

CAPITULO 1

Campo, Potencial y Energía Eléctricos



Dass es nicht dabei bleibt,
gilt auch für die Steine.
Das Gebirge dehnt sich, fließt,
pulsiert, rauscht, reißt,
wenn auch langsam.
Was heißt schon langsam
bei einem Berg?
Energien unter der Erdkruste,
unter der Hirnschale. Siehst du,
wie sich alles bewegt,
vermischt, faltet, dehnt,
auch das, was du nicht siehst?
HANS MAGNUS ENZENSBERGER¹

1.1 Ley de Coulomb

Desde¹ la antigüedad (Tales de Mileto 600 a.n.e.) se sabe de la existencia de fuerzas de atracción y de repulsión que son observadas empíricamente cuando diversos objetos son

¹Notas de curso, en LaTeX por A. Anzaldo Meneses.

frotados. Sin embargo llevó mucho tiempo el poder formular en términos simples el gran número de experiencias acumuladas durante milenios . Se debe a Coulomb (1736-1806) la formulación del campo vectorial de fuerzas conocido como **campo eléctrico** que se encuentra en las cercanías de lo que llamamos una **carga eléctrica** q y que es una cantidad con unidades propias que puede tener signo positivo o negativo. En términos vectoriales los resultados encontrados por Coulomb experimentalmente se escriben como sigue. Decimos que

Ley de Coulomb

la fuerza que una carga q_1 ejerce sobre otra carga q_2 es proporcional al producto de sus cargas, inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias y actúan en la dirección del segmento de recta que las une.

Escribimos vectorialmente

$$\vec{F}_{q_1, q_2} = \frac{K q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}, \quad (1.1)$$

en donde \vec{r}_{12} es el vector que va de la posición de la carga q_1 a la posición de la carga q_2 . La constante K , que también se escribe como $1/4\pi\epsilon_0$, tiene el valor aproximado de $9 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$, en donde C es la unidad física básica de la carga eléctrica y se denomina *Coulomb*. Se encuentran implícitas en la ley de Coulomb, las siguientes dos circunstancias básicas

- **Cargas del mismo signo se repelen**
- **Cargas de signo contrario se atraen**

La determinación de que cargas son positivas y cuales son negativas es una mera convención, y en términos actuales se asume que los electrones tienen carga eléctrica negativa. Se ha observado que todas las cargas observadas son múltiplos enteros de la carga del electrón que es de $-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ y tiene una masa de tal sólo 9.11×10^{-31} kilogramos. El protón, otra importante partícula fundamental tiene la misma carga que el electrón pero positiva y una masa mucho mayor de 1.673×10^{-27} kilogramos. Finalmente otro constituyente fundamental de los núcleos atómicos es el neutrón con carga eléctrica nula y una masa similar a la del protón de 1.675×10^{-27} kilogramos.

1.2 Campo Eléctrico

En el estudio del campo eléctrico en las cercanías de una carga fija q resulta de gran utilidad considerar a una pequeña *carga prueba* q_0 y considerar al cociente

$$\vec{F}_{q q_0} / q_0,$$

que es la fuerza eléctrica por unidad de carga. Definimos como **Campo Electrostático** debido a la carga q en el punto \vec{r} , al cociente

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{qq_0}}{q_0} = \frac{Kq}{r^2} \hat{r}. \quad (1.2)$$

en donde suponemos que la carga q se encuentra en el origen y \vec{r} es el vector de posición en donde se encontraba la carga q_0 . Dado que

$$\vec{E} = \frac{Kq\vec{r}}{r^3} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k},$$

tendremos que las componentes del campo eléctrico en el punto (x, y, z) debido a una carga q localizada ahora en el punto (x_0, y_0, z_0) será

$$E_x = \frac{Kq(x - x_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \quad (1.3)$$

$$E_y = \frac{Kq(y - y_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}, \quad (1.4)$$

$$E_z = \frac{Kq(z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}. \quad (1.5)$$

1.3 Ley de Gauss

Si consideramos a un conjunto de cargas eléctricas con carga total Q localizadas todas en una región del espacio acotada por la superficie **cerrada** lisa S entonces la **Ley de Gauss** nos dice que

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.6)$$

Aquí \vec{E} es el campo eléctrico sobre el elemento diferencial de superficie dA y el vector $d\vec{A}$ está por producto del elemento diferencial de superficie dA y el vector unitario \hat{n} perpendicular al plano tangente a la superficie S en dA , esto es $d\vec{A} = \hat{n} dA$. C.F. Gauss fue un eminente científico alemán (1777-1855) e hizo un gran número de contribuciones a la Física y las Matemáticas.

El **flujo eléctrico** Φ a través de una superficie *abierta* A está definido mediante la integral de superficie

$$\Phi = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}. \quad (1.7)$$

1.4 Trabajo y Potencial Eléctricos

El trabajo efectuado por el campo eléctrico al desplazar a una carga prueba q_0 del punto \vec{r}_A al punto \vec{r}_B en presencia de la carga fija q es

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{qq_0} \cdot d\vec{r}. \quad (1.8)$$

Hagamos esta integral primero para el caso particular en el cual los puntos \vec{r}_A y \vec{r}_B se encuentran sobre una misma línea que pasa por la posición de la carga q , tendremos que

$$W_{AB} = \int_A^B \frac{Kqq_0}{r^2} dr = Kqq_0 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (1.9)$$

Como siguiente caso particular realicemos la integral correspondiente para el caso en el cual la trayectoria Γ es un segmento de círculo de *radio constante* r

$$W_{\Gamma} = \frac{Kqq_0}{r^2} \int_{\Gamma} \hat{r} \cdot d\vec{s}, \quad (1.10)$$

en la cual el elemento diferencial $d\vec{s}$ apunta en dirección tangencial al círculo y es por tanto *perpendicular* en todo momento a \hat{r} , con lo que $\hat{r} \cdot d\vec{s} = 0$ y por tanto la integral se anula, $W_{\Gamma} = 0$.

Ahora bien, dado que podemos aproximar a cualquier trayectoria suficientemente suave por medio de segmentos de círculo y de segmentos radiales como los de la primer integral, entonces deducimos que en general el trabajo realizado para desplazar a la carga prueba q_0 **no depende de la trayectoria** que une a cualesquier dos puntos, por lo que se sigue que el campo de fuerzas eléctricas es un **campo conservativo** y entonces podemos definir a la **Energía Potencial Eléctrica** U por medio de

$$W_{AB} = -\Delta_{AB} U, \quad (1.11)$$

dada por

$$U = \frac{Kqq_0}{r}, \quad (1.12)$$

salvo una constante aditiva arbitraria.

De manera similar a la definición de campo eléctrico, definimos ahora al **Potencial Eléctrico**, como la energía potencial eléctrica por unidad de carga dada por

$$V = \frac{Kq}{r}. \quad (1.13)$$

Sus unidades físicas son los *Volts* en honor a Alessandro Volta (1745-1827). Un Volt es igual a un Joule/Coulomb, simbólicamente $1 V = 1 J/C$.

Una manera simple de obtener al campo eléctrico dado el potencial eléctrico, proviene de identificar

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_x dx + E_y dy + E_z dz, \quad (1.14)$$

la cual implica que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.15)$$

En donde las derivadas son parciales, esto es, se efectúan tomando a las demás variables como constantes. Este resultado puede escribirse como

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V.$$

Por otro lado, integrando la ecuación (1.14) se sigue que

$$\Delta_{AB} V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (1.16)$$

Si por ejemplo la carga eléctrica q se encuentra en el punto (x_0, y_0, z_0) , entonces el potencial eléctrico en el punto (x, y, z) está dado por

$$V(x, y, z) = \frac{Kq}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}},$$

y el campo eléctrico está dado por la ecuación (1.5) y las dos anteriores a ella.

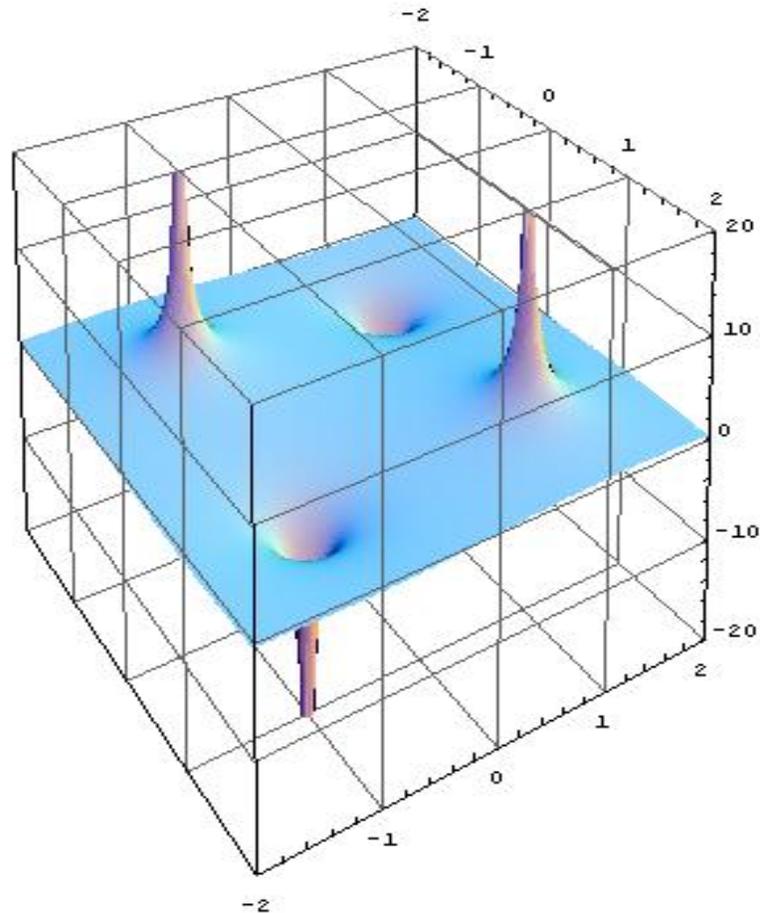
1.5 Ejemplos numéricos

En el ejemplo *numérico* siguiente graficamos en unidades de $K = 1/4\pi\epsilon_0$ al potencial eléctrico (en la dirección vertical) de cuatro cargas eléctricas, dos positivas y dos negativas.

```

Plot3D[1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -
  1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] - 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2],
  {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints → 155, Mesh → False,
  FaceGrids → All, PlotRange → {-20, 20},
  ViewPoint -> {2.823, -1.779, 1.023}, AspectRatio → 1.5];

```

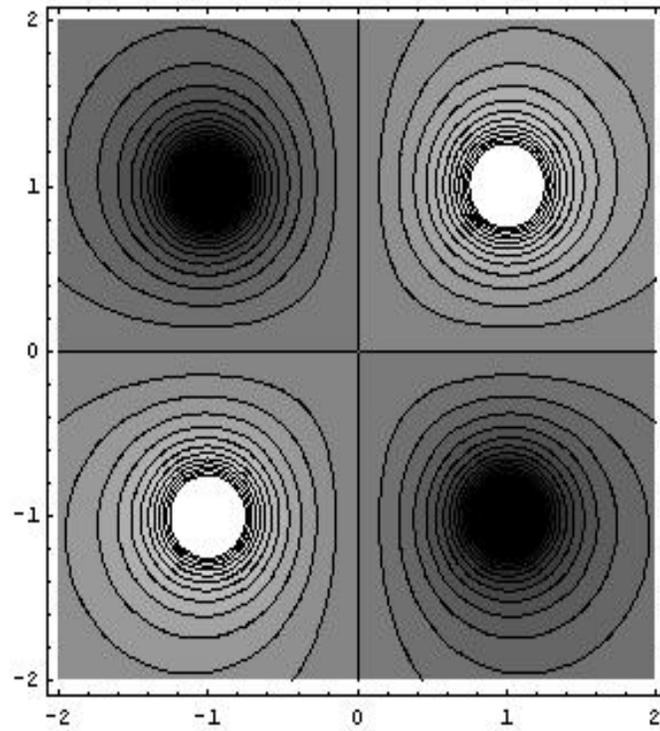


En el siguiente ejemplo mostramos a las líneas equipotenciales, esto es con igual potencial eléctrico, para el mismo arreglo de cargas.

“... Bei uns bleibt es nicht.”

7

```
In[1]:= ContourPlot[1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -  
1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] - 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2],  
{x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 251, Contours -> 25];
```

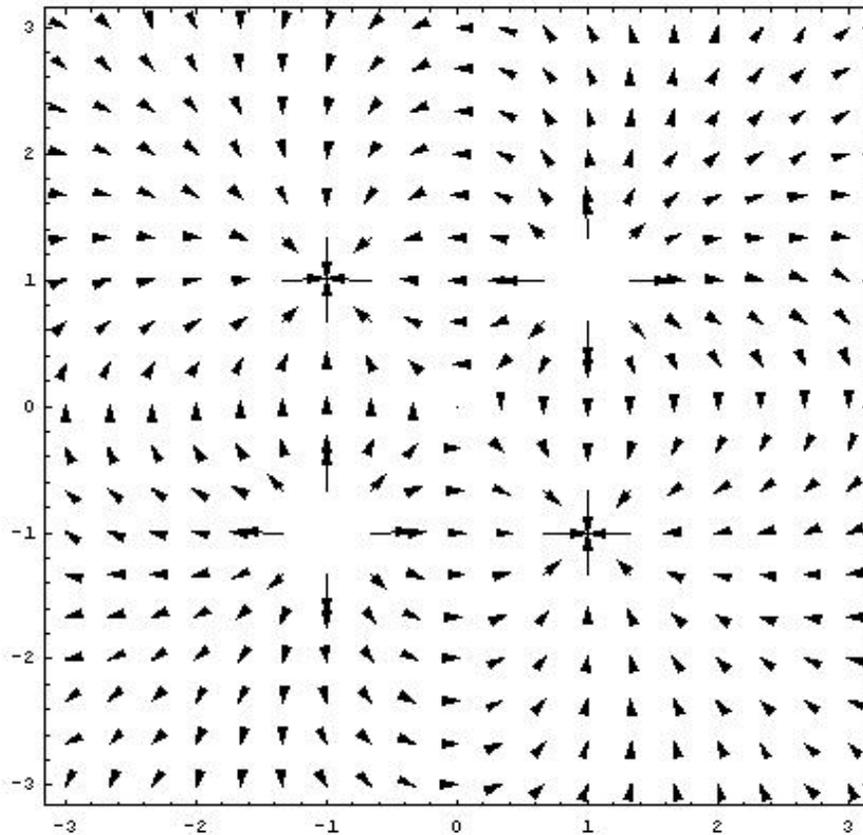


```
<<Graphics`PlotField`
```

```
PlotVectorField[
```

```
{(x - 1) / ((x - 1)^2 + (y - 1)^2) / Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] +
(x + 1) / ((x + 1)^2 + (y + 1)^2) / Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -
(x - 1) / ((x - 1)^2 + (y + 1)^2) / Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] -
(x + 1) / ((x + 1)^2 + (y - 1)^2) / Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2],
(y - 1) / ((x - 1)^2 + (y - 1)^2) / Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] +
(y + 1) / ((x + 1)^2 + (y + 1)^2) / Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -
(y + 1) / ((x - 1)^2 + (y + 1)^2) / Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] -
(y - 1) / ((x + 1)^2 + (y - 1)^2) / Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2]}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
```

```
Frame -> True, PlotPoints -> 19, VectorHeads -> True]
```

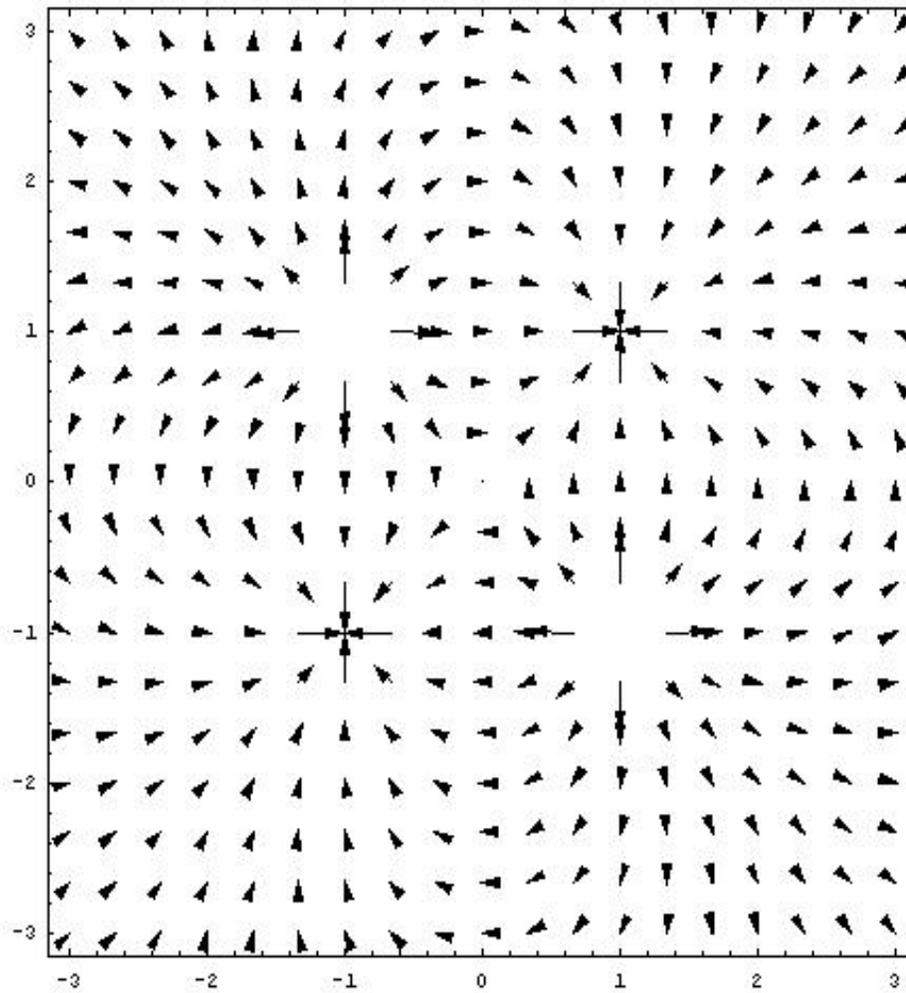


```
- Graphics -
```

“... Bei uns bleibt es nicht.”

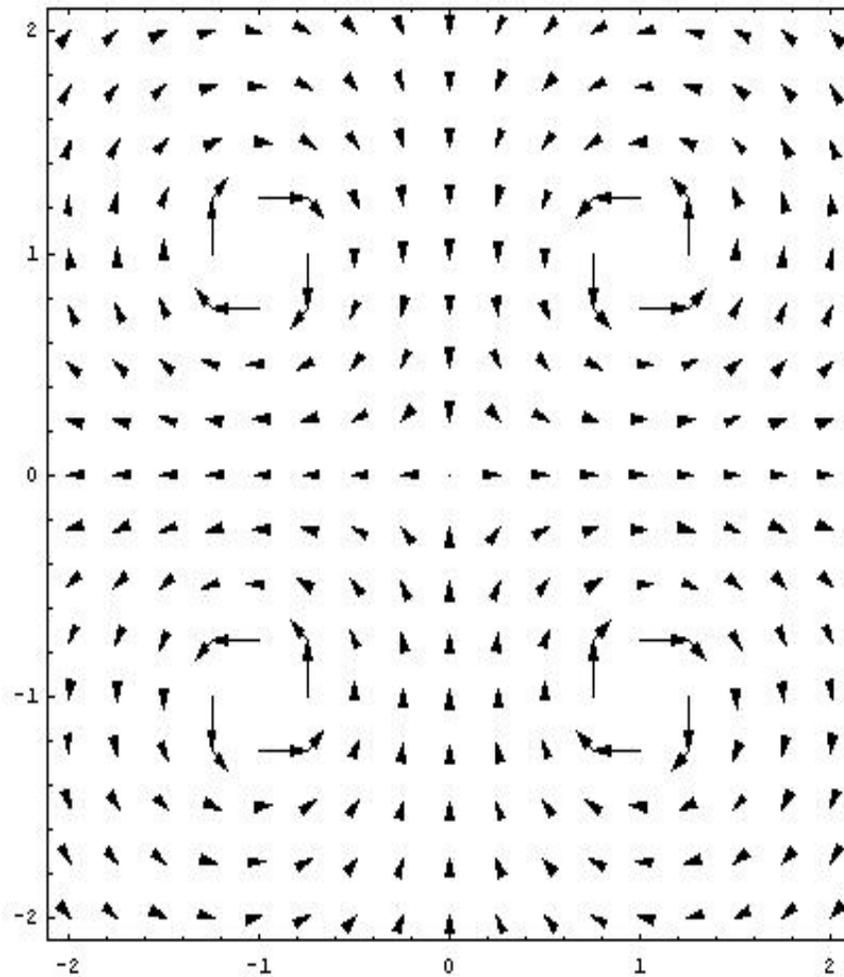
9

```
PlotGradientField[1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -  
  1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] - 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},  
  Frame -> True, PlotPoints -> 19]
```



- Graphics -

```
PlotHamiltonianField[1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y - 1)^2] + 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y + 1)^2] -  
1/Sqrt[(x - 1)^2 + (y + 1)^2] - 1/Sqrt[(x + 1)^2 + (y - 1)^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},  
Frame -> True, PlotPoints -> 17]
```

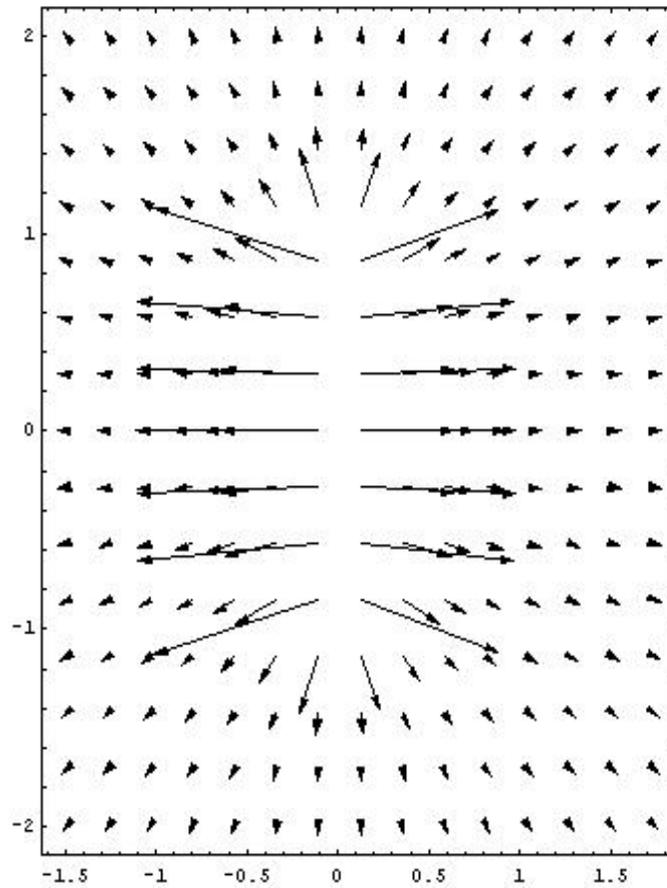


- Graphics -

```
<<Graphics`PlotField`
```

```
<<Graphics`Graphics3D`
```

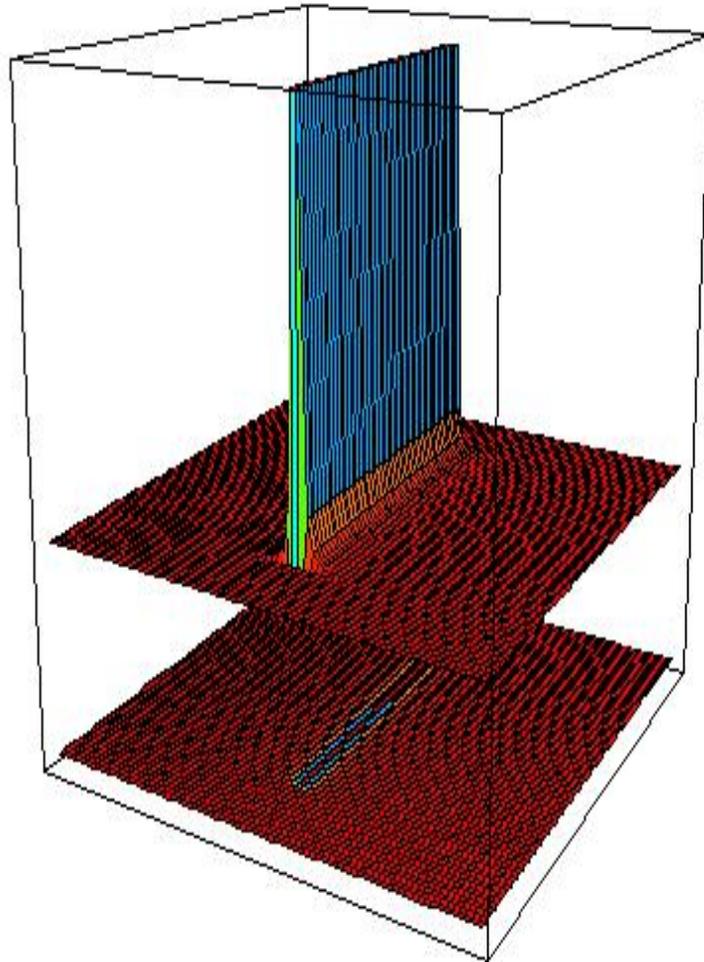
```
PlotVectorField[{{(1 - y) / (x^2 + (1 - y)^2)^(1/2) / x + (1 + y) / (x^2 + (1 + y)^2)^(1/2) / x,  
  -(1) / (x^2 + (1 + y)^2)^(1/2) + (1) / (x^2 + (1 - y)^2)^(1/2)}, {x, -1.5, 1.75},  
  {y, -2., 2.}, Frame -> True, ScaleFactor -> 1]
```



```
- Graphics -
```

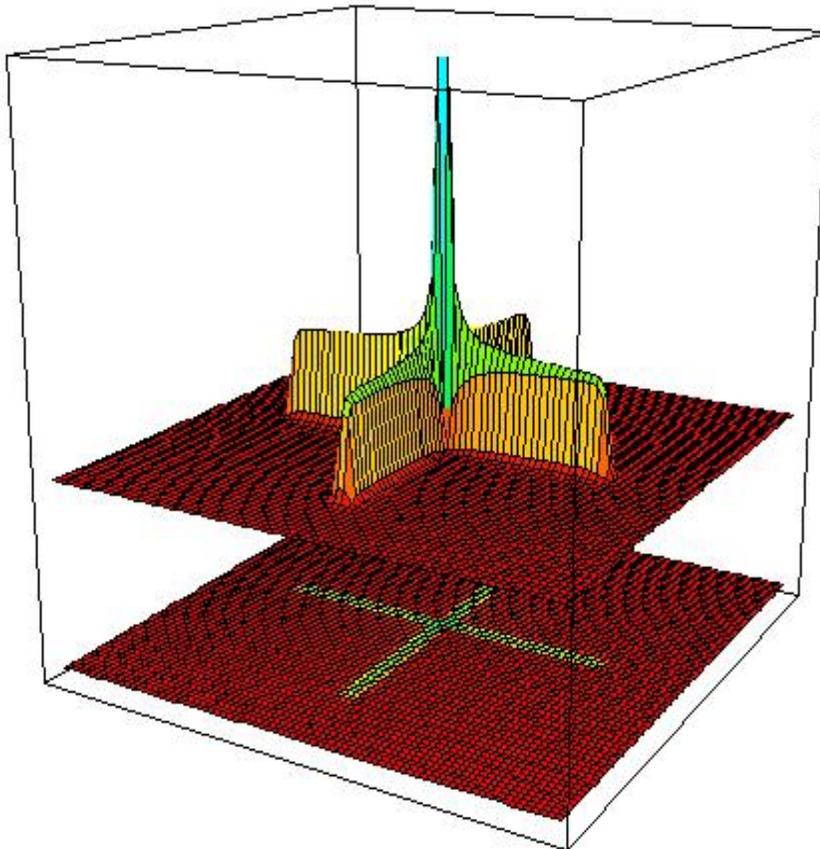
(+The magnitudes of the field (NOT the potential!)+)

```
ShadowPlot3D[(((1-y)/(x^2+(1-y)^2)^(1/2)/x+(1+y)/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)/x)^2+
  ((1)/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)-(1)/(x^2+(1-y)^2)^(1/2))^2,{x,-.15,.15},
  {y,-1.5,1.5},PlotPoints->75,ViewPoint->{1.448,-2.476,0.794}]
```



(+For two orthogonal crossed segments+)

```
ShadowPlot3D[(  
  (1-x)/(y^2+(1-x)^2)^(1/2)/y + (1+x)/(y^2+(1+x)^2)^(1/2)/y +  
  (1-y)/((x)^2+(1-y)^2)^(1/2)/(x) + (1+y)/((x)^2+(1+y)^2)^(1/2)/(x))^2 +  
  (  
    (1)/(y^2+(1+x)^2)^(1/2) - (1)/(y^2+(1-x)^2)^(1/2) +  
    (1)/((x)^2+(1+y)^2)^(1/2) - (1)/((x)^2+(1-y)^2)^(1/2))^2,  
  {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, PlotPoints -> 75, ViewPoint -> {1.448, -2.476, 0.794}]
```



```

(*For two parallel segments*)
PlotVectorField[{{
  (1-y)/(x^2+(1-y)^2)^(1/2)/x+ (1+y)/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)/x +
  (1-y)/((x-1)^2+(1-y)^2)^(1/2)/(x-1)+
  (1+y)/((x-1)^2+(1+y)^2)^(1/2)/(x-1)},
  -(
  (1/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)- (1/(x^2+(1-y)^2)^(1/2)+
  (1/((x-1)^2+(1+y)^2)^(1/2)- (1/((x-1)^2+(1-y)^2)^(1/2)})),
  {x, -.8, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, PlotPoints -> 25, Frame -> True, ScaleFactor -> 0.75]
ShadowPlot3D[({
  (1-y)/(x^2+(1-y)^2)^(1/2)/x+ (1+y)/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)/x +
  (1-y)/((x-1)^2+(1-y)^2)^(1/2)/(x-1)+
  (1+y)/((x-1)^2+(1+y)^2)^(1/2)/(x-1))^2 +
  (
  (1/(x^2+(1+y)^2)^(1/2)- (1/(x^2+(1-y)^2)^(1/2)+
  (1/((x-1)^2+(1+y)^2)^(1/2)- (1/((x-1)^2+(1-y)^2)^(1/2)))^2,
  {x, -.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, PlotPoints -> 45, ViewPoint -> {1.448, -2.476, 0.794}]

```

