos elementos de volumen permanezcan constantes. El **volumen total** V y la **masa total** M estan dadas por

$$V = \int\limits_{solido} dV, \quad M = \int\limits_{solido} \rho(x, y, z)\,dV. \tag{1.4}$$

Para un sólido homogéneo la densidad de masa no depende de la posición, con lo que para tal tipo de sólidos tendremos que $\rho = M/V$.

Recordemos que para un sistema de N partículas, con coordenadas $\vec{r}_i$ y masas inerciales m_i para $i = 1, 2, \ldots, N$, el centro de masas está dado por

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i.$$

En el caso contínuo que estamos tratando substituimos a la partículas puntuales por elementos de volumen (en principio infinitesimales pero que nos bastará con suponer “suficientemente pequeños”) de masas $m_i \sim dm = \rho\,dV$ de volumen dV localizados en las coordenadas $\vec{r}$. Escribimos entonces a la siguiente “suma” para el centro de masas

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{1}{M}\int_{\text{sólido}} \vec{r}\,dm.$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\,\vec{v}_i,$$

para $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$. Pero ahora notemos que la suma al final no es mas que el momento total de s”olido $\vec{P}$, mismo que podemos despejar de esta misma ecuación como

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{cm}.$$

Pero nuevamente, notemos que el producto $M\,\vec{v}_{cm}$ no es mas que el momento lineal de una partícula puntual de masa M y velocidad $\vec{v}_{cm}$, lo cual lo interpretamos como el **momento lineal del centro de masas** $\vec{p}_{cm}$ reduciendose nuestro cálculo a que los momentos del centro de masas y total del sólido son iguales,

$$\vec{P} = \vec{p}_{cm}.$$

Por tanto, **el momento del centro de masas se conserva siempre que la fuerza neta externa sea nula**.

1.2 Dinámica Elemental del Cuerpo Rígido

El desplazamiento arbitrario de un cuerpo rígido está dado primero, por una **traslación paralela del cuerpo** en el cual el centro de masas se mueve hasta su posición final. Finalmente mediante una **rotación alrededor del centro de masas** se coloca al cuerpo con su orientación final.

1.2.1 Velocidad Angular

Para un punto cualquiera del cuerpo localizado en $\vec{r}$ (con respecto a su centro de masas) y con una velocidad angular $\vec{\omega}$ *alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masas*, se sigue que su velocidad está dada por

$$\vec{v} = \vec{v}_{c.m.} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{1.5}$$

en donde $\vec{v}$ es la velocidad del punto en cuestión, $\vec{v}_{c.m.}$ la velocidad del centro de masas y el producto vectorial (*producto cruz o producto externo*) $\times$, está dado por el vector que resulta de la evaluación del determinante

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} =$$

$$\hat{i}\,(\omega_y\,z \,-\, \omega_z\,y) + \hat{j}\,(\omega_z\,x \,-\, \omega_x\,z) + \hat{k}(\omega_x\,y \,-\, \omega_y\,z).$$

Es instructivo notar en esta relación el *orden lexicográfico* de los términos (colocando a los factores de acuerdo al renglón que corresponden) con signo mas, así por ejemplo, el término $\hat{i}\,\omega_y\,z$ tiene un signo mas debido a que la "i" precede a la "y" y la "y" precede a la "z", mientras que el término $\hat{i}\,\omega_z\,y$ lleva antepuesto un signo menos debido a que el orden de las dos últimas letras está invertido.

1.2.2 Momento angular y momentos de Inercia

El momento angular de un cuerpo rígido lo escribimos como

$$\vec{L} = \int_{Vol.} \vec{r} \times \vec{v}\,\rho\,dV = \int_{Vol.} \vec{r} \times \vec{v}_{c.m.}\rho\,dV + \int_{Vol.} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\rho\,dV, \tag{1.6}$$

estas integrales se extienden sobre el volumen total del sólido. Aquí reconocemos en el primer término al momento angular del centro de masas que escribiremos como $\vec{L}_{c.m.}$. Para el segundo y último término utilizamos la identidad

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}), \tag{1.7}$$

con $\vec{a} = \vec{c} = \vec{r}$ y $\vec{b} = \vec{\omega}$, para obtener

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \int_{Vol.} \vec{\omega}\, r^2 \rho\, dV \;-\; \int_{Vol.} (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} \rho\, dV. \tag{1.8}$$

Notemos ahora que $\vec{\omega}$ **es la misma para todos los puntos del cuerpo**, ya que es la velocidad angular con respecto al centro de masas. Escribiendo además

$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \hat{i}\omega_x x + \hat{j}\omega_y y + \hat{z}\omega_z z,$$

y

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

llegamos a

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} =$$
$$\hat{i}((x^2+y^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z) + \hat{j}(-xy\omega_x + (x^2+z^2)\omega_y - yz\omega_z) + \hat{k}(-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z).$$

Entonces

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} +$$
$$\hat{i}(I_{xx}\omega_x \;+\; \omega_y I_{xy} \;+\; \omega_z I_{zx}) + \hat{j}(I_{yy}\omega_y \;+\; \omega_x I_{xy} + \omega_z I_{yz}) + \hat{k}(I_{zz}\omega_z \;+\; \omega_x I_{xz} + \omega_y I_{yz}). \tag{1.9}$$

En donde hemos introducido a los **momentos principales de inercia** (con respecto a los ejes x, y, z respectivamente) siguientes

$$I_{xx} = \int_{Vol} (y^2 + z^2)\rho\, dV,\; I_{yy} = \int_{Vol} (x^2 + z^2)\rho\, dV,\; I_{zz} = \int_{Vol} (x^2 + y^2)\rho\, dV. \tag{1.10}$$

Y además hemos definido a los **productos de inercia**

$$I_{xy} = -\int_{Vol} x\, y\, \rho\, dV,\; I_{yz} = -\int_{Vol} y\, z\, \rho\, dV,\; I_{zx} = -\int_{Vol} z\, x\, \rho\, dV. \tag{1.11}$$

Una manera simple de escribir al momento angular es

$$\vec{L} = \vec{L}_{c.m.} + \mathbf{I}\,\vec{\omega}, \tag{1.12}$$

con la velocidad angular $\vec{\omega}$ dada por un vector columna y la matriz de inercia $\mathbf{I}$ que es una matriz de tres por tres

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

El producto $\mathbf{I}\vec{\omega}$ nos dice que el vector ω es transformado linealmente en otro vector, llamémoslo $\vec{\varpi}$, cuyas componentes son

$$\varpi_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \quad \varpi_y = I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \quad \varpi_z = I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z.$$

Notemos que los momentos y los productos de inercia estan dados completamente una vez que conocemos la forma del cuerpo rígido y hemos fijado su posición en el espacio. Las unidades del momento (principal) y de los productos de inercia son los Kilogramos metro^2. En el caso para el cual el sólido sea tan sólo unidimensional o bien bidimensional, las integrales tridimensionales se reducen lógicamente a integrales unidimensionales ó bien bidimensionales. Si la densidad de masa es constante, entonces la podemos sacar de las integraciones, simplificandose con ello el problema a la evaluación de por ejemplo

$$I_{zz} = \rho \int_{Vol} R_z^2 \, dV. \tag{1.14}$$

Teoremas de los ejes perpendiculares y de los ejes paralelos

Consideraremos ahora dos resultados que son de gran utilidad práctica en la evaluación de los momentos de inercia.

Primeramente, supongamos que el cuerpo sólido en consideración es **completamente plano**, esto es, que es una región ó lámina completamente contenida en el plano $\{x, y\}$. Entonces, el momento de inercia con respecto al eje z estará dado por

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dx\, dy\, dz = \int_{Vol} x^2\rho(x, y, z)dx\, dy\, dz \; + \; \int_{Vol} y^2\rho(x, y, z)dx\, dy\, dz. \tag{1.15}$$

Pero el momento de inercia con respecto al eje x es simplemente

$$I_{xx} = \int_{Vol} y^2\rho(x, y, z)dx\, dy\, dz, \tag{1.16}$$

ya que debido a que el objeto esta contenido completamente en el plano $\{x, y\}$, todas las coordenadas z de todos sus puntos son cero. Similarmente

$$I_{yy} = \int_{Vol} x^2\rho(x, y, z)dx\, dy\, dz, \tag{1.17}$$

es el momento de inercia con respecto al eje y. Por lo que concluimos que el momento de inercia de cualquier objeto laminar plano al rededor de un eje perpendicular al plano que lo contiene es igual a la suma de los momentos de inercia alrededor de cualesquier dos ejes perpendiculares del mismo plano

$$I_{zz} = I_{xx} \; + \; I_{yy} \tag{1.18}$$

IMP. Este resultado se denomina **Teorema de los Ejes Perpendiculares**.

Consideremos ahora a un cuerpo sólido arbitrario cuyo momento de inercia alrededor del eje z en coordenadas cartesianas está dado por

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) dx\, dy\, dz. \tag{1.19}$$

Expresemos a las coordenadas $\{x, y\}$ en términos de las coordenadas del centro de masas $\{x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}\}$ y de las coordenadas del mismo punto pero relativas al centro de masas y que llamaremos $\{x', y', z'\}$. Estas coordenadas están relacionadas mediante

$$x = x' + x_{cm}, \qquad y = y' + y_{cm}. \tag{1.20}$$

Substituyendo en la expresión para I_{zz} obtenemos desarrollando los cuadrados

$$I_{zz} = \int_{Vol} (x'^2 + y'^2)\rho(x, y, z) dV + \int_{Vol} (x_{cm}^2 + y_{cm}^2)\rho(x, y, z) dV +$$

$$2x_{cm} \int_{Vol} x'\rho(x, y, z) dV + 2y_{cm} \int_{Vol} y'\rho(x, y, z) dV. \tag{1.21}$$

Nos damos cuenta que el primer término es la distancia al cuadrado del centro de masas al eje z, que es con respecto al cual queremos conocer el momento de inercia. Llamemos $d = \sqrt{x_{cm}^2 + y_{cm}^2}$ a esta distancia. El segundo término es el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje z que pasa por el centro de masa. A este momento de inercia lo llamaremos I_{cm}. Finalmente el tercer y cuarto términos se anulan por la definición misma de centro de masa. Por ejemplo, tenemos que

$$x' = \frac{1}{M} \int_{Vol} x\, \rho(x'', y'', z'') dx'' dy'' dz'' - x_{c.m.}. \tag{1.22}$$

Con lo cual

$$\int_{Vol} x'\rho(x, y, z) dV = \frac{1}{M} \int_{Vol} \int_{Vol} x\, \rho(x, y, z)\, \rho(x'', y'', z'') dV\, dV'' - M x_{c.m.} =$$

$$M x_{cm} - M x_{cm} = 0, \tag{1.23}$$

ya que

$$x_{c.m.} = \frac{1}{M} \int_{Vol} x''\, \rho(x'', y'', z'') dx'' dy'' dz''. \tag{1.24}$$

Resumimos estos resultados con la siguiente relación

$$I_{zz} = I_{cm} + M d^2. \tag{1.25}$$

Aquí, M es la masa total del sólido y d es la distancia entre los ejes paralelos z y el que pasa por el centro de masa. Este resultado es conocido como el **Teorema de los Ejes Paralelos**.

Resumimos a continuación algunos momentos de inercia con respecto a los ejes x, y, z. Suponemos que la varilla (longitud L) esta sobre el eje y. El anillo (radio R) y el disco (radio R) están en el plano $\{x, y\}$, centrados en el origen. Para el cilindro (radio R y altura H) y el tubo (radio R y altura H), suponemos que sus bases son paralelas al plano $\{x, y\}$ y que sus centros de masas están en el origen. Para la esfera y el cascarón esférico (ambos radio R) los momentos de inercia son calculados con respecto a cualquier eje que pase por su centro localizado en el origen. Todas las masas son M.

Sólido	I_{zz}	I_{xx}	I_{yy}
Anillo	MR^2	$MR^2/2$	$MR^2/2$
Tubo	MR^2	$M(R^2/2+H^2/12)$	$M(R^2/2+H^2/12)$
Disco	$MR^2/2$	$MR^2/4$	$MR^2/4$
Cilindro	$MR^2/2$	$M(R^2/4+H^2/12)$	$M(R^2/4+H^2/12)$
Varilla (*extremo fijo*)	$ML^2/3$	$ML^2/3$	0
Varilla (*centro fijo*)	$ML^2/12$	$ML^2/12$	0
Esfera	$2\,MR^2/5$	$2MR^2/5$	$2MR^2/5$
Cascarón	$2\,MR^2/3$	$2MR^2/3$	$2MR^2/3$

1.2.3 Torcas o momentos de fuerzas

Para una partícula puntual, de masa constante localizada en $\vec{r}_i$, la **torca** o **momento de una fuerza** ejercida $\vec{F}_i$ está definida como

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,$$

pero utilizando la ecuación del movimiento $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i$ tenemos que

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}\vec{v}_i = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d}{dt}\vec{L}_i.$$

En donde utilizamos al momento lineal de la partícula $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ y a su momento angular $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, así como que

$$\vec{v}_i \times \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Si ahora sumamos sobre todas las partículas del sólido llegamos ala ecuación básica

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}},$$

en donde $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ es la torca neta ejercida sobre el cuerpo rígido y $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ es su momento angular total. esta ecuación se reduce a

$$\vec{\tau}_{ext} = \dot{\vec{L}},$$

si las fuerzas internas son binarias, satisfacen la tercera ley y adicionalmente actúan sobre la dirección del segmento de recta que las une.

1.3 Movimiento Laminar del Cuerpo Rígido

Un caso muy simple de movimiento de cuerpos rígidos es aquel para el cual todas las partículas se mueven paralelamente a un plano fijo. Llamamos **movimiento laminar del cuerpo rígido** a dicho desplazamiento. Notemos que el eje de rotación puede cambiar de posición paralelamente, pero que no cambia su dirección.

DEF.

1.3.1 Rotación alrededor de un Eje Fijo

Supongamos que el cuerpo rígido rota alrededor del eje z. Esto significa que todas las partículas del cuerpo describen círculos concéntricos en planos paralelos al plano $\{x, y\}$ y centrados en el eje z. En coordenadas polares

$$x = r\,\cos(\phi), \quad y = r\,\mathrm{sen}(\phi),$$

deducimos que el vector de posición $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ de una partícula situada en el plano $\{x, y\}$, está dado por

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r, \qquad \hat{e}_r = cos(\phi)\,\hat{i} + sen(\phi)\,\hat{j}, \tag{1.26}$$

con el vector unitario radial $\hat{e}_r$ ya que calculamos su módulo al cuadrado como $|\hat{e}_r|^2 = cos^2(\phi) + sen^2(\phi) = 1$. El vector de velocidad correspondiente es

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \tag{1.27}$$

con el vector tangencial unitario

$$\hat{e}_\phi = -sen(\phi)\,\hat{i} + cos(\phi)\,\hat{j},$$

ya que $|\hat{e}_\phi|^2 = sin^2(\phi) + cos^2(\phi) = 1$. Además este vector es perpendicular al vector $\hat{e}_r$ ya que $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = -cos(\phi)sin(\phi) + sin(\phi)cos(\phi) = 0$.

Dado que estamos considerando que el cuerpo rígido rota alrededor del eje z fijo, y que *definimos* a la **velocidad angular** como aquel vector con módulo (con signo) $\omega = \dot{\phi}$, con la dirección del eje de giro y sentido positivo cuando el giro es de acuerdo a los dedos opuestos al pulgar de la mano derecha colocados alrededor del eje o bien antihorario, tenemos que

$$\vec{\omega}(t) = \omega\,\hat{k}. \tag{1.28}$$

Notemos aquí que $\vec{\omega}$ no es necesariamente la velocidad angular con respecto al centro de masas como se supuso en la sección anterior. Finalmente la aceleración que está dada por

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}\,-\,r\,\omega^2)\,\hat{e}_r + (2\omega\,\dot{r} + r\,\alpha)\,\hat{e}_\phi, \tag{1.29}$$

El primer término es la **aceleración radial**, el segundo la **aceleración centrípeta**, el tercero la **la aceleración de Coriolis** y el cuarto y último la **aceleración tangencial**. Ahora, si consideramos a cualquier partícula que no se encuentre en el plano $\{x, y\}$, las expresiones correspondientes para estos vectores son prácticamente las mismas, excepto que tenemos añadir a $\vec{r}$ la componente $z\hat{k}$, en donde z es la coordenada **constante** correspondiente en la dirección del eje z

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r + z\hat{k}. \tag{1.30}$$

Ahora bien, como todas las partículas del cuerpo se mueven sobre círculos de radios constantes a una altura constante z, entonces tendremos que $\dot{z} = 0$, $\dot{r} = 0$ y que $\ddot{r} = 0$. Con ello se reducen las relaciones anteriores a la velocidad

$$\vec{v}(t) = r\,\omega\,\hat{e}_\phi, \tag{1.31}$$

la cual no depende de la altura z: todas las particulas del sólido a la misma distancia del eje de giro se mueven a la misma velocidad. La aceleración está dada por

$$\vec{a}(t) = \, -r\,\omega^2\,\hat{e}_r + r\,\alpha\,\hat{e}_\phi, \tag{1.32}$$

en donde el primer término $\,-r\,\omega^2\,\hat{e}_r$ es la **aceleración centrípeta** (dirigida hacia el centro de la orbita circular) y el segundo término $r\,\alpha\,\hat{e}_\phi$, es la **aceleración tangencial** (con dirección tangente a la órbita). Para la aceleración angular obtendremos que es el vector

$$\vec{\alpha}(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) = \alpha\,\hat{k}. \tag{1.33}$$

con $\alpha = \ddot{\phi}$. Consideremos ahora a los productos vectoriales siguientes

$$\hat{k} \times \hat{e}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ cos(\phi) & sen(\phi) & 0 \end{vmatrix} = \hat{e}_\phi, \quad \hat{k} \times \hat{e}_\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \end{vmatrix} = -\hat{e}_r. \tag{1.34}$$

Haciendo uso de estos productos en las expresiones últimas para la velocidad y la aceleración vemos que tendremos

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \,\times\, \vec{r}, \quad \vec{a}(t) = \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{\alpha} \,\times\, \vec{r}. \tag{1.35}$$

Estas relaciones resumen de manera simple los resultados para el movimiento de *cada* partícula del sólido para rotaciones alrededor de un eje fijo. No incluyen nada adicional a lo ya contenido en las ec.(1.31) y ec.(1.32), pero pueden ser de utilidad en la consideración de problemas mas generales.

1.3.2 Momento Angular y Momentos de Inercia: Eje Fijo

Consideremos ahora al momento angular. Para una partícula de masa m describiendo una trayectoria circular de radio r paralela al plano $\{x, y\}$ y con coordenada vertical z, tendremos que $\vec{r} = r\hat{e}_r \,+\, z\,\hat{k}$ y

$$\vec{L}_0 = mr^2\omega\,\hat{e}_r \,\times\, \hat{e}_\phi \,+\, mrz\omega\,\hat{k} \times \hat{e}_\phi. \tag{1.36}$$

Pero podemos comprobar fácilmente que $\hat{e}_r \,\times\, \hat{e}_\phi = \hat{k}$ así como $\hat{k} \,\times\, \hat{e}_\phi = -\hat{e}_r$ por lo que

$$\vec{L}_0 = mr^2\omega\,\hat{k} \,-\, mrz\omega\,\hat{e}_r = m(x^2 + y^2)\omega\hat{k} \,-\, mzx\omega\,\hat{\imath} \,-\, myz\omega\,\hat{\jmath}. \tag{1.37}$$

Para un cuerpo rígido consideramos primeramente en lugar de la masa m, diferenciales de masa dm y denotamos con R_z a la distancia radial o mínima, hasta ahora denotada con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, al eje de rotación (en este caso el eje z). Como segundo y último paso sumamos en el sentido de Riemann todas las contribuciones de todos los elementos de masas dm del cuerpo y obtenemos

$$\vec{L} = I_{zz}\,\omega\,\hat{k} + I_{xz}\,\omega\,\hat{\imath} + I_{yz}\,\omega\,\hat{\jmath} \tag{1.38}$$

la cual es un caso particular de la relación (1.12) con $\omega_x = \omega_y = 0$ y $\omega_z = \omega$. Hemos utilizado las definiciones dadas para los momentos y los productos de inercia ecs.(1.10, 1.11).

1.3.3 Torca y Momento Angular: Eje Fijo

Dado que estamos considerando por el momento a un sólido que está restringido a moverse al rededor de un eje fijo, la **torca** neta tendrá como componente única distinta de cero a aquella con la dirección del eje de rotación, y por ello tendremos

$$\tau_z = \dot{L}_z = I_{zz}\,\alpha, \tag{1.39}$$

para cuya deducción usamos que el momento de inercia no depende del tiempo para un cuerpo rígido y que $\alpha = \dot{\omega}$.

1.3.4 Cuerpos Rodando

Un caso particular de movimiento laminar es el rodamiento de cuerpos rígidos cuya secciones transversales son círculos. Ejemplos son la esfera, el cascarón esférico, el cilindro, el disco, el aro y el anillo (los últimos tres sin inclinación).

Tenemos dos posibles casos por considerar. El primero ocurre cuando debido a la fricción entre el cuerpo rodando y la superficie sobre la que rueda, no ocurre deslizamiento alguno. A esta situación se le llama **rodar sin deslizar** o bien **rodar sin resbalar** . Si llamamos x a la dirección del movimiento del centro de masas y ϕ al ángulo que se desplaza el punto de contacto del sólido, y denotamos por r al radio del círculo, entonces

$$x_{c.m.} = r\,\phi, \quad v_{c.m.} = r\,\omega, \quad a_{c.m.} = r\,\alpha, \tag{1.40}$$

con $\omega = \dot{\phi}$, $\alpha = \dot{\omega}$, $v_{c.m.} = \dot{x}_{c.m.}$ y $a_{c.m.} = \dot{v}_{c.m.}$. Notemos por ejemplo de estas relaciones que si el cuerpo da una vuelta completa sin resbalar, entonces su centro de masas (localizado en su eje) se desplazará una distancia $2\pi r$ que es la longitud de su perímetro o circunferencia.
Recordemos ahora a la ecuación (1.5) que nos relaciona a la velocidad $\vec{v}$ de un punto sobre un sólido con la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{c.m.}$ y con la velocidad angular $\vec{\omega}$ instantánea de dicho punto alrededor del eje instantáneo de giro

$$\vec{v} = \vec{v}_{c.m.} + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Dado que suponemos que la rueda se desplaza en sentido positivo sobre el eje x, la velocidad del centro de masas es $\vec{v}_{c.m.} = \hat{\imath}\dot{r}_{c.m.} = \hat{\imath}\,r\,\omega$ y si llamamos y a la dirección vertical entonces la velocidad angular será $\vec{\omega} = -\hat{k}\,\omega$ y tendremos

$$\vec{v} = \hat{\imath}\,r\,\omega - \omega\,\hat{k} \times \vec{r}.$$

Ahora veamos algunos puntos particulares sobre el perímetro de la rueda. El punto de contacto se encuentra en una posición $\vec{r}_{contacto} = -\hat{j}r$ con respecto al eje y como $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ se sigue que

$$\vec{v}_{contacto} = \vec{0}.$$

Este resultado no es sorprendente, ya que estamos suponiendo que el sólido rueda sin resbalar y el piso está en reposo. En contraste, para el punto mas alto de la rueda, situado sobre el centro de masas tenemos que se está en la posición $\vec{r}_{max} = \hat{j}\, r$ y por tanto su velocidad total será

$$\vec{v}_{max} = 2r\omega\, \hat{i},$$

esto es, se mueve con el *doble* de la rapidez con que se desplaza el centro de masas. Otros puntos tendrán rapideces intermedias y desde luego otras direcciones.

El segundo caso a considerar sucede cuando el sólido rueda deslizandose. En este caso ya no se pueden aplicar las ecuaciones ec.(1.40) y debe de emplearse como modelo de fricción a la fuerza de fricción cinética cuyo módulo está dado mediante

$$f_{cin} = \mu\, N, \tag{1.41}$$

en donde μ es el coeficiente de fricción cinético y N es el módulo de la fuerza normal que la superficie ejerce sobre el sólido.

Problemas sobre Dinámica del Cuerpo Rígido

Problema 1. Calcula al momento principal de inercia I_{zz} de los siguientes objetos de material homogéneo. a) Un anillo de masa M y radio R localizado en el plano $\{x, y\}$. b) Un tubo de masa M, altura H y radio R cuyo eje es paralelo al eje z. c) Una varilla de masa M y longitud L, localizada sobre el eje x, primero para cuando un extremo está en el origen y después para cuando el centro de la varilla coincide con el origen.

Solución. a) Para el anillo

$$I_{zz} = \int_{anillo} R^2\, dm,$$

pero como el radio es constante

$$I_{zz} = R^2 \int_{anillo} dm = M\, R^2,$$

ya que la última integral es simplemente la masa total M del anillo.

b) Para el tubo

$$I_{zz} = \int_{tubo} R^2 dm = R^2 \int_{tubo} dm = M\, R^2,$$

ya que nuevamente la distancia de cualquier elemento de diferencial de masa dm sobre el tubo se encuentra a la misma distancia R del eje del tubo.

c) Para la varilla con un extremo en el origen escribimos

$$I_{zz}^{varilla\,1} = \int_0^L x^2\, dm,$$

ya que suponemos que se encuentra sobre el eje x entre el origen y el punto $x = L$ y a que la distancia de cualquier elemento diferencial de masa dm está a una distancia x del eje z que pasa por el origen. Ahora bien, como en este caso unidimensional $dm = \rho_{lineal} dx$ en términos de la densidad lineal de masa ρ_{lineal} y esta es constante, entonces

$$I_{zz}^{varilla\,1} = \rho_{lineal} \int_0^L x^2\, dx = \rho_{lineal} \frac{L^3}{3}.$$

Pero como $\rho_{lineal} = M/L$, entonces

$$I_{zz}^{varilla\,1} = \frac{1}{3} M L^2.$$

Finalmente, para el caso en que la varilla está centrada en el origen y por tanto va de $x = -L/2$ a $x = L/2$, escribimos al momento de inercia como

$$I_{zz}^{varilla\,2} = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dm = \rho_{lineal}\left(\frac{1}{3}\frac{L^3}{2^3} - \frac{1}{3}\frac{(-L)^3}{2^3}\right) = \rho_{lineal}\frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} M L^2.$$

Es claro que $I_{zz}^{varila\,1} > I_{zz}^{varilla\,2}$, ya que cuando la varilla está centrada en el origen hay un número mayor de elementos de volumen cerca del origen (que contribuyen menos a la integral) que cuando la varilla tiene un extremo que pasa por el origen y por tanto tiene elementos de volumen mas alejados de éste y que contribuyen en mayor medida a la integral respectiva.

Problema 2. Una tabla de L metros de longitud se encuentra colocada sobre un camión haciendo un ángulo de ϕ radianes con el piso. Suponer que la tabla está recargada contra la pared frontal y su extremo inferior descansa contra un bloque fijo en el piso del camión. Calcula la aceleración máxima del camión para que la tabla no gire.

Solución. Si la tabla se encuentra en el plano $\{x, y\}$ y el camión se desplaza en la dirección del eje x en sentido positivo, entonces el centro de masas de la tabla, localizado en su centro por ser homogénea, se encuentra a una altura constante

$$y_{c.m.} = \frac{L}{2}\mathrm{sen}(\phi),$$

y a una distancia

$$x_{c.m.} = \frac{L}{2}\cos(\phi),$$

de un eje vertical que pase por el punto de apoyo. La aceleración del centro de masas es por otro lado

$$\ddot{x}_{c.m.} = -a_c,$$

en donde a_c es la aceleración del camión, dado que la tabla tiende a quedar rezagada según la primera ley de Newton. En la dirección vertical sobre el centro de masas de la tabla la gravedad ejerce una fuerza $-Mg\,\hat{\jmath}$. Con ello la torca total ejercida sobre el centro de masas con respecto al punto de apoyo con el bloque es

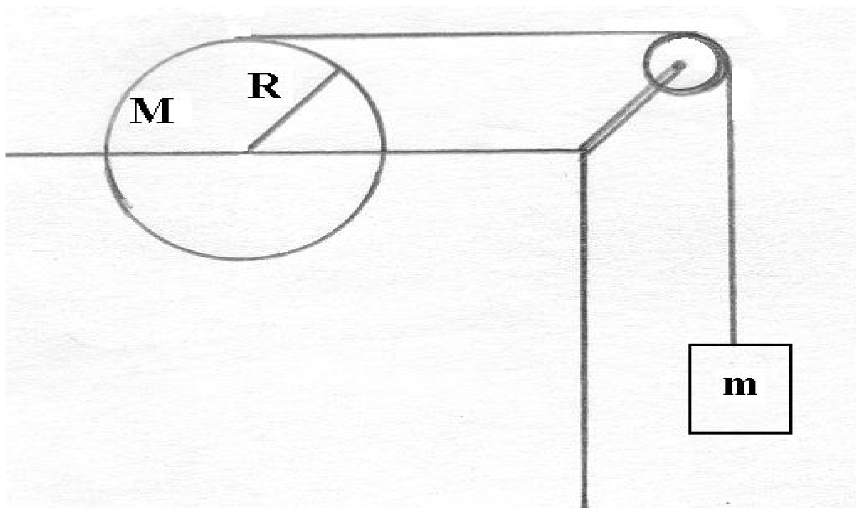
$$\vec{\tau} = -\frac{L}{2}\cos(\phi)\hat{\imath} \times Mg\hat{\jmath} - \frac{L}{2}\mathrm{sen}(\phi)\hat{\jmath} \times Ma_c\hat{\imath} = \frac{ML}{2}(-\cos(\phi)g + \mathrm{sen}(\phi)a_c)\hat{k},$$

ya que $\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$. Para obtener la torca neta sobre la tabla habría que añadir las torcas asociadas a las fuerzas normales con el piso y con la pared, pero ambas se anulan. Esto se debe a que para aceleración máxima horizontal la fuerza normal con la pared es cero, mientras que en el punto de apoyo inferior la tabla no puede separarse de éste, además de que el brazo de palanca es nulo por estar calculando las torcas con respecto a dicho punto. Así pues como la tabla no gira la torca neta dada por $\vec{\tau}$ debe ser nula y por tanto

$$a_c = g\,\cot(\phi).$$

En esta expresión notamos que para el caso extremo en que la tabla está casi acostada, ϕ pequeño, la aceleración del camión podría ser muy grande sin que la tabla gire, mientras que cuando la tabla está casi vertical, ϕ cercana a $\pi/2$, la aceleración máxima será muy pequeña, tal y como esperamos.

Problema 3. Un cilindro uniforme de masa M y radio R se desliza sobre su eje encima de una guía horizontal y *sin* fricción. Una cuerda ideal se encuentra enredada alrededor del cilindro y de su extremo cuelga un bloque de masa m. Calcula el momento de inercia del cilindro con respecto a su eje y obtén la aceleración del bloque.



Solución. La ecuación que describe el movimiento del cilindro es

$$\vec{\tau} = I_{zz}\vec{\alpha},$$

en donde, si elegimos que el eje del cilindro coincida con la dirección z, la aceleración angular será $\vec{\alpha} = -\hat{k}\alpha$, suponiendo que el cilindro se desplaza de izquierda a derecha sobre el eje x. La torca neta sobre el cilindro, dado que no hay fricción con el riel, está dada por la tensión ejercida por la cuerda $\vec{T} = \hat{\imath}T$, suponiendo que la cuerda sale de la parte superior del cilindro y jala hacia la derecha. El brazo de palanca esta dado por el vector que va del eje del cilindro al punto de aplicación de la tensión y está dado por $\vec{r} = \hat{\jmath}R$. Con lo cual la torca neta será

$$\vec{\tau} = RT\,\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -RT\,\hat{k}.$$

Con lo que

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{RT}{I_{zz}},$$

en donde tenemos aún que calcular al momento de inercia del cilindro con respecto a su eje, cálculo que dejamos para el final.

Para el bloque tenemos que su ecuación del movimiento es

$$ma_b = -T + mg,$$

donde a_b es su aceleración en el sentido y dirección de su caída, T es la tensión de la cuerda que le impide caer libremente y mg es su peso. Ahora nos es conveniente relacionar la aceleración a_b

del bloque con la aceleración $a_{c.m.} = \ddot{x}_{c.m.}$ del centro de masas del cilindro. Para la aceleración del centro de masas, notamos que está dada por

$$a_{c.m.} = \frac{T}{M},$$

dado que la tension es la fuerza neta. La cantidad de cuerda que se suelta al dar vuelta el cilindro está dada por $R\phi$, en donde ϕ es el ángulo en radianes que ha dado vuelta un punto cualquiera sobre el cilindro. Sin embargo es **importante** notar ahora que conforme la cuerda se desenrolla una cantidad $R\phi$ del cilindro, la masa que cuelga del otro extremo se aleja por una distancia igual a la que se desplazó el centro de masas $x_{c.m.}$ mas la cantidad de cuerda desenrollada, esto es

$$x_b = x_{c.m.} + R\phi.$$

Así que derivando dos veces con respecto al tiempo

$$a_b = a_{cm} + R\alpha = \frac{T}{M} + \frac{TR^2}{I_{zz}} = -\frac{T}{m} + g\,,$$

en donde hemos sustituido la expresión para la aceleración angular obtenida al principio. De la última igualdad podemos despejar a la tensión como

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{m}{M} + \frac{mR^2}{I_{zz}}}.$$

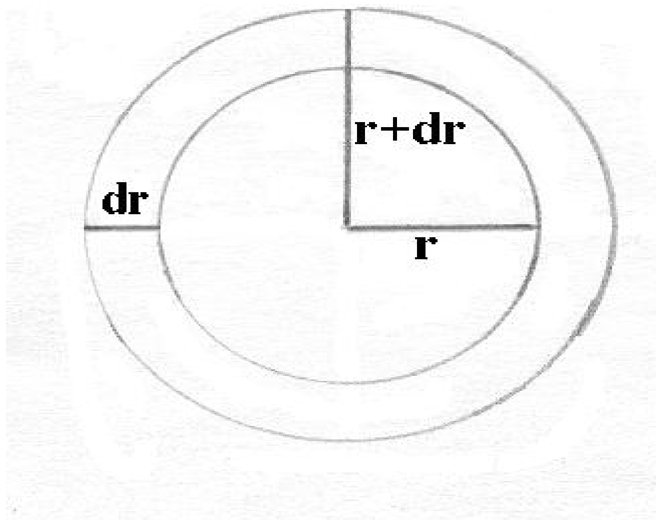
Obtenemos a la aceleración del bloque substituyendo este valor para llegar a

$$a_b = \; g\, \frac{\frac{m}{M} + \frac{mR^2}{I_{zz}}}{1 + \frac{m}{M} + \frac{mR^2}{I_{zz}}}.$$

Ahora solo nos falta calcular el momento de inercia del cilindro con respecto a su eje de simetría. Para ello calculemos primero el momento de inercia de un disco homogéneo de radio R y masa M, localizado en el plano $\{x, y\}$, dado por

$$I_{zz}^{disco} = \rho_{sup} \int_{\text{disco}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

en donde ρ_{sup} es la densidad superficial constante del disco.



Ahora es posible darse cuenta que la integración sobre el disco la podemos realizar mas sencillamente si dividimos al disco en anillos de radio interior r y radio exterior $r+dr$. El área de tales anillos será la diferencia del área de un disco de radio $r+dr$ menos el área de un disco de radio r. Esta diferencia es

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi\, r\, dr + \pi(dr)^2.$$

Si ahora elegimos a dr muy pequeño, podemos despreciar al término $\pi(dr)^2$ con respecto al primero y reescribir a la integral para el momento de inercia como

$$I_{zz}^{disco} = \rho_{sup} \int_0^R 2\pi r^3\, dr,$$

ya que $x^2+y^2=r^2$. Integrando y utilizando que la densidad del disco es el cociente de su masa entre su área, $\rho_{sup} = M/\pi R^2$, obtenemos

$$I_{zz}^{disco} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Para el cilindro basta con suponer que está formado por rebanadas delgadas iguales con forma de disco y que contribuyen con momentos de inercia

$$dI_{zz}^{disco} = \frac{1}{2} R^2\, dM.$$

Con lo que sumando todas las contribuciones llegamos a

$$I_{zz}^{cil} = \int_{cilindro} dI_{zz}^{disco} = \frac{1}{2} M R^2.$$

Una manera alternativa de obtener este momento de inercia es directamente considerar una partición del cilindro en capas concéntricas tubulares de radios interior r y exterior $r+dr$ y alturas dz, lo que lleva al elemento de volumen

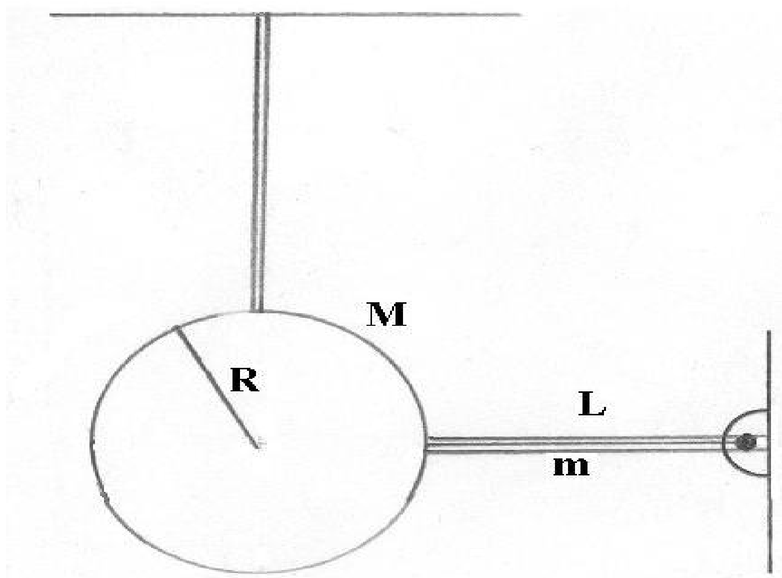
$$dV = 2\pi r^2 dr\, dz,$$

y a escribir

$$I_{zz}^{cilindro} = 2\pi\rho_{vol}\int_0^H\int_0^R r^3\,drdz.$$

La densidad de masa por unidad de volumen es ahora $\rho_{vol} = M/(H\pi R^2)$, e integrando es posible comprobar que se llega al mismo resultado.

Problema 4. Un péndulo, que está formado por una esfera de radio R y masa M y por una varilla delgada de longitud L y masa m, se encuentra en posición horizontal sujeto por una cuerda ideal. Si la cuerda se corta repentinamente, calcular la aceleración angular del péndulo justo en dicho momento. Substituir en lugar de la esfera a un disco de radio R y masa M, calcular en ambos casos los momentos de inercia requeridos y decidir cual péndulo se mueve mas rápido.



Solución. Justo después de cortada la cuerda calculamos los momentos ejercidos por la gravedad sobre los centros de masas de la varilla y de la esfera con respecto al punto de giro. El centro de masas de la esfera está localizado a $L+R$ metros del eje de giro y el centro de masas de la varilla, también supuesta homogénea se localiza a $L/2$ metros del eje de giro. Por tanto, suponiendo que el plano de rotación es el plano $\{x, y\}$ y que el péndulo se encuentra a la izquierda del eje de giro, la torca neta es

$$\vec{\tau} = \hat{k}(Mg(L+R) + \frac{mgL}{2}).$$

Sin embargo, ésta torca debe de ser igual a $I_{zz}\vec{\alpha}$ en donde $\vec{\alpha}$ es la aceleración angular e I_{zz} es el momento de inercia de péndulo con respecto al eje z que pasa por el punto giro, o "punto fijo". Así que concluimos que

$$\vec{\alpha} = \hat{k}\frac{g}{I_{zz}}(M(R+L) + \frac{mL}{2}),$$

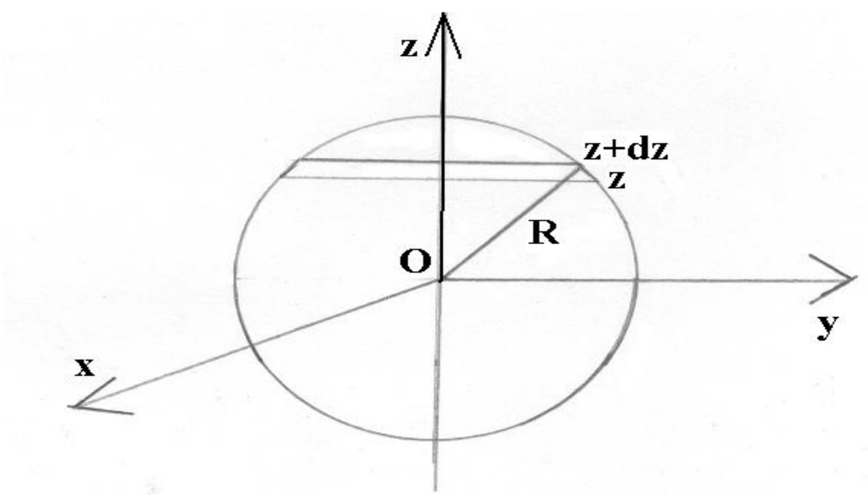
restando solo el cálculo de los momentos de inercia.
El momento de inercia total de un sólido formado por la unión fija de dos o más sólidos es simplemente la suma de los momentos de inercia de cada parte. En este caso tenemos

$$I_{zz}^{péndulo} = I_{zz}^{esfera} + I_{zz}^{varilla},$$

en donde los momentos de inercia son tomados con respecto al mismo eje, al cual llamamos z, que pasa por el punto fijo. El momento de inercia de una varilla de masa m con respecto a uno de sus extremos ya lo calculamos anteriormente en el problema 1 como

$$I_{zz}^{varilla} = \frac{1}{3} m L^2.$$

El momento de inercia de la esfera lo calculamos a continuación. Primero obtenemos al momento con respecto a un eje z que pasa por el centro de masas de la esfera.



Para ello nos imaginamos a la esfera particionada en discos paralelos al plano $\{x, y\}$, definidos por $r^2 = x^2 + y^2$ con radios variables $r = \sqrt{R^2 - z^2}$, a la altura z y ancho dz, ya que así tendremos que la esfera queda definida mediante

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

El momento de inercia de cada disco esta dado por $dI_{c.m.}^{disco} = \frac{1}{2} r^2\, dm$, por lo que el momento de inercia de toda la esfera será

$$I_{c.m.}^{esfera} = \frac{\rho_{vol}}{2} \int_{esfera} (R^2 - z^2) dV = \frac{\pi \rho_{vol}}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)^2 dz,$$

en donde hemos utilizado que el elemento de volumen dV está dado por el producto de la altura dz por el área del disco $\pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$. Evaluando al cuadrado e integrando obtenemos

$$I_{c.m.}^{esfera} = \frac{\pi \rho_{vol}}{2} \left(R^4\, z - \frac{2}{3} R^2\, z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right)_{-R}^{R} = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2,$$

ya que la densidad volumétrica de la esfera es el cociente de su masa entre su volumen $\rho_{vol} = M/(4\pi R^3/3)$. El momento de inercia de la esfera con respecto al punto fijo del péndulo se encuentra aplicando el teorema de los ejes paralelos. Sumamos simplemente al momento de inercia con respecto al eje que pasa por su centro de masas la distancia $L + R$ al cuadrado del eje que pasa por el punto fijo multiplicada por la masa y obtenemos

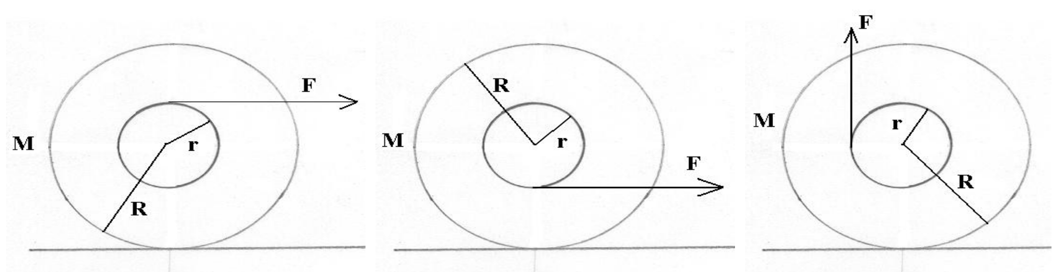
$$I_{zz}^{esfera\,alejada} = \frac{2}{5}MR^2 + M(L+R)^2.$$

Si substituimos a la esfera por un disco de masa M y radio R, su moneto de inercia con centro de masas colocado a distancia $L + R$ del eje de giro, su moento de inercia será

$$I^{Disco\,alejado} = \frac{1}{2}MR^2 + M(L+R)^2.$$

Este moento de inercia es **mayor** que el correspondiente para la esfera, por lo que deducimos que la aceleración del péndulo con la esfera sera **mayor** que con el disco.

Problema 5. Un yoyo rueda sin resbalar sobre una mesa jalado por una cuerda ideal sobre la que actúa una fuerza constante F de la siguiente manera. **a)** F apunta en dirección horizontal en sentido positivo y la cuerda está enrollada de tal forma que sale por arriba del eje. **b)** Igual que en el inciso anterior pero la cuerda sale por abajo del eje. **c)** La fuerza actúa en direccón vertical y la cuerda sale por el lado izquierdo del eje. Deducir en cada caso en que sentido se desplaza el yoyo y obtener su aceleración angular.



Solución. Sea $\{x, y\}$ el plano sobre el que actúa la fuerza y sea z la dirección perpendicular a dicho plano. Denotemos por r al radio del carrete interior del yoyo sobre el cual se encuentra enrollada la cuerda y por R al radio total del yoyo, con lo que claramente $R > r$. Como veremos, la torca

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F},$$

apunta en la dirección z en los tres casos, aquí, el vector $\vec{r}$ va de punto de apoyo del yoyo al punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$. En el caso **a)** $\vec{F} = F\hat{\imath}$, $\vec{r} = (r + R)\hat{\jmath}$, con lo que

$$\vec{\tau} = (r+R)F\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -(r+R)F\hat{k},$$

por lo que el yoyo gira en sentido negativo y se desplaza hacia la derecha. En el inciso **b)** tenemos nuevamente que $\vec{F} = F\hat{\imath}$ y que como la cuerda sale por debajo del carrete interior del yoyo ahora $\vec{r} = (R - r)\hat{\jmath}$, lo que implica que

$$\vec{\tau} = (R - r)F\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -(R - r)F\hat{k}.$$

Esto significa que dado que $R-r > 0$, el yoyo se mueve hacia la derecha nuevamente. Finalmente para el inciso **c)**, la fuerza es $\vec{F} = F\hat{\jmath}$ y $\vec{r} = -r\hat{\imath}$ lo que conduce a

$$\vec{\tau} = -rF\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -rF\hat{k},$$

y que leemos como que el yoyo también se desplaza hacia la derecha, dado que nuevamente gira en el sentido negativo, esto es, en el de las manecillas del reloj, alrededor del eje z perpendicular al plano de rotación.

Si llamamos A al punto instantáneo de apoyo al ecuación del movimiento será

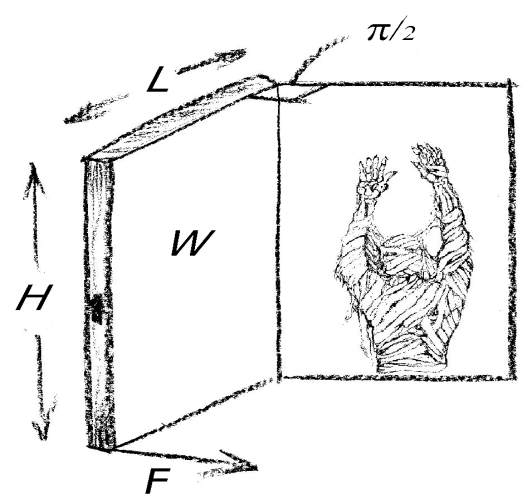
$$\vec{\tau} = -I_A\vec{\alpha},$$

por lo que la aceleración angular es

$$\vec{\alpha} = \frac{(r + R)F}{I_A}\hat{k},$$

para el caso **a)** y similar para los otros tres casos. El momento de inercia I_A es con respecto al punto de apoyo A, por lo que por el teorema de los ejes paralelos está dado por $I_A = mR^2 + I_{c.m.}$ siendo m la masa del yoyo e $I_{c.m.}$ su momento de inercia con respecto a su centro de masas.

Problema 6. El "Enmascarado de Plata" sale huyendo de las catacumbas perseguido por las momias de Guanajuato. Para impedir que escapen debe cerrar lo mas rápido posible la pesada puerta de piedra con peso W, altura H y ancho L. Suponiendo que el héroe ejerce una fuerza constante de magnitud F sobre el borde exterior de ésta y de manera siempre perpendicular, calcula el tiempo que se tarda en cerrar la puerta.



Solución. La torca tiene una dirección paralela a la del eje de giro de la puerta que llamamos z y está dada por

$$\vec{\tau} = LF\,\hat{k} = I_{zz}\,\alpha\,\hat{k},$$

en donde I_z es el momento de inercia de la puerta con respecto a un eje que pasa por uno de sus lados. Dado que la componente z de la aceleración angular está dada por $\alpha_z = \dot{\omega_z}$ podemos integrar la última igualdad para obtener a la componente vertical de la velocidad angular como

$$\omega_z = \frac{LF}{I_{zz}}\,t,$$

suponiendo que en el instante $t = 0$ se encontraba en reposo. Nuevamente podemos integrar esta relación, dado que $\omega_z = \dot{\phi}$ en donde ϕ es el ángulo que hace la puerta al instante t con respecto a su posición inicial, y obtener

$$\phi = \frac{LF}{2I_{zz}}\,t^2.$$

Si ahora notamos que para que la puerta esté cerrada necesitamos que $\phi = \pi/2$, escribiendo este valor despejamos al tiempo necesario para cerrarla como

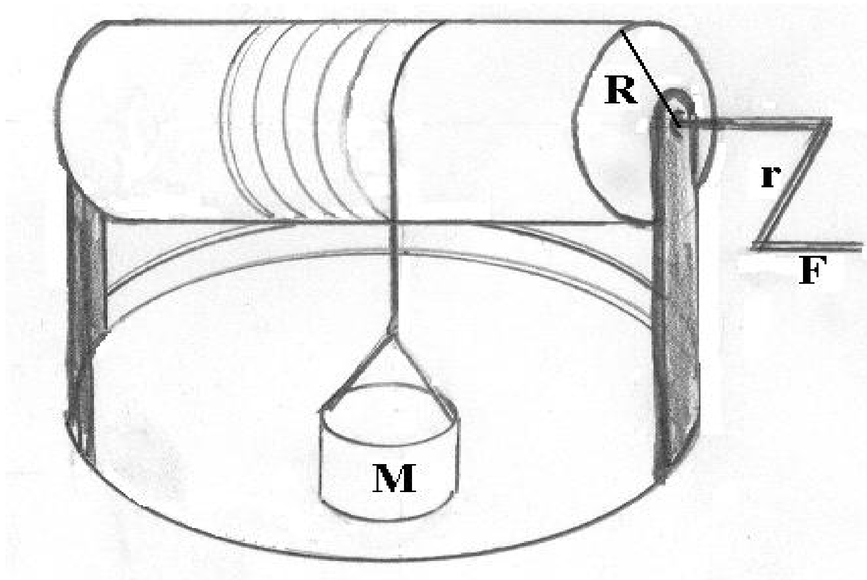
$$t = \sqrt{\frac{\pi I_{zz}}{LF}}.$$

Al momento de inercia lo calculamos de manera análoga al caso de la varilla, de acuerdo a

$$I_z z = \int_0^H \int_0^L x^2 \rho_s\, dx dz = \frac{1}{3}\,ML^2$$

ya que la densidad superficial ρ_s de la puerta es el cociente de su masa entre su superficie $\rho_s = M/(LH)$.

Problema 7. Encontrar la magnitud de la fuerza que debe ser aplicada sobre la manivela de un pozo, para subir un cubo de agua de masa M con una aceleración constante a. Suponer que el cubo es subido por medio de una cuerda ideal enrollada a un cilindro de radio R y masa m y que se aplica la fuerza de manera tangencial al círculo descrito por la manivela de radio r.



Solución. Llamemos z a la dirección del eje del cilindro. La torca ejercida por la fuerza F tiene magnitud

$$\tau_F = r\,F,$$

y aquella ejercida por la cuerda

$$\tau_c = R\,Mg,$$

dado que la tensión de la cuerda se debe al peso Mg del cubo. Eligiendo el sentido de la torca $\vec{\tau}_F$ como negativo el sentido de $\vec{\tau}_c$ será positivo y la torca neta estará dada por

$$\vec{\tau} = (-\tau_F\ +\ \tau_c)\hat{k} = -I_{zz}\alpha_z\,\hat{k}.$$

En la segunda igualdad hemos utilizado el hecho que el cubo de agua sube. Tenemos entonces que la aceleración angular es

$$\alpha_z = \frac{rF\ -\ RMg}{I_{zz}}.$$

Como suponemos que la cuerda no resbala y es muy delgada, entonces si el cilindro rota un ángulo ϕ la cuerda se enrolla una cantidad $x = R\phi$ ('rueda sin resbalar') y por ello la aceleración lineal de un elemento de cuerda, o bien la aceleración del cubo, está dada por $a = \ddot{x} = R\ddot{\phi} = R\alpha_z$. Así que llegamos a que

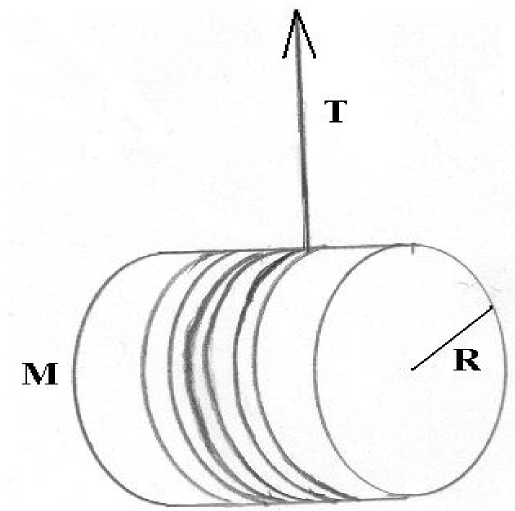
$$\frac{a}{R} = \frac{rF\ -\ RMg}{I_{zz}} \quad \Longrightarrow \quad F = -\frac{RMg}{r} + \frac{I_{zz}a}{rR},$$

es la fuerza requerida. El momento de inercia del cilindro homogéneo de altura H se puede calcular como

$$I_{zz} = 2\pi \int_0^H \int_0^R r^3\,\rho_{vol}\,drdz = \rho_{vol}\frac{\pi R^4 H}{2} = \frac{1}{2}MR^2,$$

ya que la densidad volumétrica de masa es en este caso el cociente de la masa M entre el volumen del cilindro $\rho_{vol} = M/(\pi R^2 H)$.

Problema 8. Una cuerda ideal se encuentra enrollada sobre un cilindro de radio R y masa M. Si la cuerda es jalada hacia arriba de tal forma que el cilindro queda suspendido en el aire calcular: **a)** La cantidad de cuerda que es desenrollada como función de la velocidad angular del cilindro. **b)** Igual que en el inciso anterior pero como función del tiempo.



Solución. La torca ejercida por la cuerda sobre el cilindro para que éste no caiga debe ser igual a la torca ejercida por su peso y tiene magnitud dada por

$$\tau = R\,Mg = I_{zz}\alpha.$$

Por lo que la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{MgR}{I_{zz}}.$$

Como suponemos que la cuerda no resbala sobre el cilindro, éste 'rueda sin resbalar' y satisface que la aceleración de un punto sobre su periferia es $\ddot{x} = R\alpha$, por lo que

$$\ddot{x} = \frac{MgR^2}{I_{zz}}.$$

esta expresión la podemos integrar sucesivamente dos veces con respecto al tiempo y obtener

$$\dot{x} = \frac{MgR^2}{I_{zz}}\,t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{MgR^2}{2I_{zz}}\,t^2,$$

suponiendo que originalmente el cilindro estaba en reposo al tiempo $t = 0$ en el origen. Esta expresión resuelve al inciso **b)**. Para el primer inciso notemos en la primer ecuación, que la aceleración angular $\alpha = \dot{\omega}$ es constante, lo que implica que la velocidad angular es $\omega = \alpha\, t$, si el cilindro parte del reposo. Esto significa que $t = \omega/\alpha$ y por tanto podemos reexpresar a la longitud de cuerda desenrollada x como

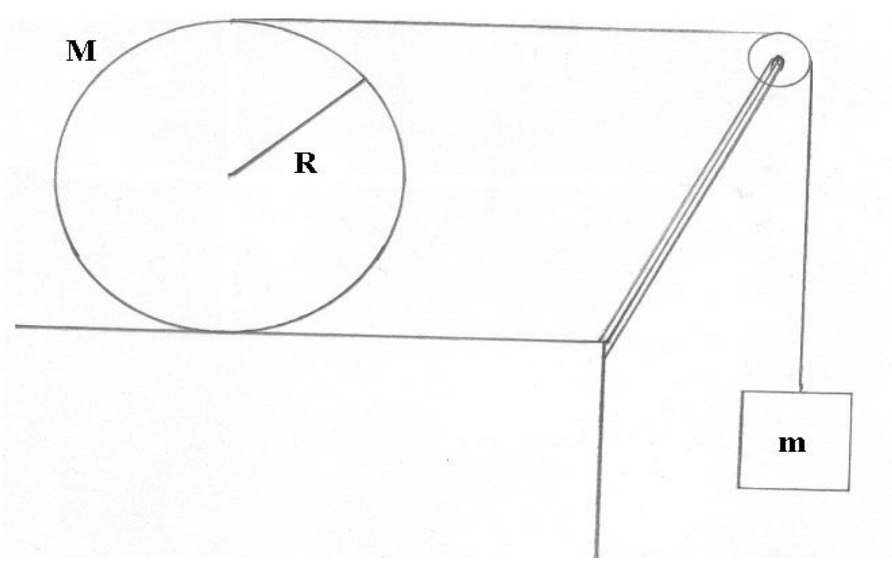
$$x = \frac{MgR^2}{2\alpha^2 I_{zz}}\,\omega^2 = \frac{I_{zz}\omega^2}{2Mg}.$$

Como en otros problemas el momento de inercia del cilindro homogéneo de altura H se calcula como

$$I_{zz} = 2\pi \int_0^H \int_0^R r^3 \, \rho_{vol} \, dr dz = \rho_{vol} \frac{\pi R^4 H}{2} = \frac{1}{2} M R^2,$$

debido a que la densidad volumétrica de masa es el cociente de la masa M entre el volumen del cilindro $\rho_{vol} = M/(\pi R^2 H)$.

Problema 9. Una esfera uniforme de masa M y radio R tiene enredada una cuerda ideal sobre su ecuador. Si la esfera rueda sin resbalar sobre dicho ecuador en la dirección del eje x en sentido positivo: **a)** calcular la aceleración del bloque de masa m que pende del otro extremo de la cuerda. **b)** Determinar si el bloque cae mas rápidamente si sustituimos a la esfera por un disco del mismo radio y la misma masa.



Solución. Tomando la dirección z como la perpendicular al plano del movimiento de rotación, la torca neta está dada por

$$\vec{\tau} = -(TR + fR)\,\hat{k},$$

en donde T es la tensión de la cuerda y f es la fuerza de fricción estática con el piso. La ecuación del movimiento para el centro de masas de la esfera es por otra parte

$$T - f = M\ddot{x}_{c.m.}. \tag{1.42}$$

Pero como la esfera rueda sin resbalar tenemos que

$$\ddot{x}_{c.m.} = R\,\alpha,$$

en donde α es el módulo de la aceleración angular. Pero dado que

$$\vec{\tau} = -I_{zz}\,\alpha\,\hat{k},$$

entonces

$$TR + fR = \frac{I_{c.m.}}{R}\,\ddot{x}_{c.m.}.$$

Así que sumando esta última ecuación dividida entre R con la ec.(1.42) miembro a miembro, obtenemos

$$2T = (M + \frac{I_{c.m.}}{R^2})\ddot{x}_{c.m.}. \tag{1.43}$$

Para el bloque de masa m tenemos sin embargo, llamando x a la dirección y sentido de su caída (en obvio abuso de notación),

$$m\ddot{x} = mg\, -\, T.$$

Pero dado que la cuerda es inextensible y a que se desenrolla una cantidad $x_{c.m}$ cada que el centro de masas de la esfera avanza dicha distancia, entonces, en el mismo intervalo de tiempo, el bloque cae una distancia $x = 2\,x_{c.m.}$ y por tanto

$$m\ddot{x} = mg\, -\, T = 2m\,\ddot{x}_{c.m.}.$$

Despejando aquí $T = mg\, -\, 2m\,\ddot{x}_{c.m.}$ y substituyendo el resultado en la ec.(1.43), llegamos a

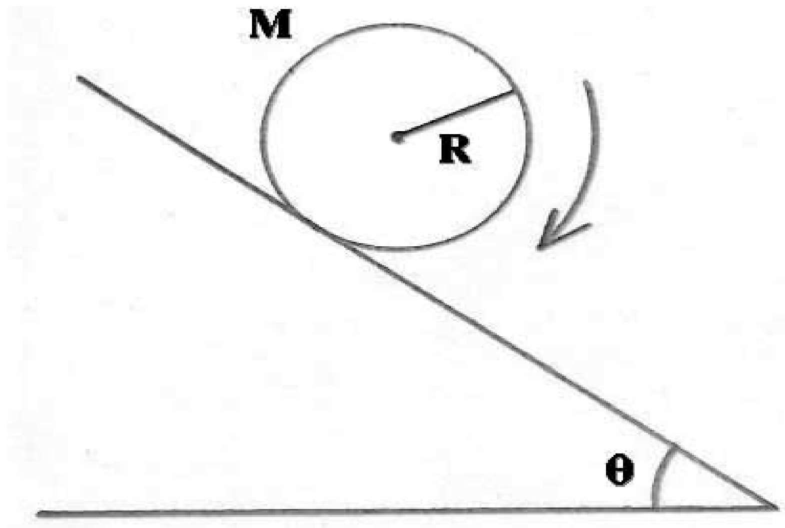
$$2mg\, -\, 4m\,\ddot{x}_{c.m.} = (M + \frac{I_{c.m.}}{R^2})\ddot{x}_{c.m.}.$$

Así que

$$\ddot{x}_{c.m.} = \frac{2mgR^2}{4mR^2 + MR^2 + I_{c.m.}},$$

con lo que la aceleración del bloque es simplemente el doble de esta aceleración. El momento de inercia para una esfera es $I_{zz} = \frac{2}{5}MR^2$. Finalmente, dado que el momento de inercia del disco es $I_{zz}^{disco} = \frac{1}{2}MR^2$ y por tanto mayor que el de la esfera, entonces la aceleración es *menor* para cuando sustituimos a la esfera por el disco, por lo que cae *mas lentamente*.

Problema 10. Un cuerpo rígido de sección transversal circular de radio R y masa M se desplaza sobre un plano inclinado con pendiente θ y coeficiente de fricción cinética μ_c. **a)** Obtén la velocidad del centro de masas. **b)** Encuentra al coeficiente de fricción cinética crítico para que ruede sin resbalar.



Solución. Llamemos x a la dirección del movimiento y supongamos que el objeto baja hacia la derecha en sentido positivo. Si denotamos por z a la dirección perpendicular al plano que contiene a una sección circular del objeto, entonces la velocidad angular está dada por

$$\vec{\omega} = -\frac{d\phi}{dt}\,\hat{k}.$$

La fuerza de fricción cinética se opone al movimiento y por tanto tiene la forma

$$\vec{f_c} = -\mu_c\, N\,\hat{\imath},$$

en donde N es la magnitud de la fuerza normal que ejerce el plano, dada por $N = Mg\,\cos(\theta)$. Entonces, la ecuación del movimiento en la dirección de las x es

$$M\ddot{x}_{c.m.} = Mg(\operatorname{sen}(\theta)\; - \;\mu_c\,\cos(\theta)).$$

Dado que esta aceleración es constante llegamos a que la velocidad del centro de masas es

$$\dot{x}_{c.m.} = (\operatorname{sen}(\theta)\; - \;\mu_c\cos(\theta))\,g\,t,$$

suponiendo que el objeto parte desde el reposo.

Para el inciso **b)** notemos que el movimiento rotacional está regido por la relación

$$\vec{\tau} = \,-\,I_{c.m.}\dot{\omega}\hat{k}.$$

pero la torca que ejerce la fuerza de fricción sobre el cuerpo es

$$\vec{\tau} = \,-\mu_c N\,R\hat{k}.$$

Igualando a las dos últimas relaciones obtenemos que

$$\dot{\omega} = \frac{\mu_c M R}{I_{c.m.}}\,\cos(\theta)\,g,$$

por lo que la velocidad angular será

$$\omega = \frac{\mu_c M R}{I_{c.m.}} \cos(\theta)\, g\, t,$$

suponiendo otra vez que el objeto parte desde el reposo. Así que la velocidad del centro de masas se puede reescribir substituyendo en ella el valor de gt en términos de la velocidad angular como

$$\ddot{x}_{c.m.} = \lambda\, R\, \omega,$$

en donde hemos definido a la constante

$$\lambda = \frac{\mathrm{sen}(\theta) \;-\; \mu_c \cos(\theta)}{\mu_c M R^2 \cos(\theta)}\, I_{c.m.}.$$

Ahora bien, dado que la condición de rodar sin resbalar requiere que $x_{c.m.} = R\omega$ entonces el valor crítico del coeficiente de fricción cinética se obtiene pidiendo que $\lambda = 1$, lo que significa que

$$I_{c.m.}(\mathrm{sen}(\theta) \;-\; \mu_{crit} \cos(\theta)) = \mu_{crit} M R^2 \cos(\theta),$$

y despejando

$$\mu_{crit} = \frac{I_{c.m.}\, \tan(\theta)}{I_{c.m.} + M R^2}.$$

Problema 11. Un cuerpo rígido de sección transversal circular de radio R y masa M rueda sin resbalar cuesta abajo sobre un plano inclinado con pendiente θ. Deduce la velocidad del centro de masas. Ver por favor figura del problema anterior.

Solución. La condición de rodar sin resbalar nos indica que $\dot{x}_{c.m.} = R\omega$. Las ecuaciones del movimiento son

$$\vec{\tau} = -RMg\mathrm{sen}(\theta)\hat{k} = -I_A \alpha \hat{k},$$

en donde I_A es el momento de inercia con respecto al punto de apoyo A y la torca es la ejercida por el peso con respecto al punto de apoyo A. Nótese la diferencia aquí en el tratamiento, equivalente a considerar la torca ejercida por la fuerza de fricción con respecto al centro de masas. Entonces, despejando

$$\alpha = \frac{RMg}{I_A}\mathrm{sen}(\theta), \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{RMg}{I_A}\mathrm{sen}(\theta)\, t.$$

Por la condición de rodar sin resbalar obtenemos

$$\dot{x}_{c.m.} = \frac{MR^2}{I_A}\mathrm{sen}(\theta) g t,$$

en donde por el teorema de los ejes paralelos $I_A = MR^2 + I_{c.m.}$.

Este resultado también puede obtenerse si substituimos el valor crítico μ_{crit} para el coeficiente de fricción cinética encontrado en el problema anterior en la ecuación para la velocidad del centro de masas obtenida al principio de dicho problema. Llegamos a que para un objeto rígido de sección circular que *rueda sin resbalar* cuesta abajo, la velocidad del centro de masas será

$$\dot{x}_{c.m.} = \frac{MR^2}{I_{c.m.} + MR^2}\mathrm{sen}(\theta)\, g\, t, \qquad \text{rodar} \quad \text{sin} \quad \text{resbalar}.$$