

CINO CHIESA

PERSPECTIVA

Elementos racionais para o uso prático

Tradução de:
CARLOS A. LAUAND
Eng° Civil e Eletricista

Transcrição para Internet:
ADRESON VILSON VITA SÁⁱ
Inverno de 2001

Editora HEMUS

ÍNDICE

<i>Parágrafos</i>	<i>Páginas</i>
Obras consultadas	
Comentário histórico	
1-4. Definições	
5. Imagem perspectiva do ponto	
6-8. Imagem perspectiva da reta	
9-12. Primeiro método de construção da perspectiva	
13-20. Segundo método de construção da perspectiva	
21-23. Imagem perspectiva de retas inclinadas	
24-31. Imagem perspectiva do plano	
32-33. Perspectiva central	
34-44. Construção das sombras em perspectiva	
45-46. Imagens refletidas em perspectiva	
47-52. Mudanças do sistema de projeção.	
53-54. Perspectiva de um plano inclinado	
55-59. Método para obter as dimensões de um objeto por sua perspectiva	
70-71. Projeções centrais da esfera	
72-83. Métodos auxiliares para a construção da perspectiva	

HISTÓRICO

Nas obras de Vitruvio, foi feito comentário sobre os conhecimentos que os gregos possuíam no campo da perspectiva. Ele fala de cenografias pintadas com grande bravura, tais a dar a impressão perfeita da realidade.

São conhecidas de todos as pinturas murais de Pompéia, que estão a demonstrar como também os romanos conheciam já as leis da perspectiva. Não se sabe se aqueles cenários e estas pinturas foram desenhadas com base em regras fixas (vale dizer se os antigos possuíam uma teoria, mesmo que rudimentar, da perspectiva), ou se unicamente a intuição das leis naturais os tenha guiado, de modo exclusivamente empírico, à elaboração; aqui nós encontramos, de qualquer modo, um conhecimento das leis ópticas (horizonte perspectivo, convergência de linhas paralelas, perspectiva aérea, etc.).

Durante o longo obscuro período da Idade Média, verifica-se da perspectiva, como de tantas outras noções, que foram esquecidas e que deveriam então ser estudadas, reconquistadas ao patrimônio cultural. As manifestações de pintura e escultura, se estão demonstrando uma profunda sensibilidade artística nos homens da Idade Média, demonstram também que estes não possuíam senão ingênuas e rudimentares capacidades representativas. Em suas obras, as leis da perspectiva são, ou completamente inobservadas, ou reduzidas a paupérrima expressão; devia-se ter observado na natureza o fenômeno da perspectiva, mas era-se incapaz de disciplinar sua reprodução gráfica.

No fim dos primórdios do renascimento cultural e artístico, em um fervor geral de estudos, os pintores demonstraram maior interesse também por uma exata reprodução, em suas obras, do fenômeno da perspectiva. Através de uma mais cuidadosa e sábia observação da natureza, muitos deles intuíram a constância do fenômeno, e se esforçaram por determinar as leis que o disciplinaram.

Paolo Uccello, Brunelleschi, Masaccio, Pier della Francesca, se dedicaram com paixão ao estudo da perspectiva; Pier della Francesca foi o primeiro a compreender a lei fundamental da perspectiva, limitando-se, porém, a enunciá-la e a aplicá-la de uma maneira puramente mecânica. Ele intuiu que desenhar a perspectiva de um objeto quer dizer reproduzir graficamente aquela imagem que, por fenômeno fisiológico, se forma na retina do olho, e que se pode chegar a este resultado interpondo, entre o olho e o objeto, um plano transparente; as interseções no plano transparente dos raios ópticos correspondentes aos pontos isolados do

objeto, determinam a imagem procurada.

Todos os escritores do Renascimento que se ocuparam da pintura e a Arquitetura, trataram da perspectiva: assim, L. B. Alberti, Leonardo, Vignola, Palladio, Serlio; eles imaginaram diversos métodos práticos de representação em perspectiva.

Somente com a formação dos conhecimentos relativos à geometria descritiva e projetiva, chegou-se a dar uma base científica à perspectiva. Através dos mais vastos e mais profundos conhecimentos, o desenho perspectivo é completado e simplificado em seus métodos práticos.

DEFINIÇÕES

1. Quem se dedica ao estudo da perspectiva deve conhecer as leis e os métodos fundamentais da geometria elementar e da geometria descritiva.

Esta última ensina como se resolvem graficamente em um plano os problemas da geometria do espaço (estereometria). Isso se dá por meio de projeções; isto é, fazendo passar pelos pontos isolados do objeto, ou dos objetos que se quer representar, retas ou raios de projeção, e determinando interseções destas com um plano, chamado plano de projeção ou quadro: o conjunto destes pontos e das linhas que os unem constitui a imagem procurada.

Segundo o método das projeções paralelas, os raios projetantes são paralelos entre si, isto é, eles têm em comum um ponto situado no infinito. Segundo o método das projeções centrais, ao invés, os raios de projeção passam por um ponto situado a distância finita, chamado centro de projeção.

2. O conjunto daqueles entre os raios luminosos refletidos por um objeto que impressionam a retina do nosso olho, forma um cone, chamado cone dos raios ópticos, ou simplesmente cone óptico. Visto que nosso olho percebe perspectivamente os objetos que o circundam, *construir a imagem perspectiva de um objeto, quer dizer construir uma figura geometricamente semelhante àquela que o objeto imprime em nossa retina*: isto se obtém cortando o cone óptico por um plano paralelo ao plano da retina (suposta esta não mais curva, mas plana). A operação se reduz, portanto, a projetar, de um ponto (olho), os simples pontos de um objeto em um plano (quadro), que se supõe colocado entre este e aquele.

Não se trata, de fato, de nada mais que uma projeção central, na qual são centro de projeção o olho, raios projetantes os raios ópticos e plano de projeção o quadro.

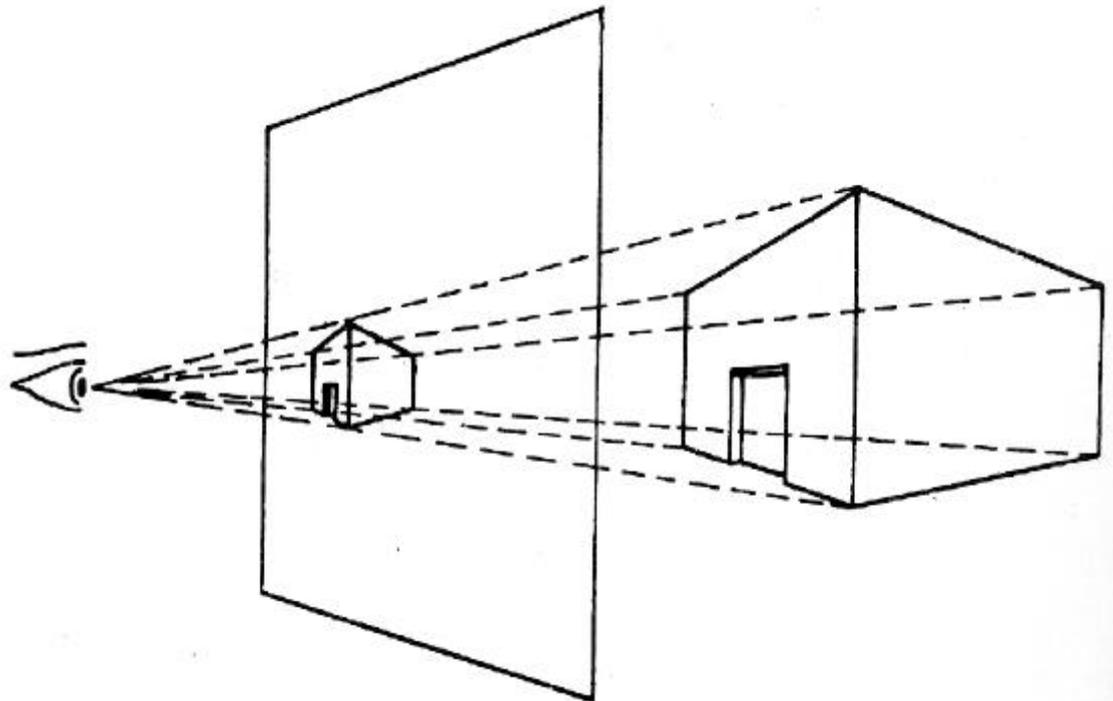


Fig. 1.

Fig. 1

3. Continuando na observação de como se forma em nosso olho a imagem perspectiva de um objeto, de cuja variação de diversos fatores depende uma variação desta imagem, chega-se a estabelecer algumas, entre as leis fundamentais da perspectiva.

O olho abraça com um único olhar um campo visual limitado (circular); o cone dos raios ópticos tem por eixo o raio dirigido para o centro do círculo de base; duas geratrizes opostas do cone contêm um ângulo de aproximadamente 50° .

Um plano horizontal situado à altura do olho se confunde em uma linha horizontal; conseqüentemente, todas as linhas horizontais situadas à altura do olho se confundem na mesma linha horizontal.

Os planos horizontais mais altos ou mais baixos do olho parecem também ter todos em comum a mesma linha horizontal da qual se falou inicialmente; retas horizontais paralelas parecem, por sua vez, convergir para pontos desta linha.

Retas paralelas, mas não horizontais, parecem convergir em pontos situados mais alto ou mais baixo que o olho.

As imagens de objetos de dimensões iguais (por exemplo, figuras humanas) diminuem

de dimensão com o aumentar da distância dos mesmos do olho.

4. Destas observações derivam diretamente as definições de alguns elementos essenciais da perspectiva.

Plano do quadro: o plano no qual se deseja construir a imagem perspectiva do objeto que se considera. Deste plano se considera somente a parte correspondente ao campo visual (às nossas capacidades visuais). *Nas construções perspectivas comuns, o plano do quadro é suposto vertical.*

Plano de terra: o plano horizontal no qual se imagina a projeção horizontal do objeto (ou no qual o objeto se apóia).

Linha de terra: a interseção do plano de terra com o quadro.

Plano do horizonte: o plano horizontal passante pelo olho. Ele se encontra a uma altura no plano de terra que pode ser escolhida livremente em relação ao efeito perspectivo que se quer obter. Esta altura é, geralmente, de aproximadamente 1,50 m, ou seja, a altura do olho humano ao solo. Será maior se se quiser ver o objeto de cima; menor quando se queira vê-lo de baixo.

Linha do horizonte: a interseção do plano do horizonte com o quadro. Ela é paralela à linha de terra e distante dela a mesma quantidade que dista do plano de terra o plano do horizonte.

Raio óptico principal. o raio óptico perpendicular ao quadro. Ele se encontra no plano do horizonte.

Já se disse que nosso olho abraça, com um único olhar, um campo visual limitado, e que o conjunto dos raios ópticos formam um cone. Para que a perspectiva tenha um aspecto agradável ao olho (não apresente aberrações), é preciso que, na sua construção, se suponha que o olho se encontre em uma posição, em relação ao objeto, correspondente às nossas reais faculdades visuais, e tal favorecerá uma boa visão do objeto, O raio óptico principal deverá ser dirigido aproximadamente para o centro do objeto, ou, quando se apresentam vários, para o centro do grupo de objetos, ou para o objeto que mais nos interessa representar.

Esta interseção resulta (Fig. 2) das interseções das projeções horizontal e vertical do raio óptico com os traços que o quadro forma nos dois planos de projeção; duas retas passando pelos pontos assim obtidos, e perpendiculares aos correspondentes traços do quadro, determinam, em seu ponto de encontro, a imagem perspectiva procurada.

Na Fig.3, o método acima exposto é aplicado para a construção da perspectiva de um cubo.

A projeção vertical do cubo é imaginada rebatida no plano horizontal para poder determinar os pontos de encontro das projeções verticais dos raios ópticos com o traço vertical do quadro.

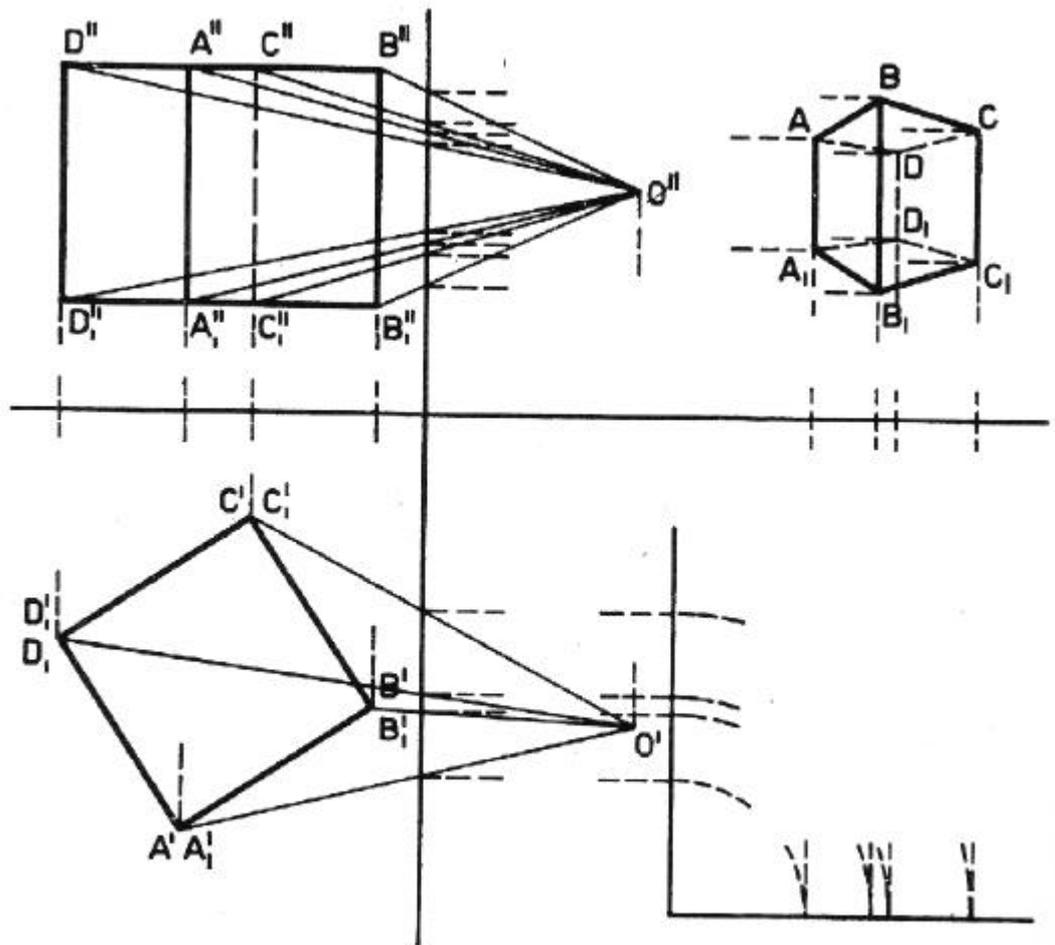


Fig. 3.

Colocados a seguir os planos de projeção em posição de perpendicularidade recíproca (fazendo executar a projeção horizontal uma rotação de um quarto de círculo), os pontos da

perspectiva do cubo são determinados no modo indicado pela figura.

IMAGEM PERSPECTIVA DA RETA

6. *Ponto de fuga.* Já observamos que retas paralelas parecem concorrer em um ponto, e também que objetos de dimensões iguais parecem se tomar sempre menores com o aumento de sua distância do olho.

Esta última observação encontra sua representação na figura seguinte.

A perspectiva de um ponto é dada pela interseção do raio óptico a ele correspondente com o quadro: da Fig.4, resulta claramente que a imagem perspectiva dos segmentos AA , BB , CC , DD ...

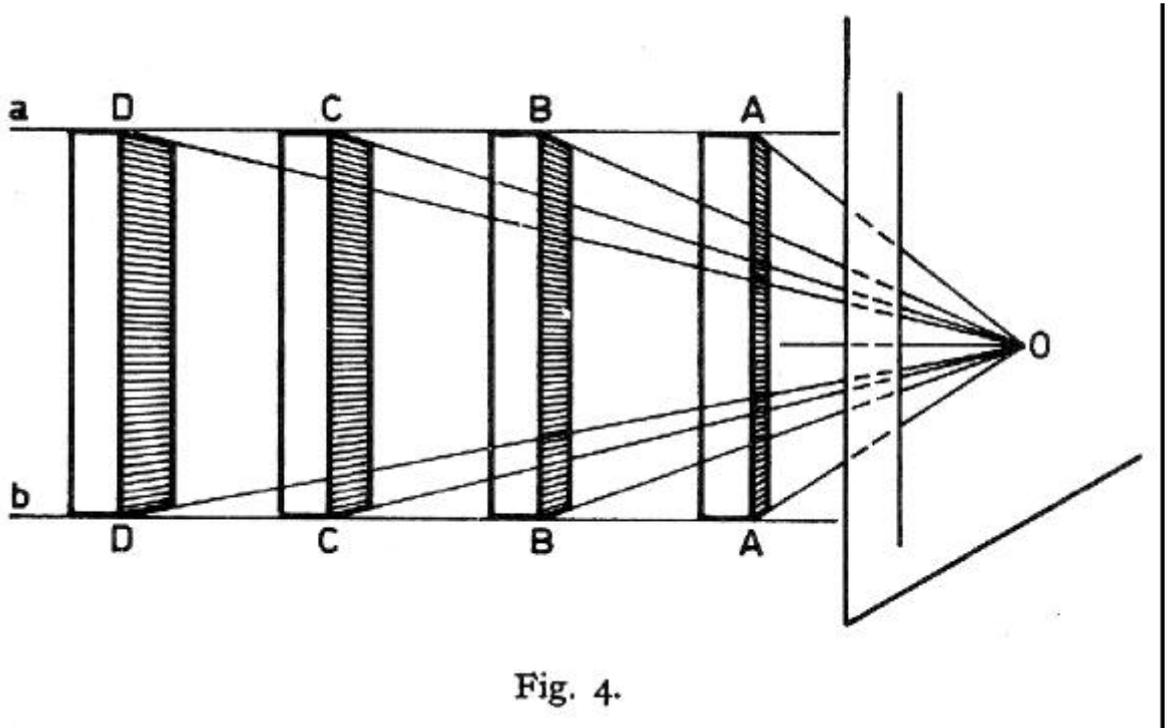


Fig. 4.

compreendidos entre as retas paralelas a e b , e portanto de igual comprimento, toma sempre menor com o aumentar da distância dos segmentos ao olho, até reduzir-se a um ponto. Esta imagem-limite é a perspectiva dos pontos no infinito das retas a , b , isto é, de seu ponto de encontro: é o seu ponto de fuga.

Tem-se, então, que o ponto de fuga de uma reta é a imagem perspectiva do ponto no infinito da mesma reta, e é dado pela interseção com o quadro do raio óptico passando por este ponto, ou seja, paralelo à reta (Fig. 5).

Uma reta é determinada quando se conhecem dois de seus pontos, ou um ponto e a direção (isto é, o ponto no infinito na mesma reta); isso vale, naturalmente, também em perspectiva: a perspectiva

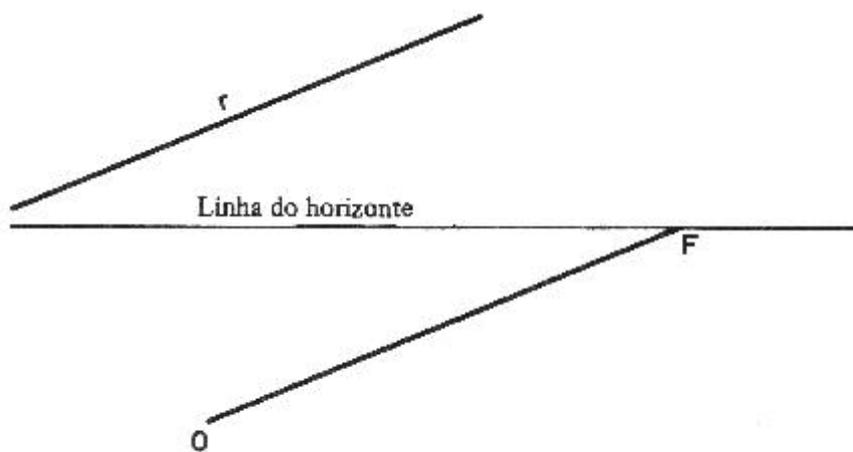


Fig. 5.

de uma reta é determinada quando se conhece um ponto seu qualquer e o ponto de fuga (isto é, a imagem perspectiva do ponto no infinito na mesma reta). Lembremo-nos também que a projeção (ortogonal ou central) de uma reta em um plano ou quadro, passa sempre pelo traço da mesma, isto é, pelo ponto de interseção da reta com o plano.

7. Retas paralelas têm o mesmo ponto de fuga.

Retas horizontais genéricas têm o seu ponto de fuga na linha do horizonte.

Retas horizontais paralelas ao quadro não têm ponto de fuga, porque o raio óptico a ele paralelo encontra o quadro somente no infinito: elas ficam, na perspectiva, paralelas à linha do horizonte.

Retas perpendiculares ao quadro têm seu ponto de fuga no ponto de vista, que é a

interseção com o quadro do raio óptico a ele perpendicular.

Retas verticais ficam também verticais em perspectiva, visto que se supõe o plano do horizonte horizontalmente e o quadro vertical.

Retas horizontais formando um ângulo de 45° com o quadro têm seu ponto de fuga no chamado *ponto de distância*: ele dista do ponto de vista a mesma distância do olho (Fig. 6).

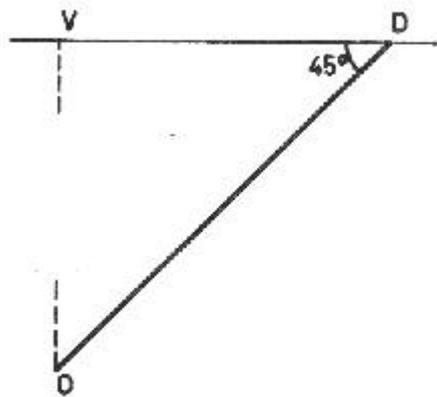
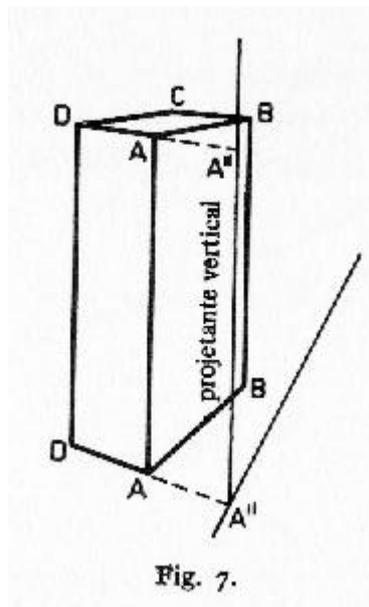


Fig. 6.

8. Retas que se encontram no plano do quadro ficam inalteradas em perspectiva (a imagem perspectiva coincide com a mesma reta). Se se fizer passar um plano por uma aresta do objeto que se quer representar, e se determinarmos seu traço no quadro, é possível medir neste traço um comprimento dado (em verdadeira grandeza ou em uma relação com ela) para representar a seguir esta medida em perspectiva. Este processo é bastante vantajoso para representar medidas dadas em arestas verticais do objeto; ou mesmo, quando esta posição do quadro resulte impossível ou não conveniente, fazer passar um plano vertical pela aresta considerada e determinar o traço no quadro. Este traço é chamado *projetante vertical* (Fig. 7).

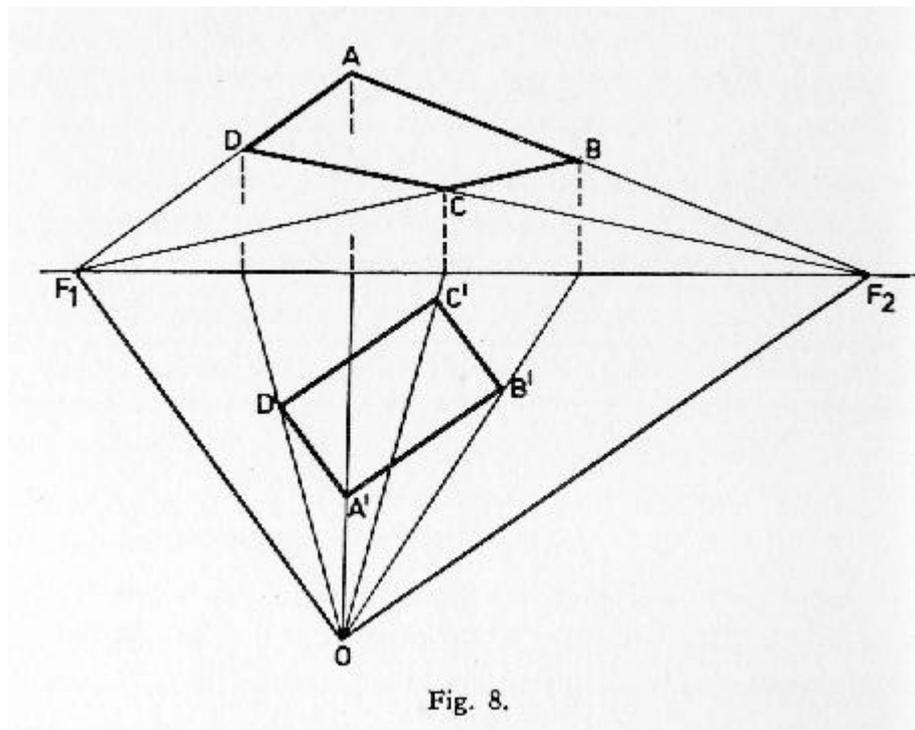


PRIMEIRO MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DA PERSPECTIVA

9. As definições precedentes representam o fundamento de um primeiro método geral de construção da perspectiva.

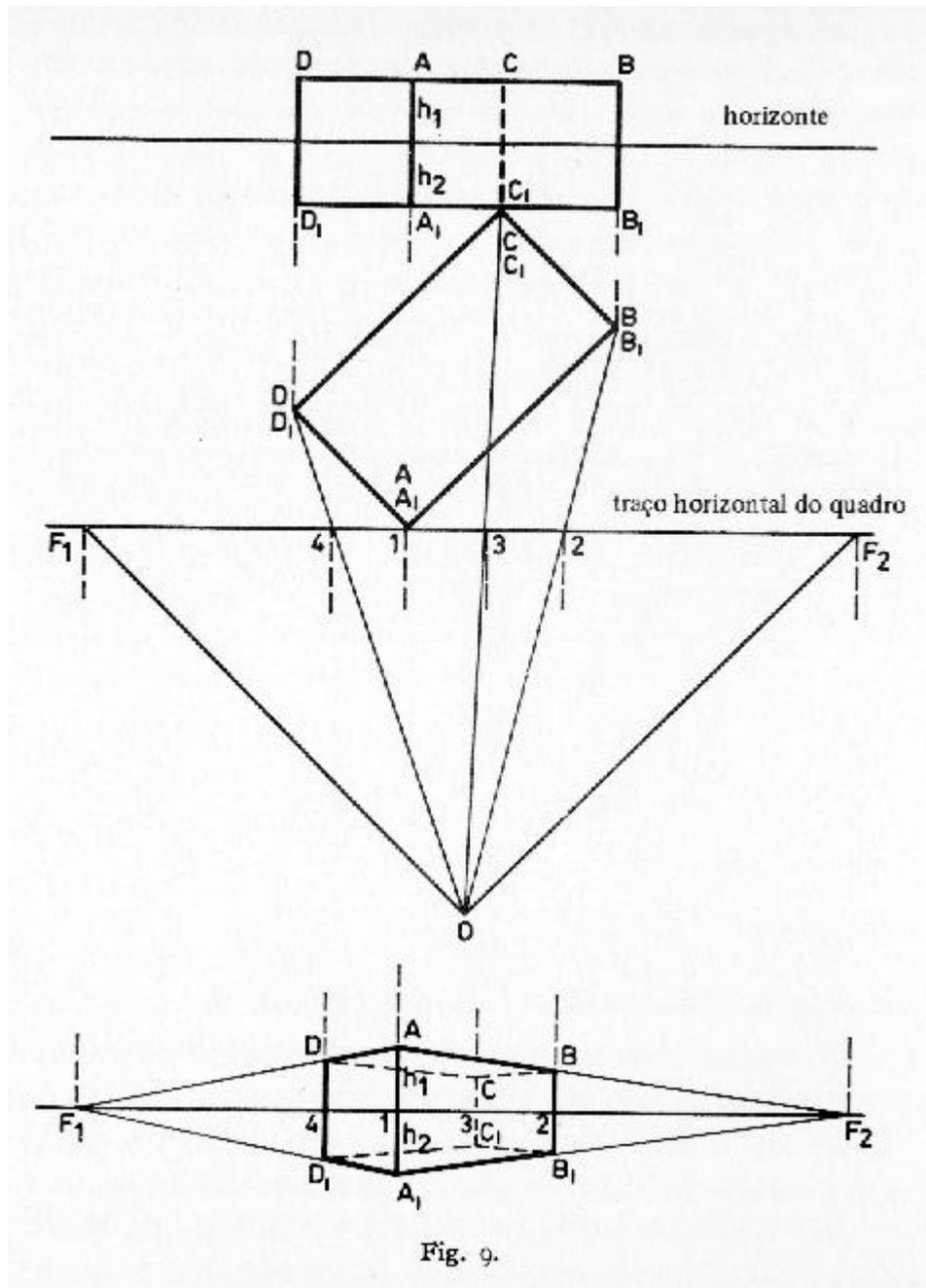
Seja construir a perspectiva de um paralelepípedo retângulo apoiado com uma face no plano de terra.

Desenam-se, em uma figura preparatória, as projeções horizontal e vertical do paralelepípedo, para poder determinar a projeção em



relação a ele do olho do quadro e do horizonte (Fig. 9).

Na projeção vertical, a linha do horizonte é marcada a uma distância da linha de terra igual à altura de olho no plano de vista (esta altura é fixada livremente, em relação ao efeito perspectiva que se quer obter). O traço horizontal do quadro, que se supõe vertical e portanto paralelo às arestas verticais do paralelepípedo, passa pelo vértice A da projeção horizontal (isto é, o quadro passa pela aresta A_1A que tem a função de projetante vertical), O olho é fixado também na projeção horizontal, de modo que o raio óptico principal passe aproximadamente pelo centro da figura, e que os raios ópticos relativos aos vértices extremos compreendem um ângulo de cerca de 50° .



As paralelas do olho aos lados da projeção horizontal do paralelepípedo, cortando o traço do quadro, determinam a projeção horizontal dos pontos de fuga F_1 e F_2 das retas contendo os mesmos lados e de todas as retas do espaço respectivamente a eles paralelas.

Os raios ópticos passando pelos pontos A_1, B_1, C_1, D_1 cortam o traço horizontal do quadro nos pontos $1, 2, 3, 4$, que são as projeções horizontais das perspectivas das arestas verticais AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .

Feitas estas operações preliminares, procede-se à construção da perspectiva propriamente dita. Enquanto a primeira figura preparatória representa as duas projeções horizontais rebatidas em um mesmo plano, a segunda figura representa os elementos da projeção central (perspectiva) no plano do quadro.

Desenhadas a linha de terra e a linha de horizonte, marcam-se nesta última as posições respectivas do ponto de vista V , dos pontos de fuga F_1 , F_2 , da projetante vertical em I , e dos pontos 2 , 3 , 4 , como eles resultam da figura preparatória.

Na projetante vertical marca-se a aresta do paralelepípedo nela contido, em verdadeira grandeza, ou na relação com ela precedentemente fixada, e na posição em relação à linha do horizonte, que resulta da figura preparatória.

As retas que ligam as extremidades da aresta vertical assim obtida com os pontos de fuga F_1 e F_2 , junto com as verticais passando pelos pontos 2 e 4 , determinam as duas faces verticais do paralelepípedo. Do mesmo modo obtém-se a perspectiva da aresta CC_1 , escondida de nossa vista.

10. Quando for possível fazê-lo, é vantajoso reunir a figura preparatória e a construção da perspectiva em um único desenho, indicado na figura 10.

O método de construção indicado no caso precedente é o fundamento de cada operação da perspectiva. Dele derivam outros numerosos métodos particulares de construção, muito úteis em casos especiais, e que serão expostos através de alguns exemplos.

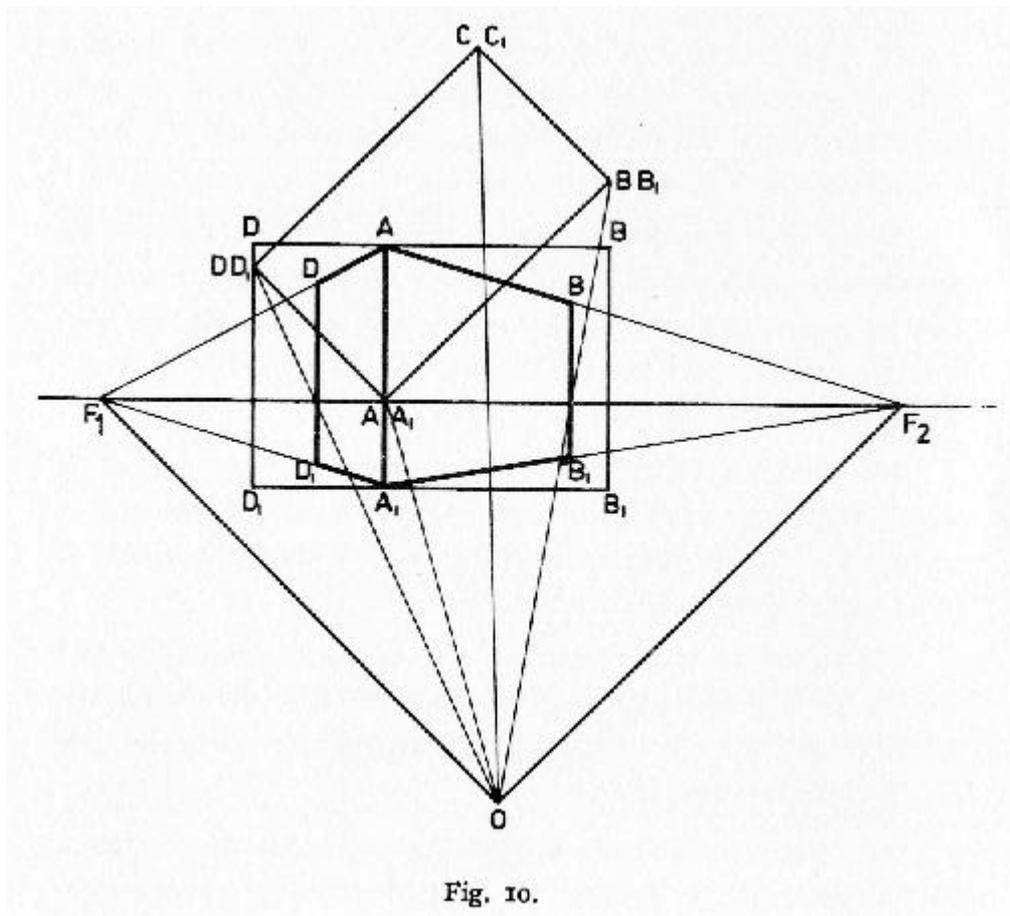


Fig. 10.

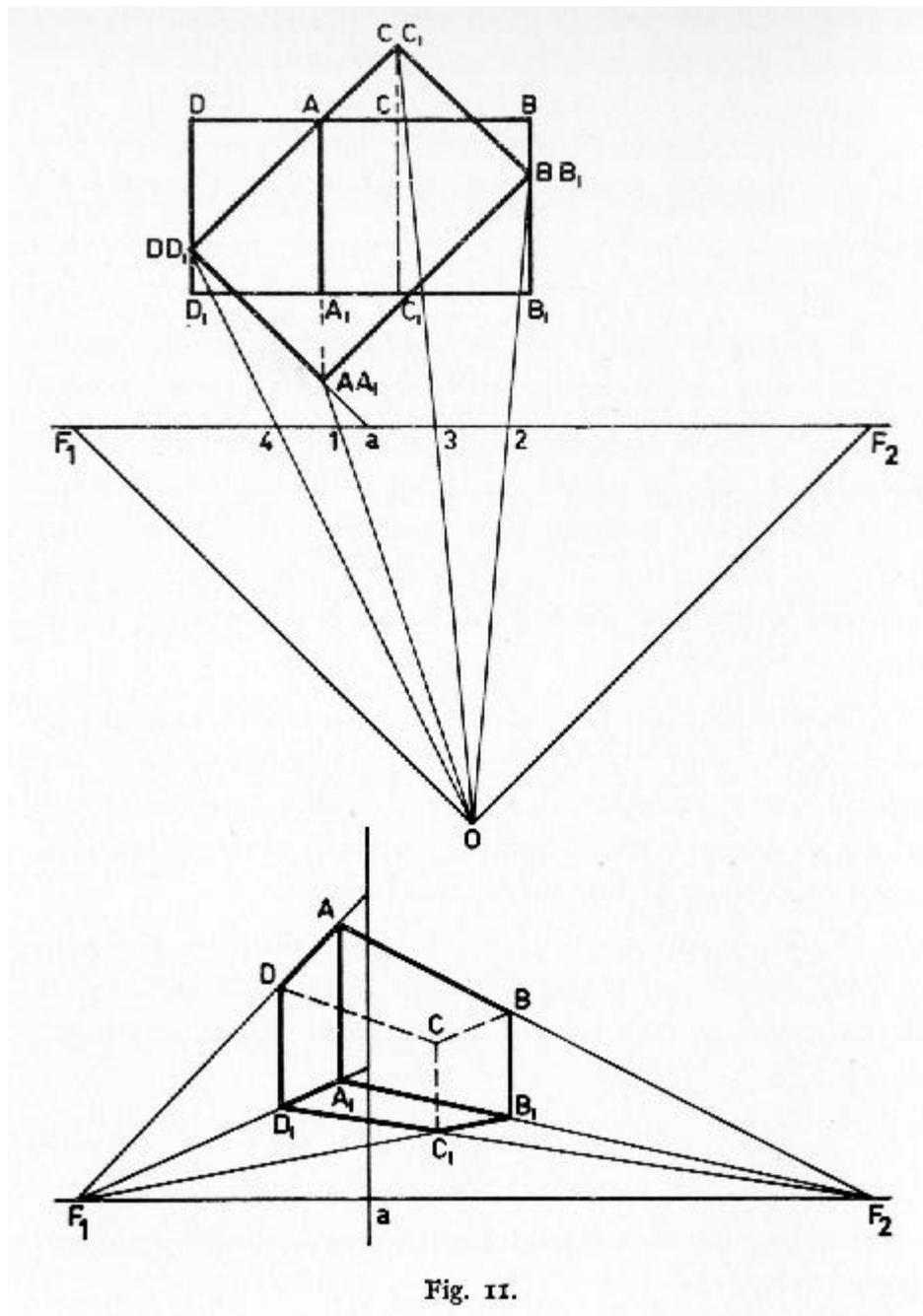
11. Seja construir a perspectiva do mesmo paralelepípedo anteriormente considerado, supondo porém que o quadro não passa por uma aresta vertical do mesmo (Fig. 11).

O problema novo consiste na procura de uma linha do quadro na qual marcar, em verdadeira grandeza, as alturas no plano de terra.

Isso se obtém prolongando o plano de uma das faces verticais do paralelepípedo (por exemplo, da face DD_1-AA_1) até encontrar o quadro. O traço horizontal deste plano corta o traço horizontal do quadro em um ponto a , que é por sua vez a projeção horizontal de uma reta vertical jacente no plano do quadro, e que serve de projetante vertical.

O ponto a é marcado no horizonte da perspectiva, a uma distância do ponto de vista que resulta da figura preparatória. Na vertical passando por a , a altura de A no plano de terra e a altura do paralelepípedo aparecem em verdadeira grandeza. A construção procede, pois, do mesmo modo indicado no caso precedente.

O mesmo resultado ter-se-ia obtido, naturalmente, se ao invés de prolongar o plano da face DD_1-AA_1 , fosse prolongado o plano de uma outra das faces verticais do paralelepípedo, até encontrar o quadro.



12. Seja construir a perspectiva de uma pirâmide reta de base quadrada (Fig. 12).

Executadas as operações preparatórias, como nos casos precedentes, começa-se a construir a perspectiva do quadrado de base da pirâmide. A projeção da base em relação ao plano do quadro e ao plano do horizonte é determinada pelo prolongamento de um seu lado, por exemplo, do lado DC , até encontrar o quadro: a projetante vertical passante pelo ponto a assim obtido, permite construir a perspectiva da base, da maneira já conhecida. A imagem

perspectiva do vértice E da pirâmide encontrar-se-á verticalmente acima do ponto de encontro E_1 das diagonais da base. Trata-se então de determinar um sistema de planos, por meio do qual seja possível conduzir na vertical em E_1 a altura da pirâmide. É oportuno, para isso, servir-se das medianas do quadrado da base: elas são paralelas aos lados, e são conhecidos, portanto, seus pontos de fuga.

A altura h da pirâmide, marcada na vertical em a , é projetada de F_1 na vertical passando pelo ponto médio do segmento DC : o ponto assim obtido é, por sua vez, projetado por F_2 na vertical em E_1 , determinando a imagem E do vértice da pirâmide.

O mesmo resultado se obtém mais simplesmente fazendo passar pelo eixo $E_1 E$ da pirâmide, o plano paralelo a um ou ao outro lado da base, e determinando seu traço no quadro: obtém-se assim uma segunda projetante vertical em b , que permite determinar diretamente a imagem do vértice da pirâmide.

Ou então, pode-se conduzir o plano vertical por uma das diagonais do quadrado da base, para determinar depois seu traço no quadro (projetante vertical) e o ponto de fuga das retas horizontais jacentes no mesmo plano.

É, porém, sempre vantajoso, para não complicar excessivamente a figura, servir-se dos pontos de fuga e das projetantes verticais já conhecidas; ou seja, seguir o método indicado na figura 12, e que se reduz a determinar a perspectiva de um prisma reto tendo a mesma base e a mesma altura da pirâmide.

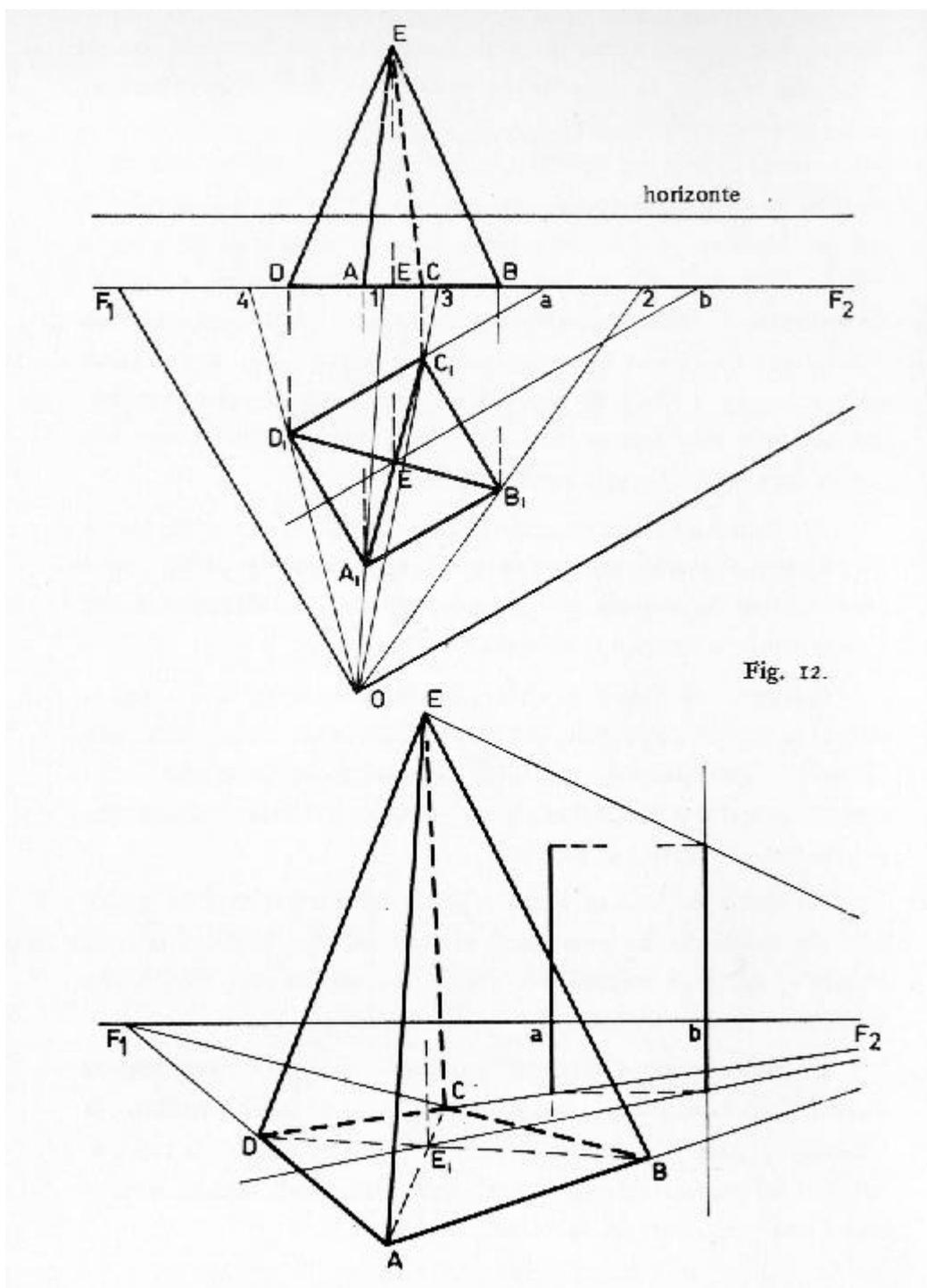


Fig. 12.

SEGUNDO MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DA PERSPECTIVA

13. Não é sempre oportuno, e às vezes é também praticamente impossível, executar, na figura preparatória, todas as operações necessárias para a construção da perspectiva de um objeto.

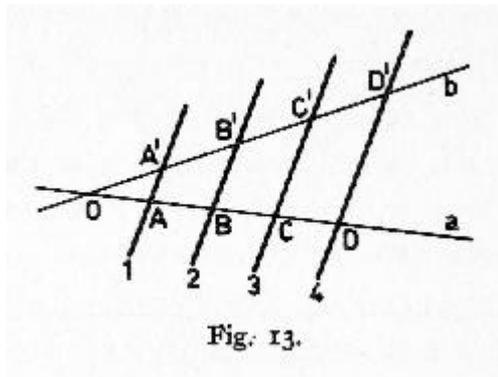
Quando se trata de um objeto cuja projeção horizontal tenha dimensões relevantes, ou seja, excessivamente complicada, é difícil determinar claramente as interseções dos raios ópticos correspondentes aos simples pontos dela com o traço do quadro.

Nesse caso, servimo-nos de retas auxiliares paralelas e horizontais, por meio das quais podemos marcar na imagem perspectiva aquelas medidas e as proporções que forem necessárias para completar a construção; estes elementos, indicados no plano do quadro em verdadeira grandeza ou em uma relação conhecida com ela, são marcados na perspectiva por um processo análogo ao que, por meio da projetante vertical, permite determinar na perspectiva as alturas indicadas em verdadeira grandeza no plano do quadro.

Os pontos de fuga destas retas auxiliares se encontram no ponto de interseção do raio óptico a ele paralelo, com o plano do quadro; sendo estes horizontais, seus pontos de fuga vão se encontrar na linha do horizonte; são chamados *pontos medidores*.

O método de construção da perspectiva que se serve dos pontos medidores se baseia no conhecido teorema da geometria plana, chamado *Teorema das proporcionais*, segundo o qual retas paralelas de um plano cortam, em duas retas quaisquer do mesmo plano, segmentos proporcionais.

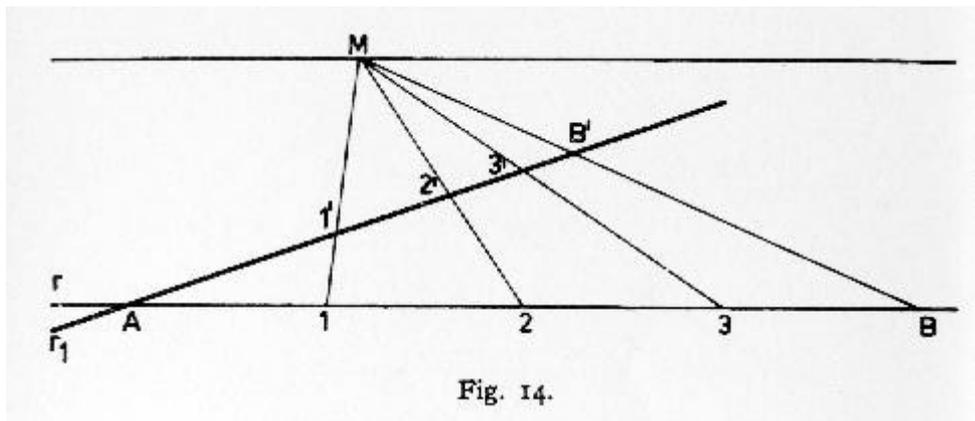
Os segmentos OA, AB, BC, CD, \dots (Fig. 13) da reta estão em uma determinada relação entre si (por exemplo, iguais); as retas paralelas 1, 2, 3, 4, ... passando pelos pontos A, B, C, D, \dots e fazendo parte do plano das retas a, b , cortam a reta b nos pontos A', C', B', D', \dots ; os segmentos assim obtidos, $OA', A'B', B'C', C'D', \dots$ estão entre



si na mesma relação dos segmentos primitivos (por exemplo, de igualdade).

Este princípio pode ser aplicado às construções perspectivas, se supuser que uma das duas retas coplanares (por ex., a reta a) se encontre no plano do quadro e que a outra reta b faça parte da figura a pôr em perspectiva; em a podem ser marcados em verdadeira grandeza segmentos cuja relação recíproca seja conhecida (por ex., iguais); as retas paralelas 1, 2, 3, 4, (das quais é sempre possível determinar o ponto de fuga, isto é, o *ponto medidor*), determinam na perspectiva da reta outros tantos segmentos que conservam (entende-se perspectivamente alterados) as relações intercorrentes entre os segmentos primitivos.

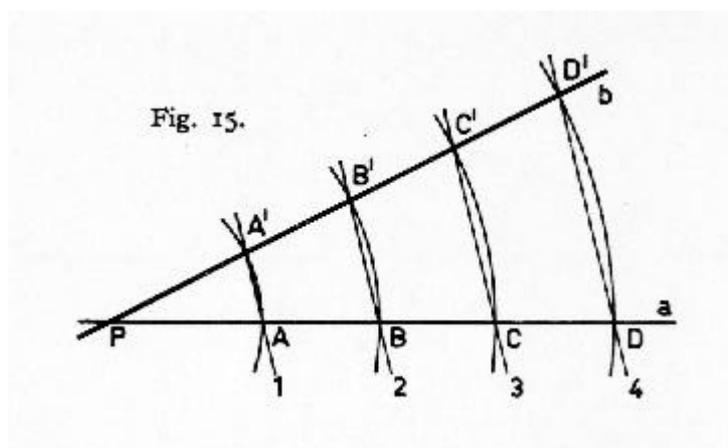
14. Da perspectiva r_1 de uma reta horizontal (r), conhece-se o traço A e um ponto B' ; o segmento AB' deve ser dividido em quatro partes iguais.



Em uma reta horizontal r no plano do quadro, passando por A , marcam-se quatro segmentos iguais quaisquer ($A-1$, $1-2$, $2-3$, $3-B$). A ligação dos pontos B e B' é uma horizontal e corta a linha de horizonte em um ponto M , que é o seu ponto de fuga. As retas $3-M$, $2-M$, $1-M$, paralelas à $B-B'-M$ (visto que têm com esta um ponto de fuga em comum) cortam a r_1 nos

pontos $2', 2', 1'$, e determinam os segmentos $A-1', 1'-2', 2'-3', 3'-B'$, proporcionais aos segmentos dados na reta r , ou seja, iguais entre si.

15. Em nossas construções perspectivas é preciso, porém, geralmente determinar, não somente as proporções recíprocas de diversos segmentos de reta, mas também as dimensões de cada um deles. Não poderemos, então, recorrer mais ao teorema geral das proporcionais mas ao seu corolário representado na Fig. 15; é preciso determinar então, a direção especial do feixe de retas auxiliares paralelas, de modo que as duas retas quaisquer coplanares sejam cortadas em segmentos proporcionais e *iguais*. Roda-se, para isso, o ponto A para A' , fazendo centro em P ; retas paralelas a AA' e passando pelos pontos B, C, D , cortam na reta b segmentos iguais àqueles dados na reta a ,



Nas operações da perspectiva, é importante determinar a direção (ou seja, o ponto de fuga) daquelas retas paralelas que marcam os segmentos dados em verdadeira grandeza, mantendo-se fixas as relações recíprocas e as dimensões (ponto medidor).

A cada direção corresponde um ponto medidor, e sua posição é determinada na figura preparatória, do modo indicado na Fig. 16.

Os segmentos PA, AB, BC, \dots dados em verdadeira grandeza no traço horizontal do quadro, são marcados na projeção horizontal da reta r das retas $1, 2, 3, \dots$ do modo anteriormente indicado. O ponto de fuga M destas retas é o ponto de encontro com o quadro do raio óptico a ele paralelo. Este ponto (isto é, o ponto medidor procurado) é determinado diretamente por uma simples rotação do olho O no quadro, fazendo centro no ponto de fuga F da reta; isto é verdadeiro, porque os dois triângulos $CP C'$ e MFO são semelhantes (os ângulos CPC' e MFO são iguais porque são alternos internos, os lados $P' C'$ e OF são

paralelos por construção, os lados PC e FM se encontram em uma mesma reta); portanto, o lado OM é paralelo ao lado CC' .

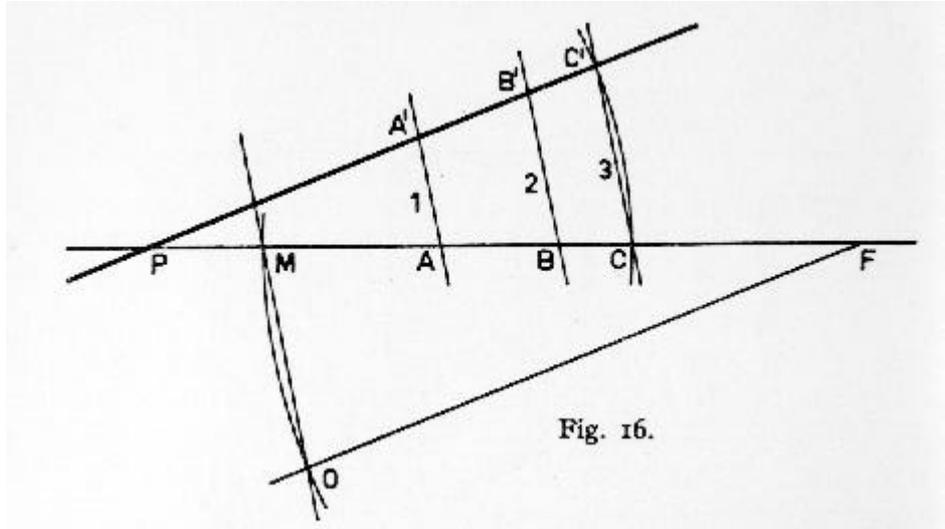


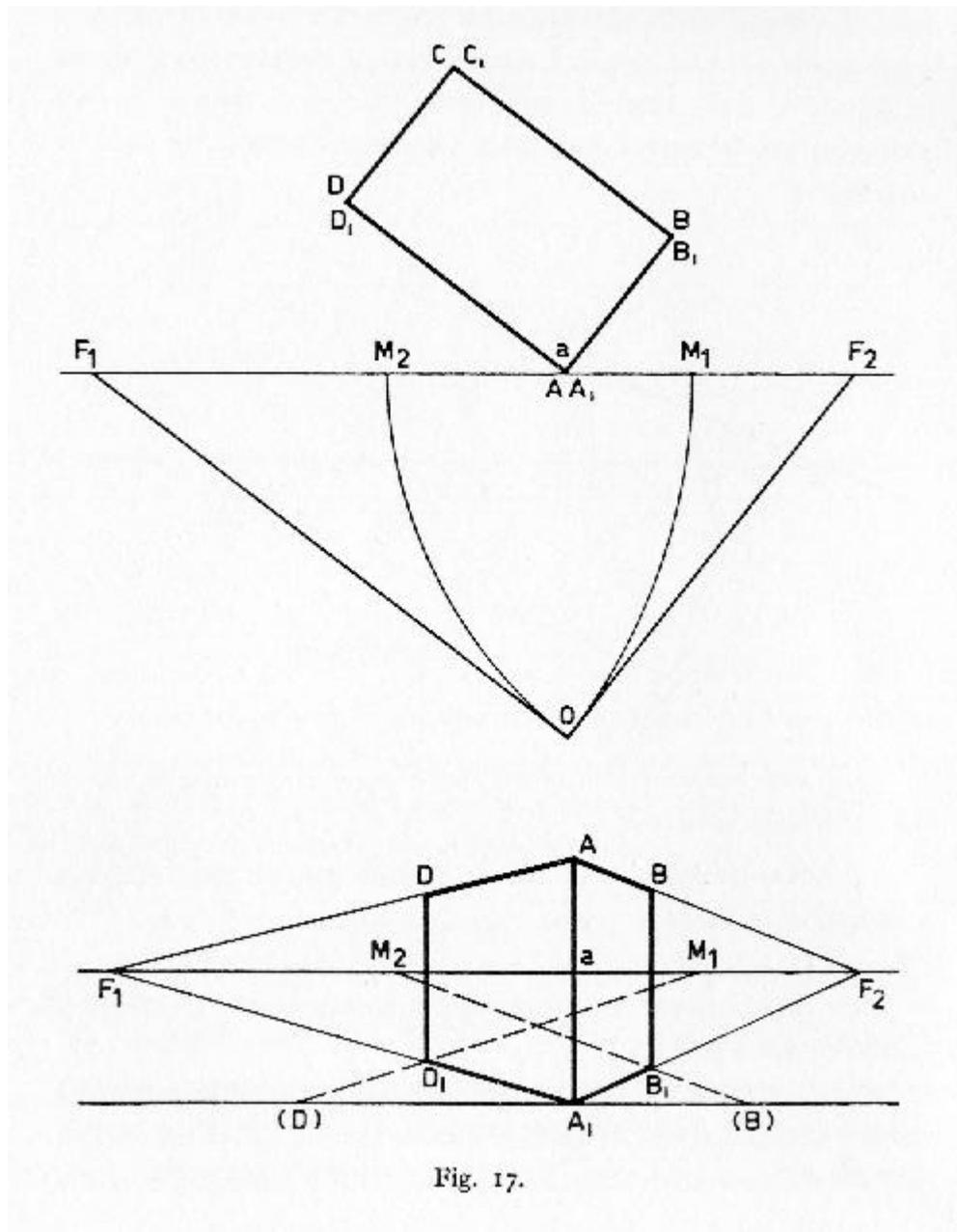
Fig. 16.

O ponto medidor correspondente às retas horizontais se encontra na linha do horizonte.

O ponto medidor de uma dada direção dista do ponto de fuga dela a mesma distância do olho.

16. Seja construir a perspectiva do paralelepípedo já considera-do anteriormente (Fig. 17).

Determinados, na figura preparatória, a posição da projetante vertical a , dos pontos de fuga $F_1 F_2$ e dos pontos medidores $M_1 M_2$, marcam-se todos estes elementos na perspectiva. A imagem da aresta AA' é desenhada do modo já conhecido. Visto que o segmento AA' se encontra no quadro, a paralela à linha do horizonte, passando por A , se encontrará também no quadro, e nela podem ser marcados em



verdadeira grandeza, ou em uma relação anteriormente fixada, os comprimentos dos lados do paralelepípedo. Ligando os pontos assim obtidos com os pontos medidores correspondentes, ou seja, (B) com M_2 e (D) com M_1 , obtêm-se nas retas em perspectiva A_1E_1 e A_1F_2 , as imagens dos pontos B_1 e D_1 . A construção é completada de modo bastante simples, como resulta da figura.

17. Quando não for possível, pelas limitadas dimensões do desenho, marcar na reta jacente no quadro todas as medidas necessárias,

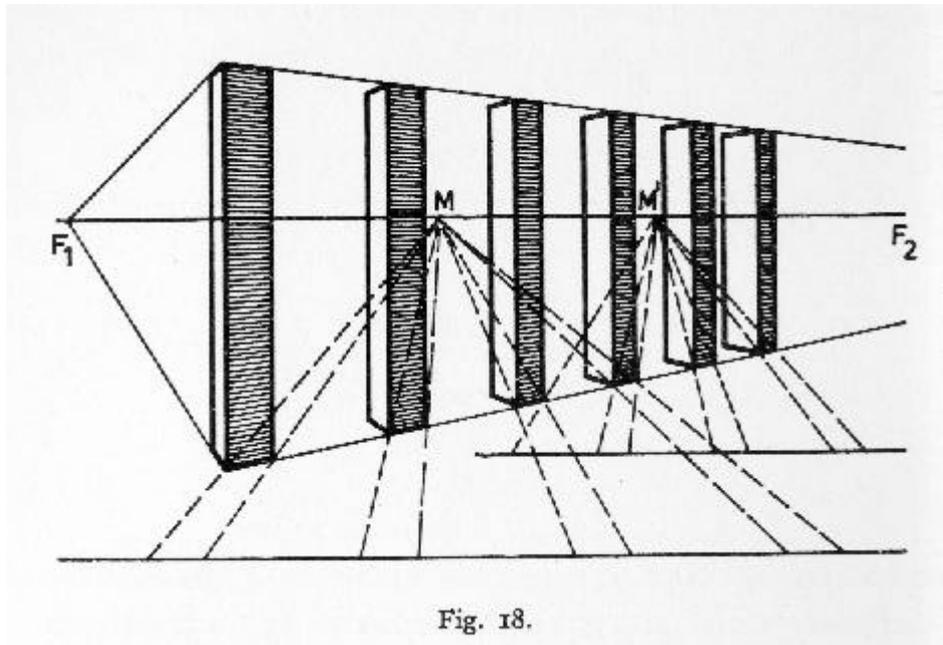


Fig. 18.

imagina-se um segundo plano paralelo ao quadro, no qual se continua a operação com um novo ponto medidor qualquer. Porém, se no quadro as dimensões do objeto fossem marcadas em uma certa relação com a verdadeira grandeza, para o segundo plano esta relação será mudada. Basta, para determinar esta nova proporção, repetir para um segmento já considerado na primeira parte da construção, a operação, segundo o novo plano e o novo ponto medidor.

18. Se o plano de terra se encontra muito próximo ao plano

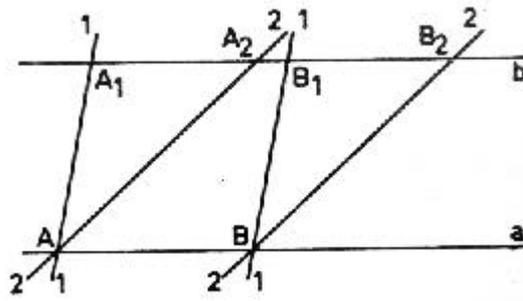


Fig. 20.

O ponto medidor a ele correspondente é o ponto de vista, sendo este o ponto de fuga das retas perpendiculares ao quadro.

Porém, para as retas paralelas ao quadro (Fig. 20), cada ponto da linha de horizonte pode funcionar como ponto medidor; de fato, retas paralelas 1-1, 2-2, ..., passando por dois pontos A e B da reta a, cortam na reta b, paralela a a, segmentos A_1-B_1 , A_2-B_2 , ... iguais ao segmentos A-B, qualquer que seja sua direção.

Basta retificar o segmento A_1-B_1 , na posição vertical, para ter-se a imagem perspectiva do segmento de comprimento A-B da reta vertical passando pelo ponto A_1 (Fig. 21).

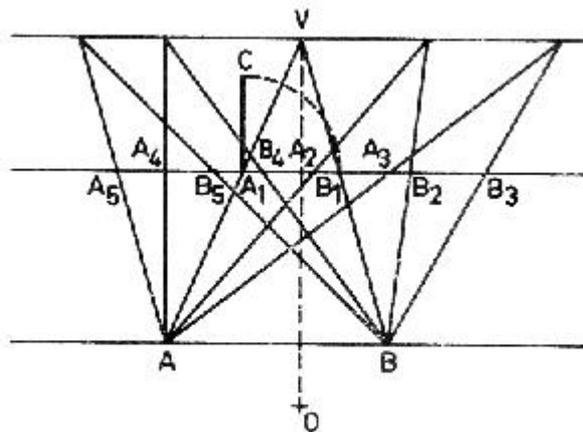


Fig. 21.

IMAGEM PERSPECTIVA DE RETAS INCLINADAS

21. O ponto de fuga de uma reta não horizontal (inclinada ao plano de terra) é dado, como para qualquer outra reta, pela interseção do raio óptico a ele paralelo, com o quadro.

Este raio óptico é determinado pela sua projeção horizontal paralela à projeção horizontal da reta, e pelo ângulo que ela forma com a projeção, igual ao ângulo formado pela

reta com o plano horizontal.

O ponto de fuga F de uma reta inclinada r se encontra na vertical passando pelo ponto de fuga F' da sua projeção horizontal (ou seja, no traço vertical do plano vertical contendo o raio óptico paralelo à reta r). A posição do ponto de fuga F , ou seja, a sua distância da linha de horizonte, é determinada rebatendo o plano vertical contendo o raio óptico paralelo a r no plano de terra, em torno da projeção horizontal do raio óptico (Fig. 22). Conduzindo para O o ângulo de inclinação da reta r , obtém-se em (F) o rebatimento do ponto de fuga, e retificando o plano vertical passando pelo raio óptico em sua posição natural, obtém-se o ponto de fuga F : este se encontra na vertical passando por F' e dista deste ponto a mesma distância de (F) .

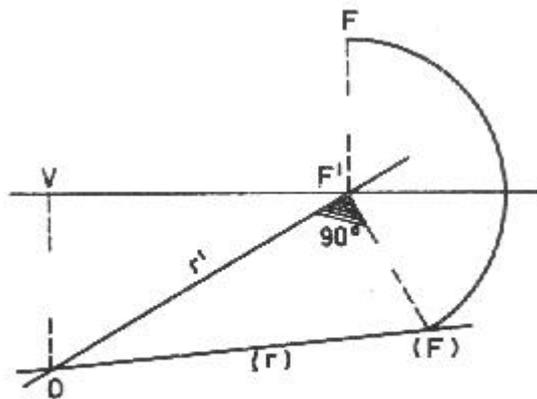


Fig. 22.

O ponto de fuga de uma reta inclinada pode ser determinado também rebatendo o plano vertical passando pelo raio óptico paralelo à mesma reta no plano do quadro, em torno de seu traço vertical f passando pelo ponto de fuga F' . Basta conduzir ao ponto da linha de horizonte no qual vai cair o rebatimento do olho (isto é, no ponto medidor), o ângulo formado pela reta r com o plano de terra, para ter o rebatimento da reta r . O ponto de encontro deste rebatimento com a vertical f passando pelo ponto de fuga F' é o ponto de fuga procurado F (Fig. 23).

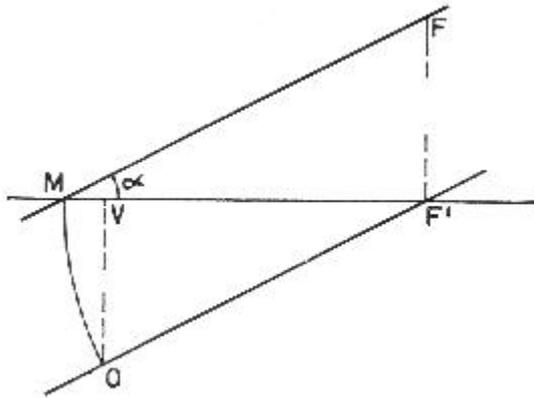


Fig. 23.

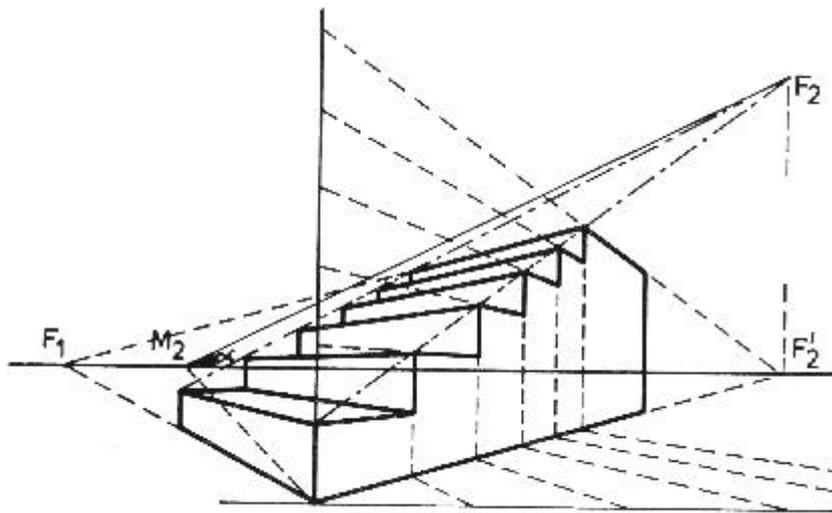


Fig. 24.

22. Seja construir a perspectiva de uma escada, na qual os degraus tenham espelho $a = 15$ cm, e pé $b = 30$ cm (Fig. 24).

23. O ponto de fuga de uma reta inclinada se encontra acima ou abaixo da linha do horizonte, segundo a reta seja inclinada para cima ou para baixo em relação ao observador.

IMAGEM PERSPECTIVA DO PLANO

24. A reta de fuga de um plano é o lugar dos pontos de fuga de todas as retas contidas

neste plano. Ela é a interseção com o quadro do plano passando pelo olho e paralelo ao plano dado.

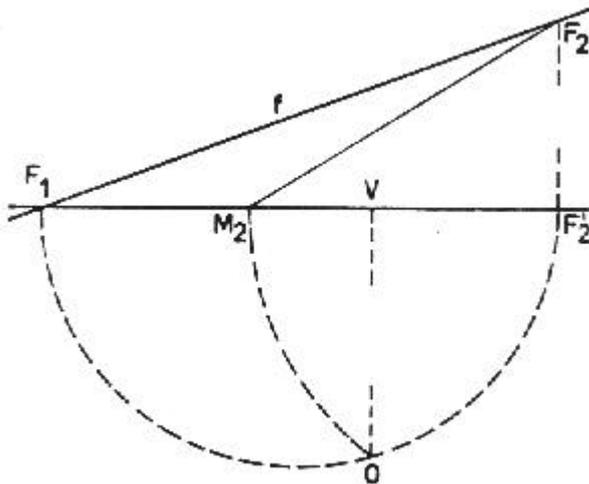


Fig. 25.

Para determinar um plano, bastam duas retas dele; portanto, os pontos de fuga destas duas retas bastarão para determinar a linha de fuga do mesmo plano. Geralmente, consideram-se as retas horizontais e as retas de máxima inclinação (Fig. 25).

25. Todos os planos horizontais têm sua linha de fuga na do horizonte, que contém os pontos de fuga de todas as retas horizontais (Fig. 26).

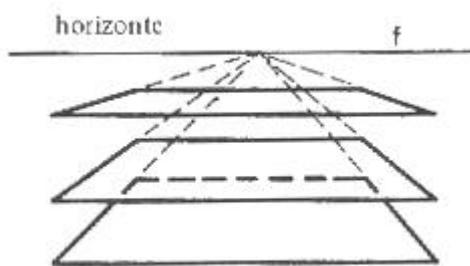


Fig. 26.

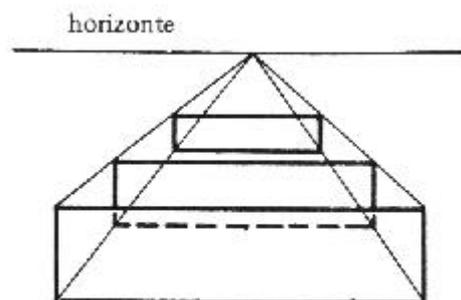


Fig. 27.

26. Os planos paralelos ao quadro não têm linha de fuga, porque as retas neles jacentes não têm ponto de fuga (os raios ópticos a elas paralelos encontram o quadro somente no

infinito; isto é, plano passante pelo olho e paralelo aos planos dados, encontra o quadro somente no infinito) (Fig.27).

27. Os planos verticais e perpendiculares ao quadro têm a linha de fuga em uma reta passando pelo ponto de vista. Este é o ponto de

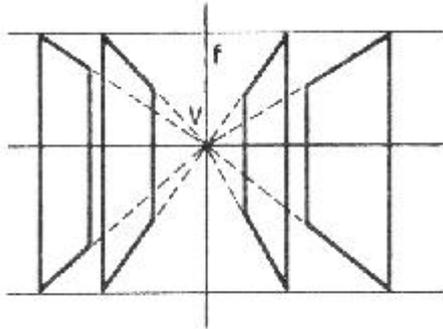


Fig. 28.

fuga das retas perpendiculares ao quadro, contidas nestes planos; verticalmente acima ou abaixo dele, se encontram os pontos de fuga de todas as outras retas jacentes nos mesmos planos (Fig. 28).

28. Um plano perpendicular ao quadro, mas não vertical, tem a linha de fuga em reta passando pelo ponto de vista; esta, forma

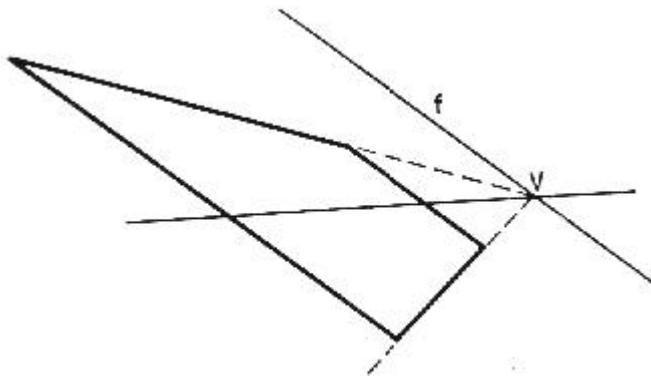


Fig. 29.

com a linha de horizonte um ângulo igual à inclinação do mesmo plano de terra (Fig. 29).

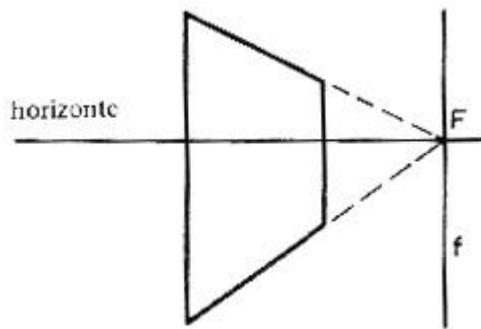


Fig. 30.

29. Um plano vertical, mas não perpendicular ao quadro, tem a linha de fuga em uma reta vertical passando pelo ponto de fuga das retas horizontais jacentes no mesmo plano.

30. Um plano paralelo à linha do horizonte tem por linha fuga uma reta horizontal (Fig. 31). As retas horizontais nele contidas não têm pontos de fuga, porque são paralelas ao quadro; as retas máxima inclinação do plano se encontram em planos verticais

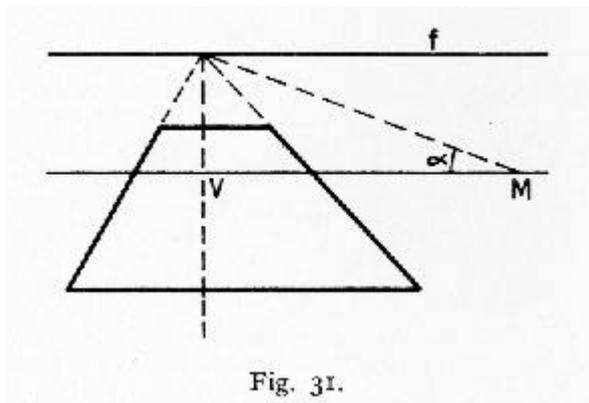


Fig. 31.

perpendiculares ao quadro, e têm seu ponto de fuga em uma vertical passando pelo ponto de vista; a altura no horizonte deste ponto de fuga

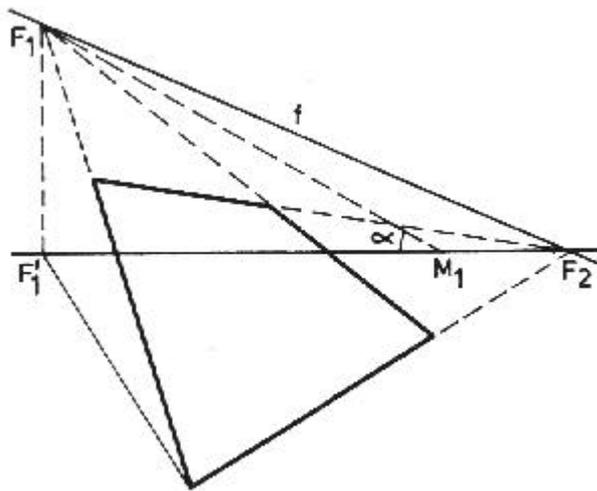


Fig. 32.

é determinada por uma reta formando com a linha de horizonte um ângulo igual à inclinação do plano, e passando por um ponto de distância (que é o ponto medidor correspondente às projeções horizontais das linhas de máxima inclinação).

31. A linha de fuga de um plano colocado em posição qualquer, é determinada pelos pontos de fuga de dois sistemas de retas paralelas nele jacentes. Geralmente, escolhem-se o sistema das retas horizontais e o sistema das retas de máxima inclinação: as projeções horizontais destes dois sistemas de retas são perpendiculares. O ponto de fuga das primeiras se encontra na linha de horizonte, e o ponto de fuga das segundas é determinado de um dos modos já conhecidos; a linha de fuga do plano contém os pontos de fuga das retas jacentes no mesmo (Fig. 32).

PERSPECTIVA CENTRAL

32. Quando se tiver que construir a perspectiva de um objeto, no qual todos ou a maior parte das arestas horizontais formam dois sistemas de retas paralelas a duas direções perpendiculares entre si (um edifício ou uma parte dele, ou um grupo de edifícios), pode ser vantajoso imaginar que o quadro esteja disposto paralelamente a uma ou outra das duas direções. Tem-se, então, que as retas de um dos sistemas, sendo paralelas ao quadro, não têm ponto de fuga (têm o ponto de fuga no infinito), e que o ponto de fuga das retas do outro sistema, perpendiculares ao quadro, coincide com o ponto de vista e o ponto medidor a ele correspondente é o ponto de distância.

33. Nas construções perspectivas comuns, o plano do quadro disposto paralelamente às retas verticais, as quais não têm, portanto,

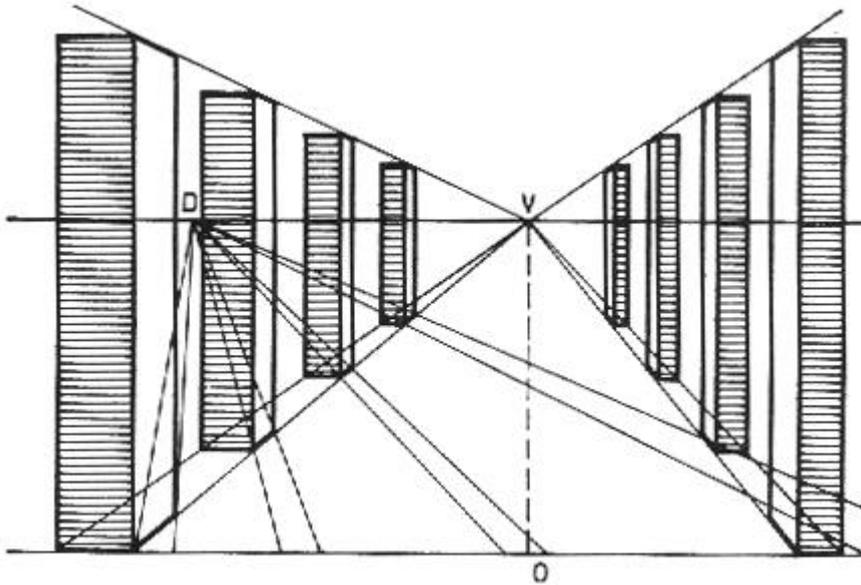


Fig. 33.

qualquer ponto de fuga (têm o ponto de fuga no infinito), e ficam, também, na perspectiva, verticais e paralelas.

Se o quadro for paralelo às retas horizontais (este seria o caso de uma perspectiva pintada em um teto), o ponto de fuga das verticais coincide com o ponto de vista. A linha do horizonte não tem mais valor de linha de interseção do plano do horizonte com o quadro: ela a linha de fuga de um sistema de planos verticais. A construção perspectiva se verifica do mesmo modo usado com o quadro vertical.

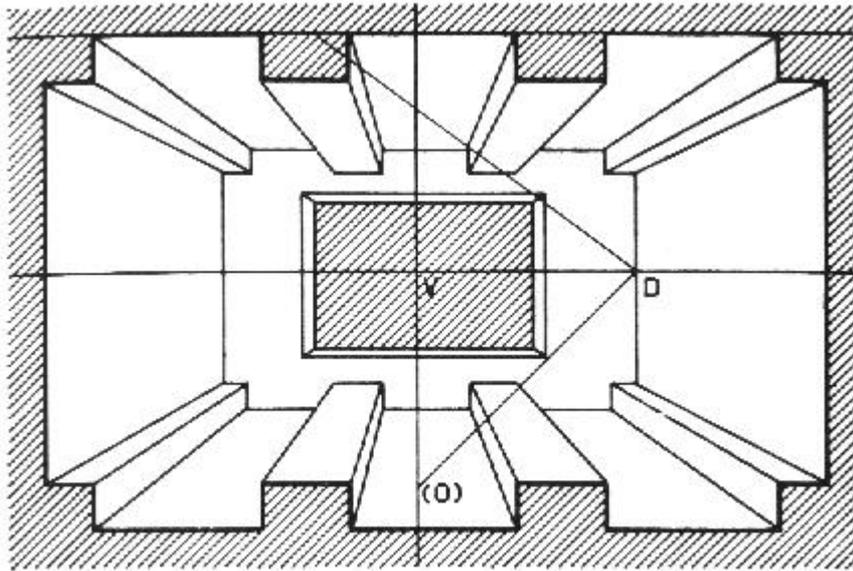


Fig. 34.

CONSTRUÇÃO DAS SOMBRAS EM PERSPECTIVA

34. A aplicação à perspectiva das leis e dos métodos indicados pela teoria das sombras, se reduz a aplicar as construções relativas ao princípio de ponto de fuga de retas paralelas, inclinadas em relação ao plano de terra.

Os raios solares são considerados como paralelos; eles têm no sol (praticamente considerado como situado no infinito) seu ponto de encontro.

O raio óptico passando pelo sol é paralelo aos raios solares, e a sua interseção no quadro, ou seja, a perspectiva do sol, é o ponto de fuga dos raios solares.

Consideram-se três posições diversas do sol em relação ao olho.

35. O sol se encontra em um plano que passa pelo olho e paralelo ao quadro; conclui-se que o raio óptico que passa pelo sol não encontra o quadro, isto é, que os raios luminosos não têm ponto de fuga.

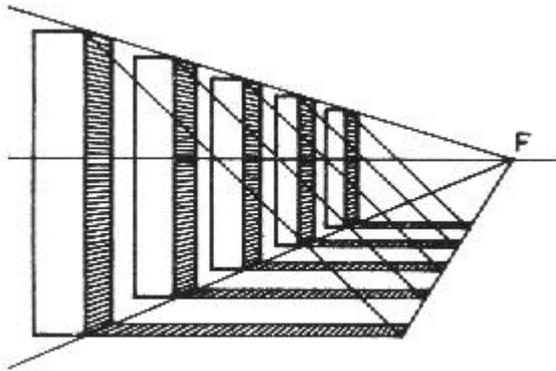


Fig. 35.

As imagens perspectivas dos raios luminosos e das suas projeções são paralelas (Fig. 35).

36. O sol se encontra diante do plano vertical paralelo ao quadro e que passa pelo olho. O ponto de fuga dos raios luminosos se encontra acima da linha do horizonte (Fig. 36).

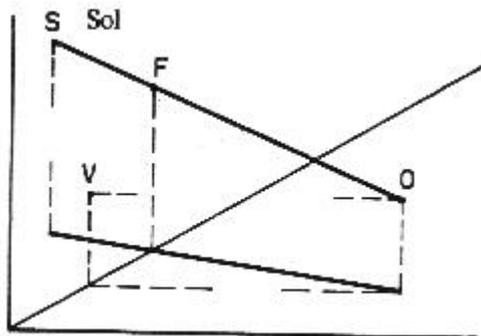


Fig. 36.

A posição do ponto de fuga dos raios luminosos, dos quais se conhecem a projeção horizontal e a inclinação, se determina do mesmo modo usado para o ponto de fuga de retas inclinadas no plano horizontal (Fig. 37).

37. O sol se encontra atrás do plano vertical paralelo ao quadro e que passa pelo olho. O ponto de fuga dos raios luminosos se encontra abaixo da linha do horizonte (Fig. 38).

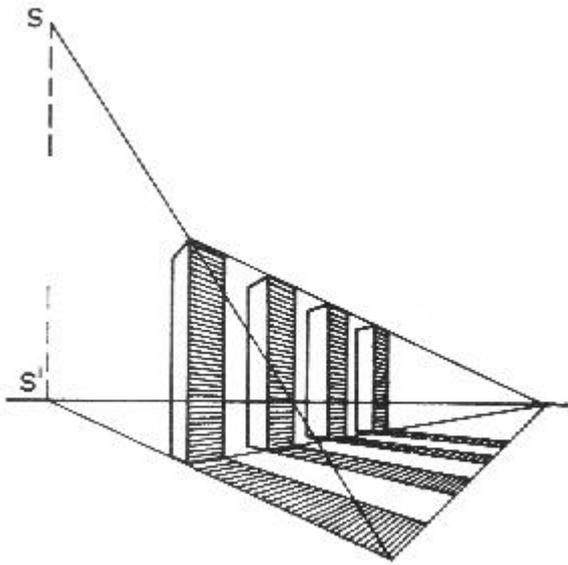


Fig. 37.

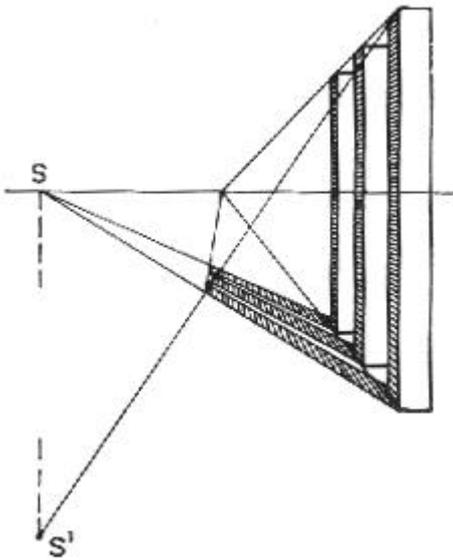


Fig. 38.

38. Resulta das construções precedentes que a sombra conduzida de um objeto a um plano é determinada pelos traços, no plano de projeção, dos planos contendo os raios luminosos e tangentes ao mesmo objeto.

A regra vale também quando se trata de determinar a sombra conduzida a um plano não horizontal.

Visto que os raios luminosos são paralelos, também os planos que os contêm devem ser paralelos e os traços destes planos no plano de projeção serão igualmente paralelos. Estes últimos convergem em um ponto de fuga S'' que se deve encontrar na linha de fuga dos planos paralelos (por ex., verticais) e na linha de fuga do plano de projeção, isto é, no ponto de encontro destas duas linhas (Fig. 39).

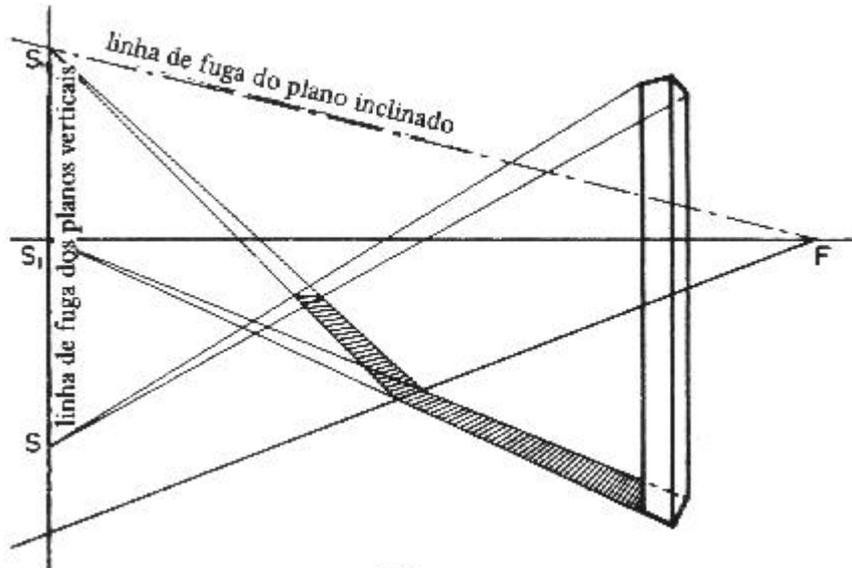


Fig. 39.

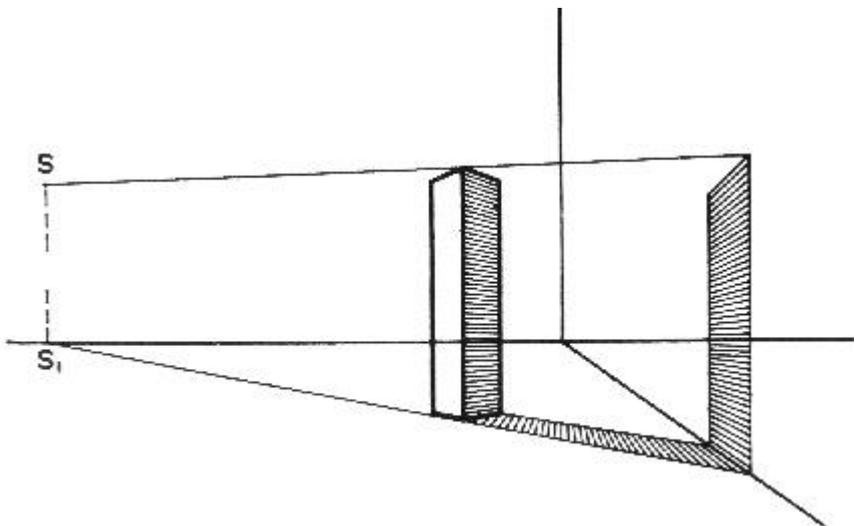
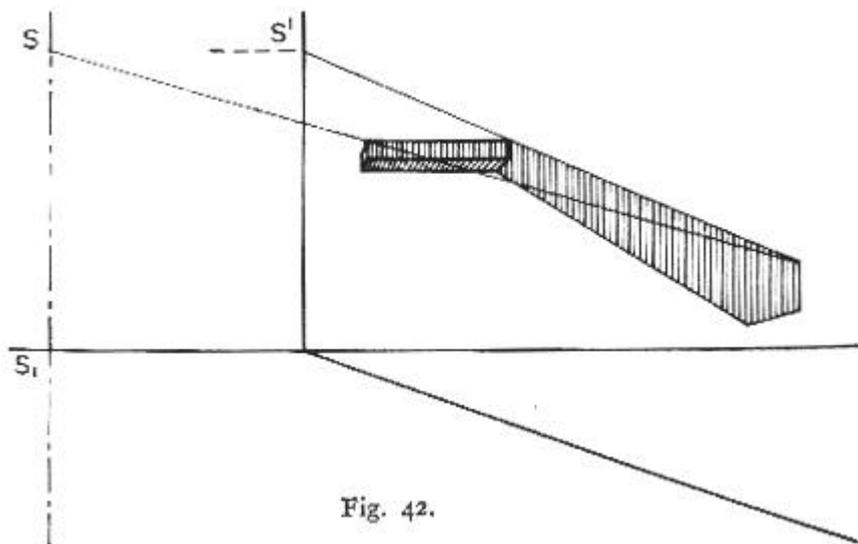
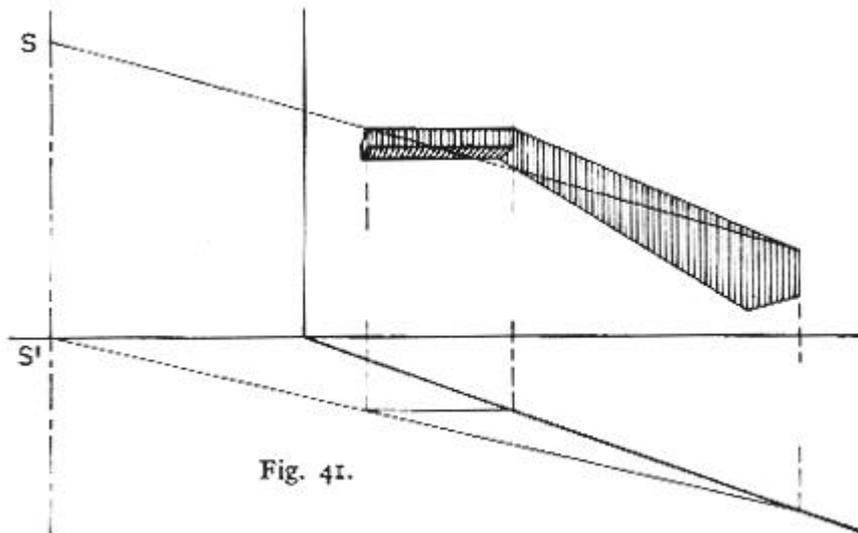


Fig. 40.

39. A sombra de um segmento de reta vertical, em um plano de projeção vertical, é vertical. De fato, a linha de fuga do plano de projeção e a linha de fuga do plano contendo os raios luminosos e que passa pelo segmento de reta são verticais e paralelas (encontram-se no

infinito) (Fig. 40).



40. A sombra de um segmento de reta horizontal apoiado com uma extremidade em um plano vertical, no mesmo plano, pode ser determinada por dois modos:

a) conduzindo, pela extremidade livre do segmento de reta, um plano luminoso vertical, e determinando, por meio deste, a interseção com o plano de projeção do raio luminoso que passa pela mesm extremidade do segmento de reta (Fig. 41);

b) ou, conduzindo um plano horizontal pelo sol e pelo si mento de reta; a sombra procurada vai cair no traço que este plano forma com o plano de projeção (Fig. 42).

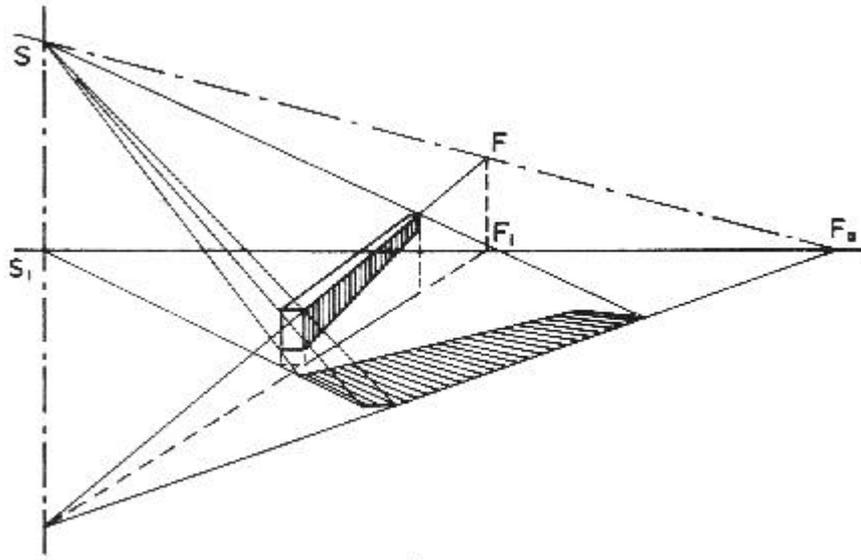


Fig. 43.

41. A sombra conduzida a um plano de projeção horizontal, de um segmento de reta inclinada, se encontra no traço que o plano que passa pelo sol e pelo segmento de reta forma no plano de projeção (Fig. 43).

42. Quando a superfície que recebe a sombra produzida por um objeto é formada por planos diversos, aplicam-se as normas precedentes aos diversos casos, decompondo a sombra conduzida nas diversas partes que correspondem a cada plano de projeção (Fig. 44).

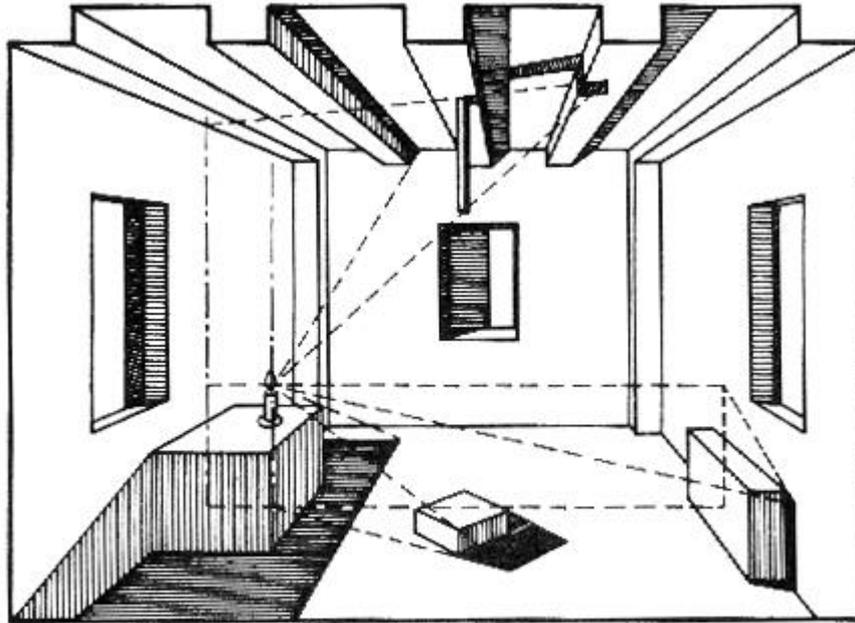


Fig. 45.

44. A sombra produzida por um objeto, produzida por uma fonte luminosa colocada a distância finita em um plano de projeção qualquer, é o exemplo típico de projeção central, onde o centro de projeção é a fonte luminosa, raios de projeção são os raios luminosos, e a projeção procurada é a sombra produzida.

Analogamente, a sombra produzida pela luz solar pode servir como exemplo de projeção paralela.

IMAGENS REFLETIDAS EM PERSPECTIVA

45. Os espelhos refletem os raios luminosos de modo que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência; o eixo de reflexão se encontra no espelho.

Os elementos que servem para construir a perspectiva de um objeto (quadro, ponto de vista, horizonte, pontos de fuga, etc.) valem também para a perspectiva da imagem refletida pelo mesmo objeto.

46. Se a superfície refletente for horizontal, por exemplo um espelho d'água, a imagem refletida de um ponto se encontra em uma

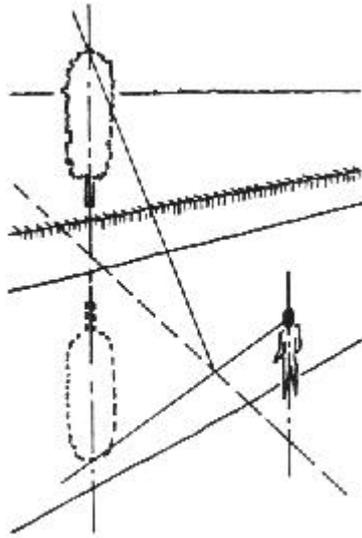


Fig. 46.

reta vertical passando pelo ponto, e dista, da superfície do espelho, da mesma distância do ponto real (Fig. 46).

Com o aumentar da distância entre o observador e o objeto refletido, o eixo de reflexão se aproxima da linha do horizonte. Se a

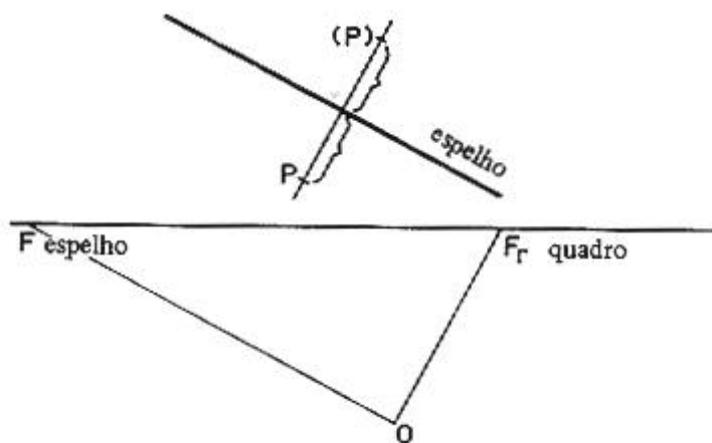


Fig. 47.

distância entre o observador e o objeto pode ser praticamente considerada como infinita (sol, lua), o eixo de reflexão coincide com linha do horizonte

A posição da imagem refletida é determinada na perpendicular ao espelho, por meio de um ponto medidor X qualquer na linha de horizonte (figs. 47, 48).

Se o espelho for inclinado, a imagem refletida (P) de um ponto P se encontra, como no caso precedente, na reta r que passa pelo mesmo ponto e perpendicular ao espelho, e dista do espelho quanto dista o ponto real. Naturalmente, sendo o espelho inclinado, também a reta r a ele perpendicular é inclinada, e tem o seu ponto fuga fora da linha de horizonte (Fig. 49).

MUDANÇAS DO SISTEMA DE PROJEÇÃO

47. A imagem perspectiva de um objeto varia de forma ou dimensão, por efeito da mudança de posição do olho ou do em relação ao próprio objeto.

48. Relativamente ao primeiro caso, de mudança de posição do olho em relação ao objeto, bastará considerar, para as aplicações dos métodos das projeções centrais à prática da perspectiva, as transformações produzidas por uma mudança deste tipo, quando, porém, permanecerem fixos o quadro e o plano de horizonte. Apresentam assim dois casos distintos.

49. O olho se desloca normalmente ao quadro, isto é, ao longo do raio óptico principal (o ponto de vista fica invariado) (Fig. 50).

Para que se perceba como se modifica a imagem perspectiva com a mudança da distância, consideremos duas imagens de uma mesma reta r , construídas segundo as duas distâncias d , $d/2$ do olho ao quadro.

A imagem perspectiva da reta r passa pelo traço T no plano do horizonte e pelo ponto de fuga F da mesma reta. Reduzindo a distância d a $d/2$ o raio óptico paralelo à reta r e passando por $O/2$ é paralelo ao raio óptico passando por O e se encontra no plano determinado pelos pontos $V O F$; no traço deste plano no quadro, isto é, na reta VF , irá se encontrar a interseção do raio óptico passando por $O/2$,

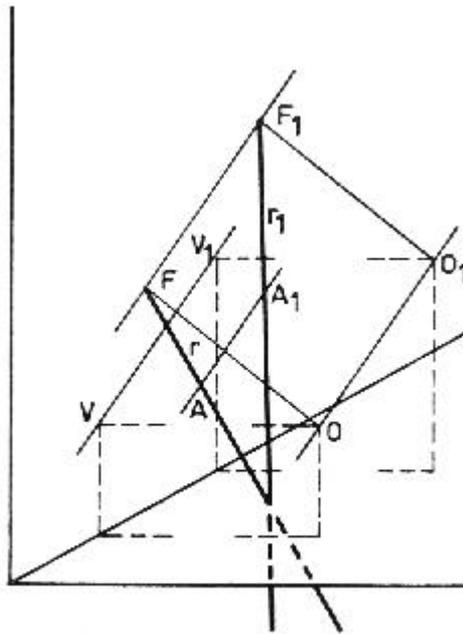


Fig. 51.

Se A for um ponto da reta r , os dois raios ópticos OA , $OA/2$ se encontram no plano VOA , e as duas imagens A , $A/2$ se encontram em uma reta que passa por V .

50. O olho se desloca em um plano paralelo ao quadro; isto é, a distância permanece invariada, mas varia a posição do ponto de vista.

O' , O_1 são as posições sucessivas do olho, tais que $OV = O_1V_1$. A imagem perspectiva r da reta considerada, é determinada pelo traço T no plano de terra e pelo ponto de fuga F . A perspectiva r_1 da mesma reta, relativa à nova posição O_1 do olho, passa pelo mesmo traço T e pelo novo ponto de fuga F_1 . O ponto de fuga se desloca no quadro na direção e da mesma medida de que se desloca o olho no plano paralelo ao quadro; de fato, visto que os raios ópticos OF e O_1F_1 são paralelos (sendo ambos paralelos a uma mesma reta), eles determinam um plano que corta o quadro ao longo da reta FF_1 e o plano paralelo ao quadro ao longo da reta OO_1 , os quatro segmentos de reta OF , O_1F_1 , OO_1 , FF_1 formam um paralelogramo, no qual os lados opostos são paralelos e iguais.

As imagens de um ponto A da reta se encontram em uma reta paralela à direção do deslocamento do olho.

51. Um caso especial muito importante do problema precedente é o que considera um deslocamento do olho ao longo de uma reta horizontal paralela ao quadro (Fig. 52).

O ponto de fuga (que na figura coincide com o ponto de vista), vai se encontrar, sucessivamente, em pontos diversos da linha do horizonte; o deslocamento que o ponto de fuga sofre é igual ao deslocamento do olho. Pontos correspondentes das diversas perspectivas se encontram nas paralelas à linha do horizonte.

Se construirmos duas imagens de um mesmo objeto para duas posições do olho correspondentes à distância que os nossos dois olhos têm efetivamente, obtêm-se duas imagens chamadas imagens estereoscópicas do objeto. Olhando estas imagens, de modo que os nossos olhos se encontrem respectivamente nas posições $V V_1$, pode-se obter que as duas imagens se confundem em uma única, qual se somam os efeitos plásticos das duas.

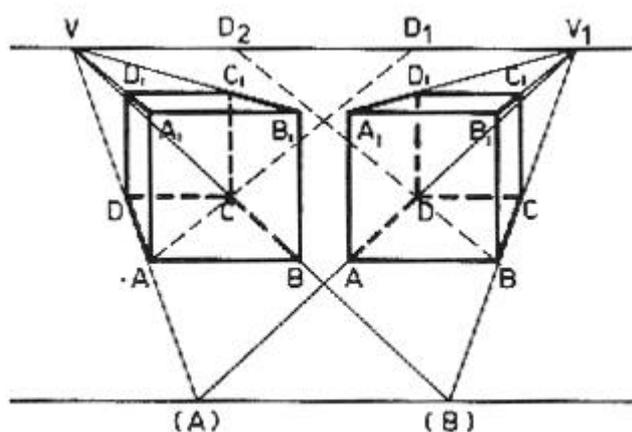


Fig. 52.

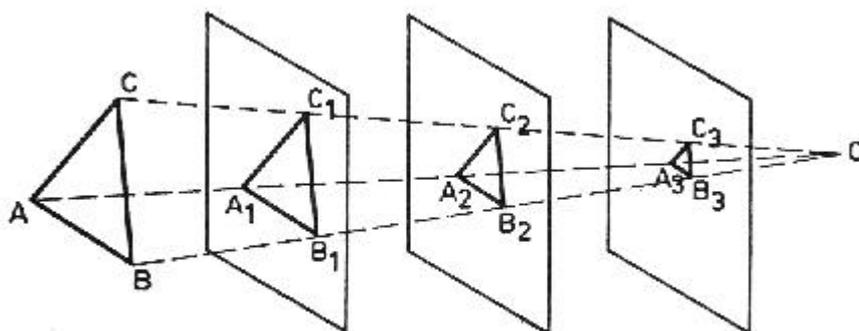


Fig. 53.

52. Relativamente ao segundo caso, de mudança de posição do quadro em relação ao objeto, basta considerar as transformações devidas a um deslocamento do quadro paralelamente a si mesmo.

As imagens produzidas por um mesmo objeto em quadros diversos paralelos entre si,

quando permanecem fixos o olho e o plano do horizonte, são imagens geometricamente semelhantes, e diferem somente nas dimensões: os diversos quadros cortam de fato o cone dos raios ópticos segundo seções, umas paralelas às outras (Fig. 53).

PERSPECTIVA EM UM PLANO INCLINADO

53. Nas construções perspectivas comuns, supõe-se o quadro em posição vertical. Pode acontecer, porém, que se deva construir a perspectiva de um objeto muito alto e não se possa, ou não convenha se distanciar o olho o quanto basta para se ter uma imagem boa e completa (campanários, arranha-céus, interiores, etc.). Deve-se então proceder à construção da perspectiva, supondo o raio óptico principal, não mais horizontal, mas inclinado (olhar para baixo) e, portanto, o quadro também inclinado.

Todas as leis anteriormente enunciadas valem também neste caso. A perspectiva de um ponto é sempre a interseção do raio óptico correspondente ao mesmo ponto com o quadro (Fig. 54).

As retas verticais, que na perspectiva no quadro vertical permanecem verticais, no caso da perspectiva em um quadro inclinado convergem para um ponto de fuga em posição finita, isto é, no ponto de encontro do raio óptico vertical com o plano do quadro. As retas horizontais têm o ponto de fuga na linha do horizonte (Fig. 55).

O plano horizontal que passa pelo olho, corta o quadro segundo a linha de horizonte I ; a projeção ortogonal do olho na linha de horizonte é o ponto de vista V . Importantes para as sucessivas construções são as retas horizontais r , ortogonais a I , que têm o seu ponto

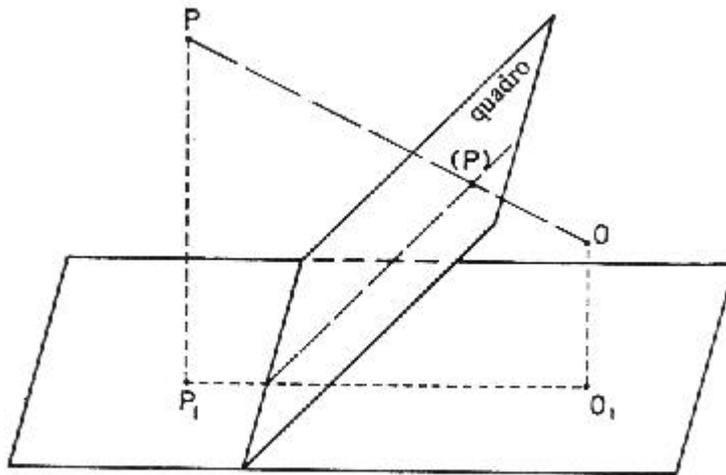


Fig. 54.

de fuga em V e as retas s paralelas ao quadro, e ortogonais a l , que resultam verticais na perspectiva (Fig. 56).

54. Também nas construções da perspectiva em um plano inclinado, começa-se, como na perspectiva em quadro vertical, determinando os elementos fundamentais em uma figura preparatória, para a seguir passar à construção da perspectiva propriamente dita.

Seja construir a perspectiva de um paralelepípedo retângulo vertical.

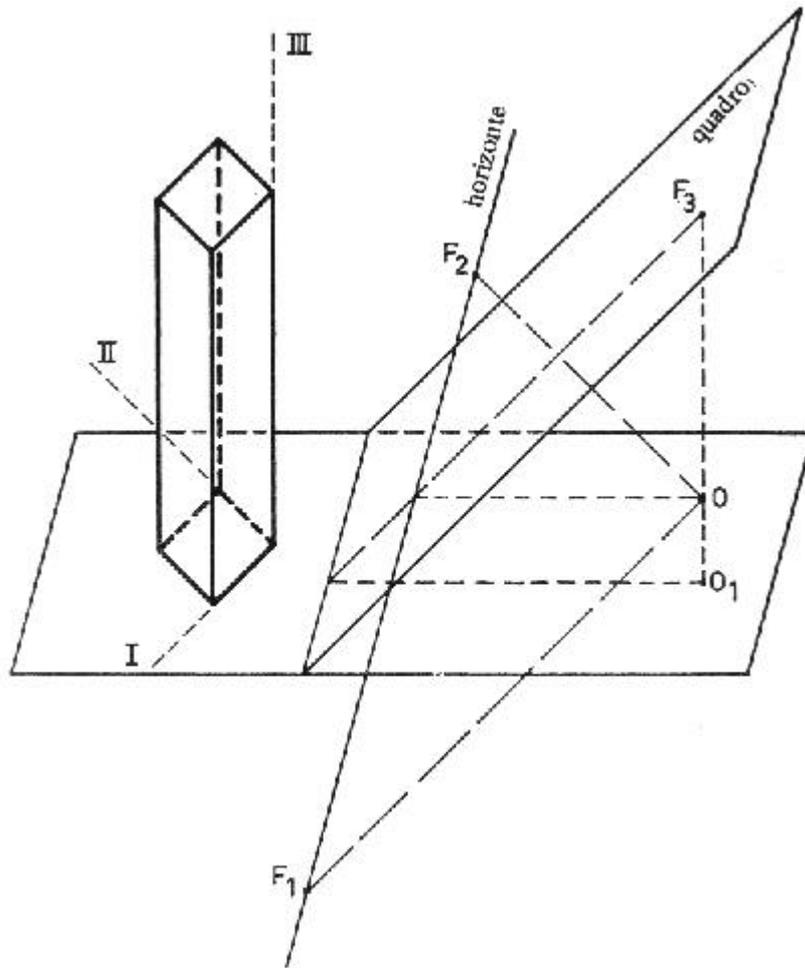


Fig. 55.

Na figura preparatória (Fig. 57), o quadro é individuado pelo seu traço horizontal l_0 e pelo ângulo de inclinação α no plano horizontal. Se O for o olho, a $O_2 V_2$ é horizontal e a $O_1 V_1$ é perpendicular l_0 em um ponto V_0 . Se desenharmos uma reta qualquer t tendo na linha de terra a mesma inclinação do quadro, obtém-se a projeção horizontal l , da linha do horizonte l , produzindo $V_0 V_1 = R S$; reciprocamente, pondo $ST = V_1 O_1$, obtém-se a cota do ponto de fuga F_3 das verticais.

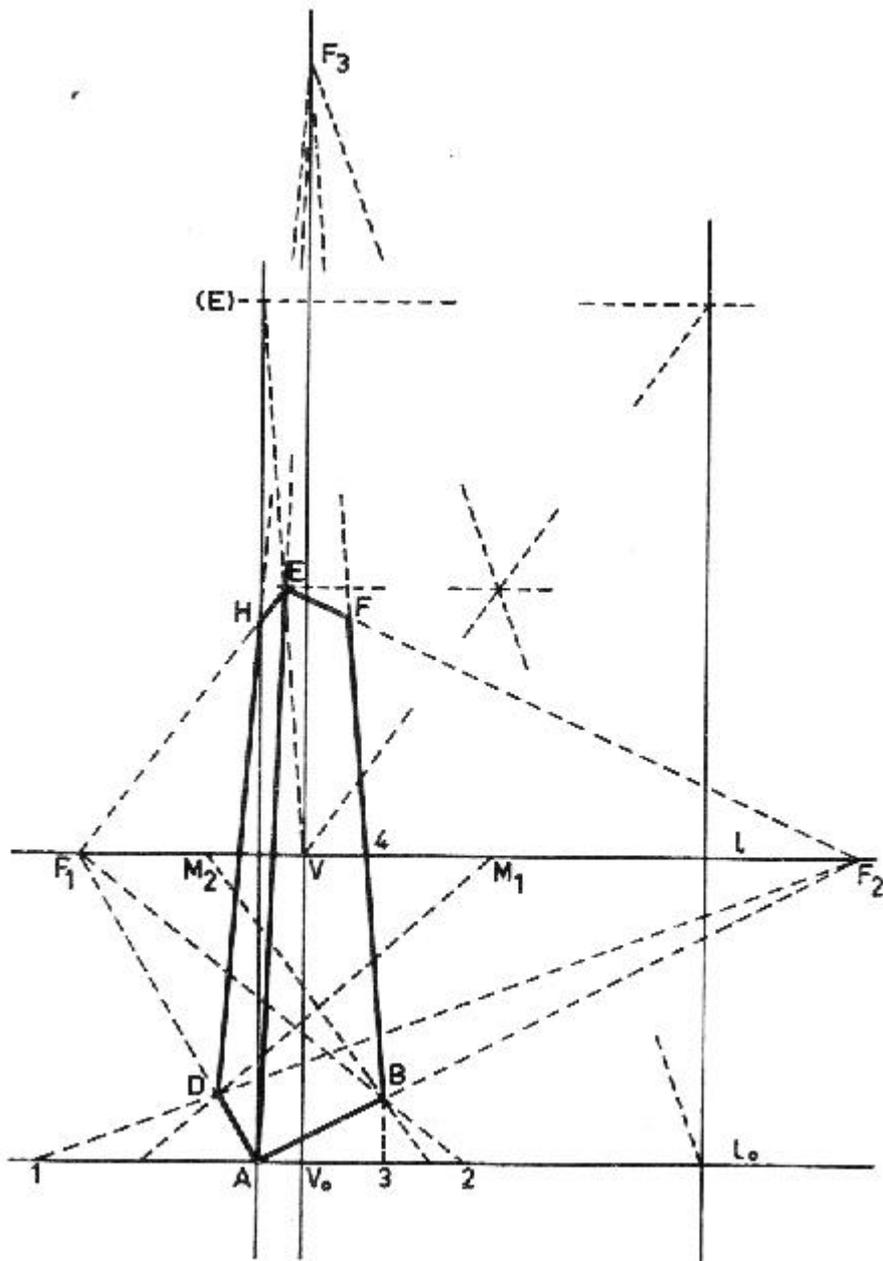


Fig. 58.

quadro vertical, por meio de pontos medidores, os quais são determinados na linha de horizonte com o sistema já conhecido.

A vertical que passa pelo ponto A tem funções análogas àquelas da projetante vertical, na perspectiva em quadro vertical: não se produzem, porém, como naquele caso, as alturas em verdadeira grandeza, mas, ao invés, as alturas (as distâncias das linhas de horizonte) que

resultam, na figura preparatória, na reta inclinada t . $(E) A = (E) R$. Uma reta passando por (E) e por V , ou seja, horizontal e ortogonal a l , determina, na vertical $A F_3$, o ponto E da perspectiva.

Se a vertical passando por A não permite interseções suficientemente nítidas com as verticais da perspectiva, a operação pode ser feita mais de lado, de modo análogo ao que se emprega na perspectiva em quadro vertical, onde se constrói uma planta em perspectiva a uma certa distância da linha de horizonte.

Se o ponto F_3 for inacessível, pode-se construir a imagem em perspectiva de uma vertical, por exemplo, no ponto B , determinando na figura preparatória as interseções 3, 4 do raio óptico correspondente a B , com l_0 e com l_1 . Estes pontos de interseção são representados na perspectiva; a reta que os une é a imagem em perspectiva procurada.

MÉTODO PARA OBTER AS DIMENSÕES DE UM OBJETO PELA SUA PERSPECTIVA

55. Acontece às vezes de se dever, da perspectiva (por exemplo, da fotografia) reconstituir a forma e as dimensões reais de um objeto; ou seja, executar uma série de operações inversas às feitas até aqui.

Sejam dados o quadro, o olho O , o ponto de vista V e a distância $O V$ (Fig.59).

Se, de uma perspectiva, se conhecem o ponto de vista e a distância, o feixe de raios ópticos é determinado em sua posição em relação ao quadro; o ponto de vista e a distância são chamados *elementos de orientação interna da perspectiva*.

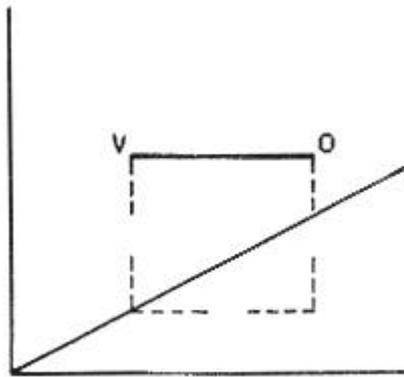


Fig. 59.

Se, de uma perspectiva, se conhecem a posição do olho no espaço e a direção do raio óptico principal, o feixe dos raios ópticos é determinado em sua posição no espaço; o olho e a direção do raio óptico principal são chamados *elementos de orientação externa da perspectiva*.

56. Os elementos de orientação interna da perspectiva são determinados por meio das propriedades geométricas do objeto considerado (por ex., proporção entre largura e altura).

Quando o problema se refere a uma obra de arquitetura, é vantajoso considerar um paralelepípedo que esteja compreendido no objeto ou que o compreenda.

Seja dada a perspectiva de um prisma vertical de base quadrada (fig 60).

A reta que passa pelo ponto superior L da circunferência de diâmetro F_1, F_2 , por F_3 passa também por (O) , visto que o ângulo na periferia $L(O)F_2$ é igual à metade do ângulo no centro $L C F_2$, (que é reto).

É fácil, uma vez determinado (O) , encontrar a posição do ponto de vista V , dos pontos medidores T_1 e T_2 , que servem para a resolução métrica do problema.

57. Se a base do prisma reto, ao invés de quadrada for retangular, e seja conhecida a relação entre seus lados, o método de resolução é ainda aquele anteriormente indicado (Fig. 61).

Sejam os lados do retângulo de base na proporção de 1 para 2; é fácil determinar o ângulo α .

O ponto (O) deve ser determinado de modo que o ângulo $F_1(O)F_2$, seja reto, é que o ângulo $F_2(O)F_3$, seja igual a α . A primeira condição é assumida quando (O) se encontra na circunferência de diâmetro F_1, F_2 ; para satisfazer à segunda condição, faz-se no centro da circunferência de diâmetro F_1, F_2 , um ângulo $F_2, C L$ igual a 2α :

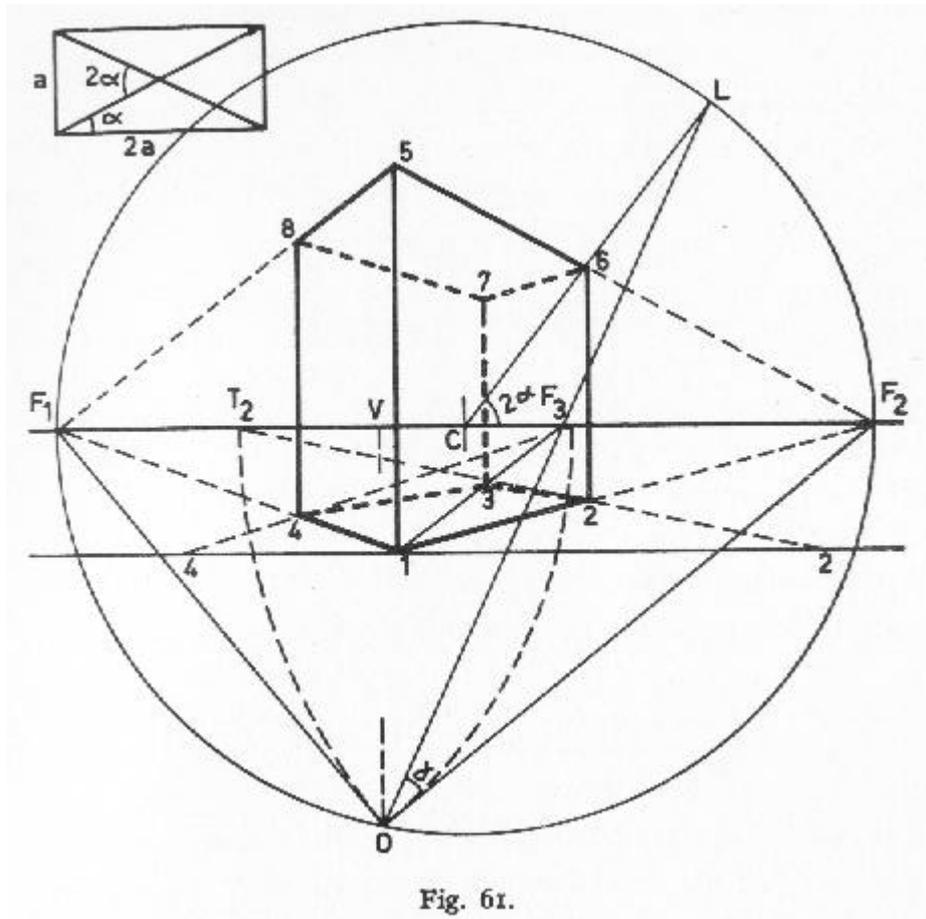


Fig. 61.

o ângulo na periferia $F_3, (O) F_3$, é igual à metade do ângulo no centro $L C F_2$, ou seja, é igual a α .

A projeção horizontal (O) do olho se encontra no ponto de encontro da circunferência de diâmetro F_1, F_2 , e da reta $L F_3$.

58. Dos dois exemplos precedentes, resulta que os elementos e orientação interna de uma perspectiva, quando o quadro for vertical, podem sempre ser determinados, se forem conhecidos pontos de fuga de três direções horizontais, formando entre si ângulos conhecidos.

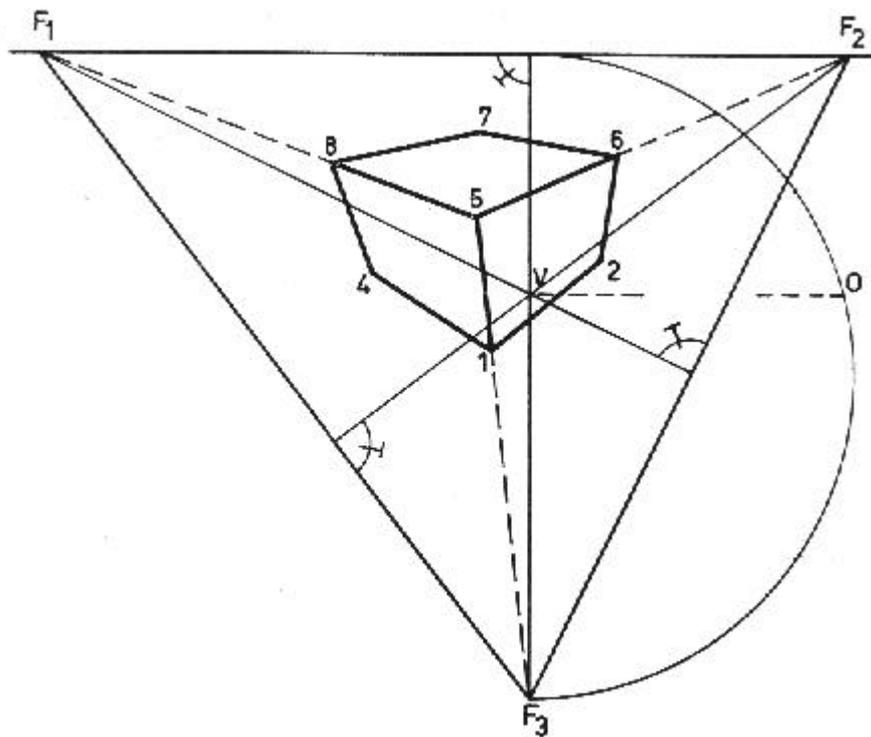


Fig. 62.

59. Ainda mais simples se torna determinar os elementos orientação interna de uma perspectiva, quando o quadro for oblíquo e se conhecerem os pontos de fuga de três direções perpendiculares entre si (Fig. 62).

Sejam F_1 e F_2 , os pontos de fuga de duas direções horizontais perpendiculares uma à outra: por eles passa a linha de horizonte. Seja F_3 o ponto de fuga de uma terceira dimensão, perpendicular às duas primeiras, isto é, vertical.

O olho O é o vértice de um tetraedro tal que as arestas dele convergentes no próprio vértice, são perpendiculares uma em relação à outra. O ponto de vista V é, conseqüentemente, o ponto de encontro das alturas do triângulo $F_1 F_2 F_3$, e a distância principal resulta de um simples rebatimento do plano perpendicular ao quadro, passando pelo vértice e por um ou por outro dos pontos de fuga.

PROJEÇÕES CENTRAIS DA ESFERA

60. O estudo das projeções cartográficas se desenvolveu para satisfazer às necessidades

da geografia, da náutica, da geodésia, da astronomia, etc. O problema consiste em representar graficamente em um plano os pontos e as linhas de uma esfera (a terra é considerada com suficiente aproximação, esférica); isto é, representar, por meio das projeções de dois sistemas de círculos, os meridianos e os paralelos da superfície esférica.

61. Um dos métodos mais importantes de projeção cartográfica é o método da *projeção estereográfica da esfera*. Ele consiste em uma projeção central, feita de um ponto da superfície esférica em um plano perpendicular ao diâmetro, passando pelo centro de projeção.

Geralmente, faz-se passar o plano de projeção pelo antípoda do centro de projeção, ou pelo centro da esfera (*projeção estereográfica equatorial*). Nos seguintes e breves comentários nesta parte do estudo das projeções centrais, e assim da perspectiva, efetuamos projeções estereográficas equatoriais.

62. Seja C o círculo principal do papel, ou seja, a interseção da esfera com o quadro; o centro do círculo coincide com a projeção V do olho, ou seja, o ponto de vista; o círculo principal coincide assim com o já conhecido círculo de distância (Fig.63).

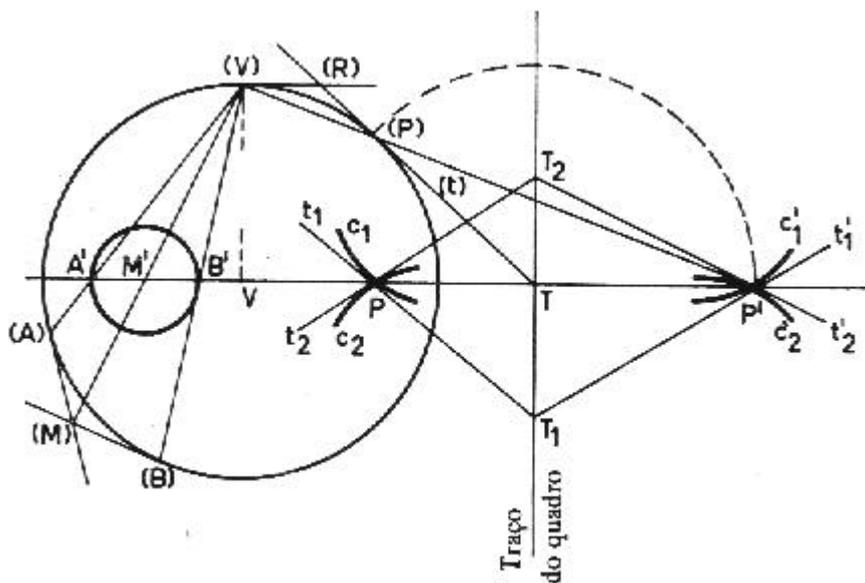


Fig. 63.

Seja P a projeção de um ponto da superfície esférica, do qual se quer achar a projeção estereográfica. Para fazer isso, rebate-se o círculo máximo da esfera, passando pelo centro de projeção e pelo ponto P no quadro: (V) é o rebatimento do centro e (P) o rebatimento do

ponto P . O raio de projeção VP rebatido em $(1') (P)$ dá, em seu ponto de interseção com o quadro, a projeção estereográfica procurada P' . A tangente (t) em (P) ao círculo rebatido, tem o traço no quadro em T : por este ponto, e perpendicularmente a VP' , passa o traço do plano tangente à esfera no ponto P .

A tangente ao círculo em (V) corta a tangente em (P) no ponto (R) ; da semelhança dos triângulos $(V) (R) (P)$ e $(P) TP'$, sendo o primeiro, por construção, isósceles, resulta que $TP' = T(P)$.

Obtém-se a projeção estereográfica de um ponto da esfera, também rebatendo no quadro o plano tangente à esfera no ponto considerado.

63. Sejam c_1 e c_2 (dados das respectivas projeções horizontais) das curvas da superfície esférica, passando por P ; as projeções estereográficas destas curvas passam por P' e tocam as imagens \mathbf{t}'_1 e \mathbf{t}'_2 das duas tangentes \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 . Estas últimas são determinadas pelos pontos T_1-P_1 e T_2-P_2 (encontram-se em um plano cujo traço é $T_1 T_2$). Observa-se então que as projeções \mathbf{t}'_1 e \mathbf{t}'_2 das tangentes coincidem com o rebatimento destas em torno do traço do plano tangente; ou seja, que o ângulo formado pelas imagens estereográficas das tangentes é igual ao ângulo que estas tangentes efetivamente formam. Disso se conclui que a *projeção estereográfica é conforme (conserva os ângulos)*.

64. Importante é a representação estereográfica de um círculo colocado na superfície esférica.

Se o círculo passa pelo centro da projeção, os raios de projeção correspondentes aos simples pontos dele, se encontram todos em um mesmo plano, e seus traços, isto é, as imagens dos pontos do círculo se encontram no traço deste plano no quadro.

A projeção estereográfica de um círculo colocado na esfera e passando pelo centro de projeção é uma reta.

Se o círculo colocado na esfera não passa pelo centro de projeção, os raios de projeção formam uma superfície cônica e a projeção estereográfica do círculo é sempre uma seção cônica.

Seja M o vértice do cone tangente à esfera ao longo do círculo que se considera. As geratrizes do cone são, em cada ponto, normais ao círculo de tangência: as projeções estereográficas das geratrizes formam um feixe de retas passando por M' e são normais à projeção estereográfica do círculo: esta projeção deve, portanto, ser, por sua vez, um círculo.

A projeção estereográfica de um círculo colocado na esfera e não passando pelo centro

de projeção, é um círculo tendo como centro a projeção do vértice do cone tangente à esfera ao longo do círculo considerado.

65. O problema fundamental da cartografia, ou seja, a representação dos paralelos e dos meridianos, é resolvido tendo presente que as projeções estereográficas dos meridianos formam um feixe de círculos tendo por pontos-base as imagens dos pólos da esfera; e que as projeções estereográficas dos paralelos são as trajetórias ortogonais das projeções dos meridianos e, portanto, formam um outro feixe de círculos com os pontos-base imaginários.

66. Conforme a posição do centro de projeção, distinguem os seguintes casos. Se o centro de projeção coincide com um dos pólos da esfera (carta estereográfica polar), o círculo principal da projeção coincide com o equador, as imagens dos meridianos são os seus diversos diâmetros, e os paralelos são círculos concêntricos em torno do ponto de vista. A posição dos paralelos é determinada rebatendo o plano de um meridiano (Fig. 64).

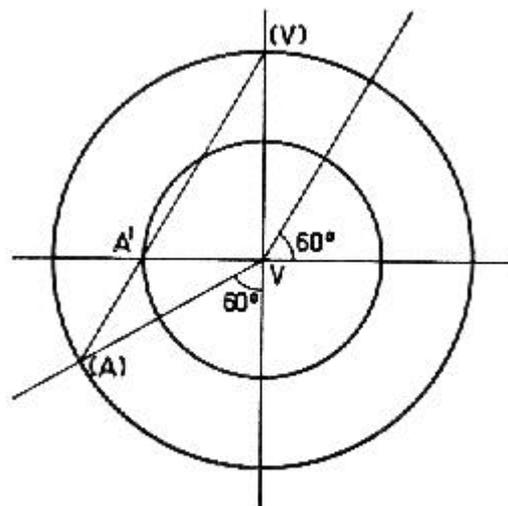


Fig. 64.

67. Se o centro da projeção se encontra no equador (carta estereográfica equatorial), os pólos da esfera se encontram no quadro, e são os pontos-base do feixe dos meridianos. Os paralelos são considerados como linhas de contato de outros tantos cones tangentes à esfera e os vértices dos quais se encontram no eixo da mesma esfera (Fig. 65).

68. Menos importante é o caso geral, ou seja, quando o centro de projeção se encontra

em um ponto qualquer da superfície esférica. A construção para esta posição do centro de projeção procede-se conforme as leis precedentemente enunciadas.

69. Um segundo método de projeção cartográfica é o método da *projeção gnomônica da esfera*. Ele consiste em uma projeção central, feita do centro da esfera, em um plano qualquer. Geralmente, o plano de projeção ou quadro é suposto tangente à esfera.

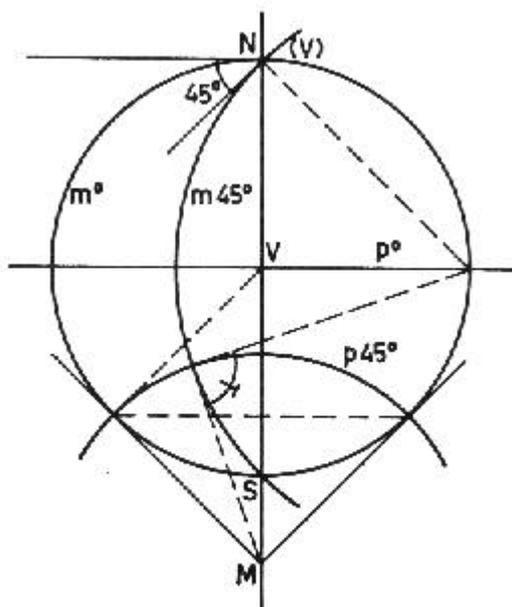


Fig. 65.

A imagem da superfície de uma meia esfera ocupa todo o plano do quadro, e as imagens de dois pontos opostos da superfície esférica coincidem.

70. A imagem do sistema dos meridianos e dos paralelos varia conforme a posição do quadro, ou seja, conforme a posição do ponto de tangência do mesmo à esfera.

Se o quadro for tangente à esfera em um dos pólos, obtém-se uma *carta gnomônica polar*, na qual o quadro corta perpendicularmente o eixo terrestre e, portanto, também os planos dos meridianos: estes últimos são projetados em um feixe de retas tendo por ponto-base o ponto de vista; o ângulo formado por dois raios é igual à

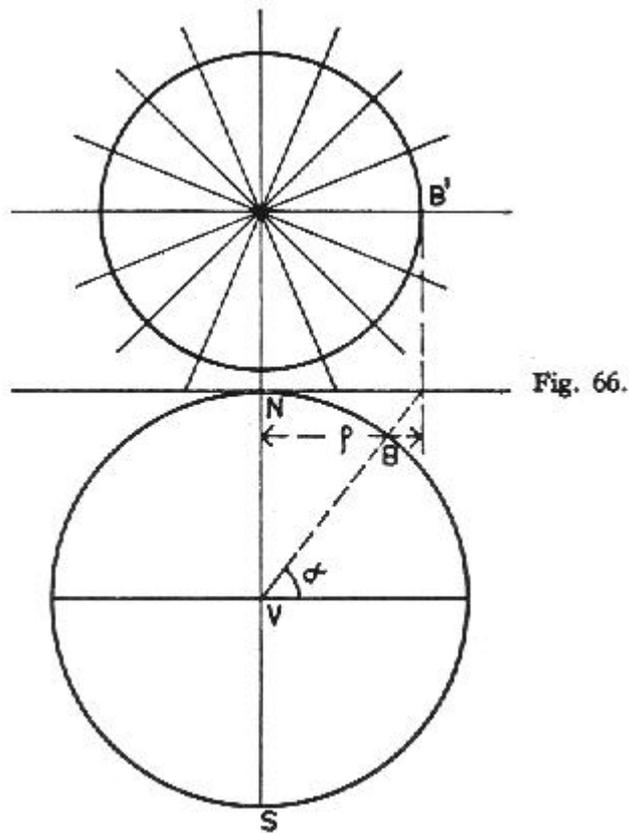


Fig. 66.

verdadeira diferença entre as longitudes dos dois meridianos correspondentes. Os paralelos são projetados em círculos concêntricos em torno do ponto de vista. A imagem de um ponto qualquer B da superfície esférica é determinada pela interseção no quadro do raio de projeção VB , como resulta da figura 66.

71. Se o quadro é tangente à esfera em um ponto do equador, obtém-se uma *carta gnomônica equatorial*. O plano tangente é, neste caso, paralelo ao eixo terrestre, e corta portanto os planos dos meridianos segundo retas paralelas ao eixo: as imagens dos

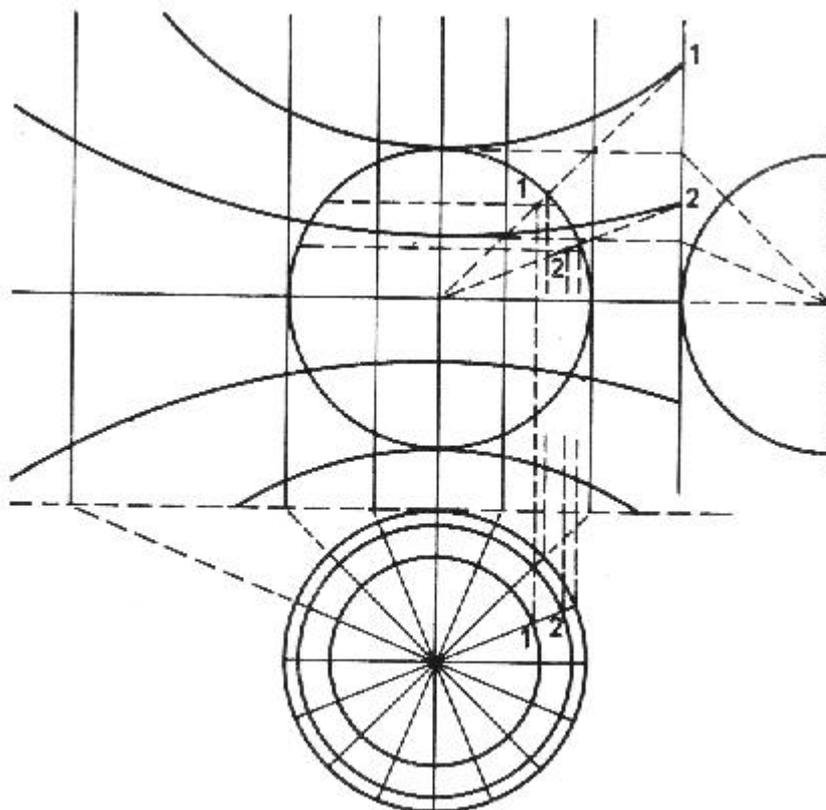


Fig. 67.

meridianos são retas paralelas entre si. A posição da imagem de um meridiano qualquer é determinada, em uma projeção horizontal, pela interseção do meridiano considerado, com o traço do quadro.

Os raios ópticos passando pelos pontos isolados de um paralelo da esfera, formam uma superfície cônica que contém dois paralelos de igual latitude norte e sul. Visto que o quadro é paralelo ao eixo do cone, isto é, corta suas duas partes, a linha de interseção que resulta deve ser uma hipérbole; a imagem do equador é uma linha reta. O ramo da hipérbole colocado ao norte do equador, e correspondente a uma certa latitude β , é a imagem do semiparalelo norte visado para o quadro e, ao mesmo tempo, imagem de semiparalelo sul da mesma latitude, oposto ao primeiro. Para o ramo colocado ao sul do equador, vale o contrário.

O método de representação gnomônica da esfera, não apresentando as vantagens que, ao invés, apresenta a representação estereográfica, é raramente aplicado.

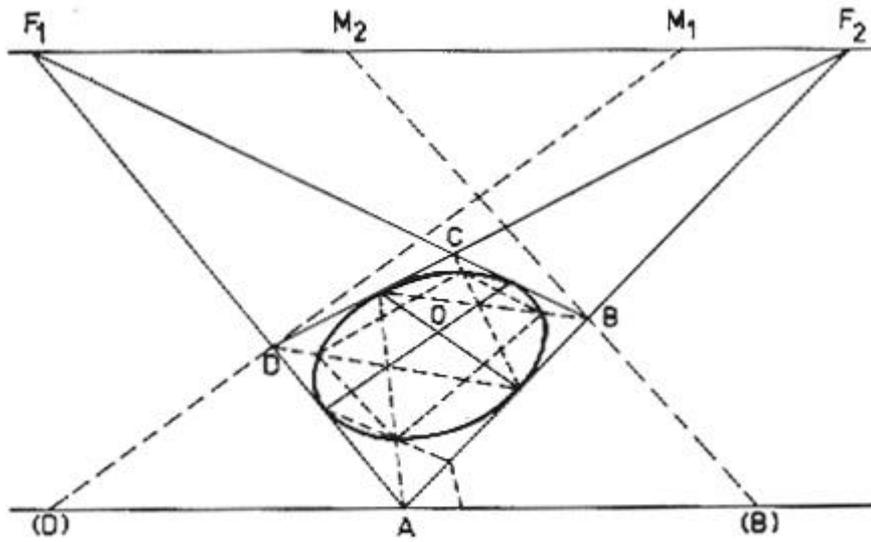


Fig. 69.

As construções precedentes (Fig. 68), que servem para determinar pontos da circunferência (e outras que podem ser encontradas), são repetidas na construção da perspectiva, por meio dos pontos de fuga dos lados das figuras inscritas ou circunscritas (Fig. 69).

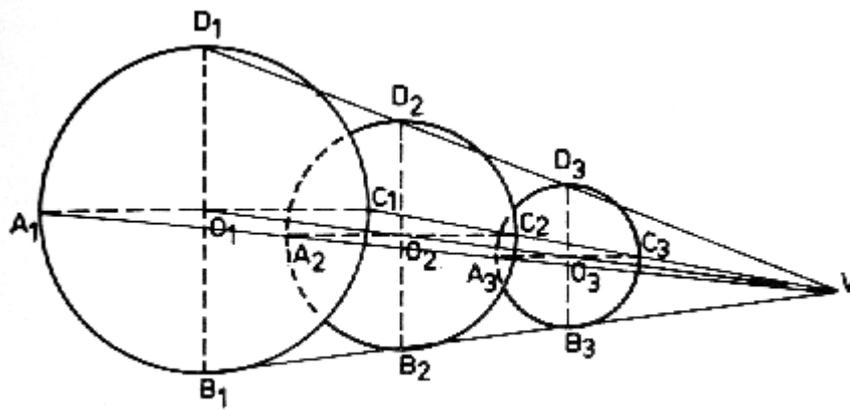
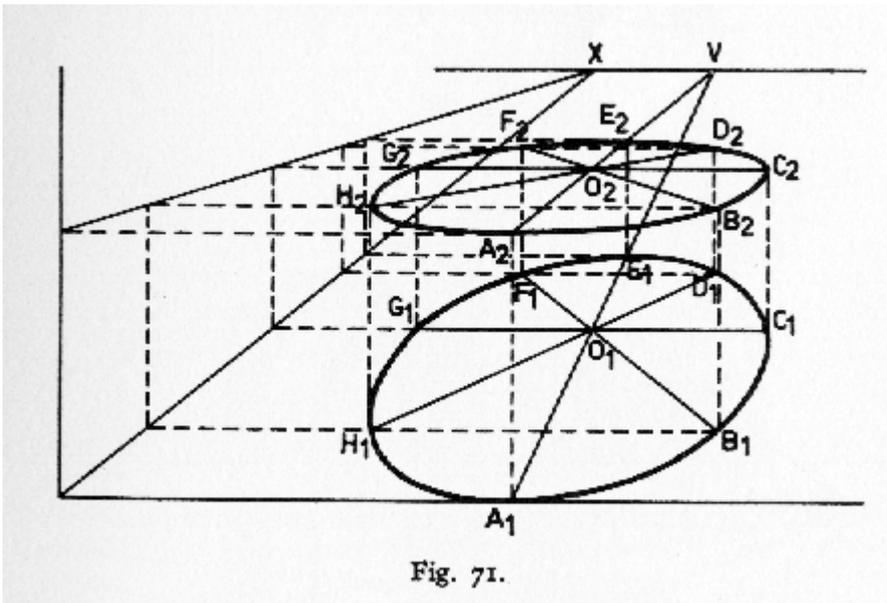
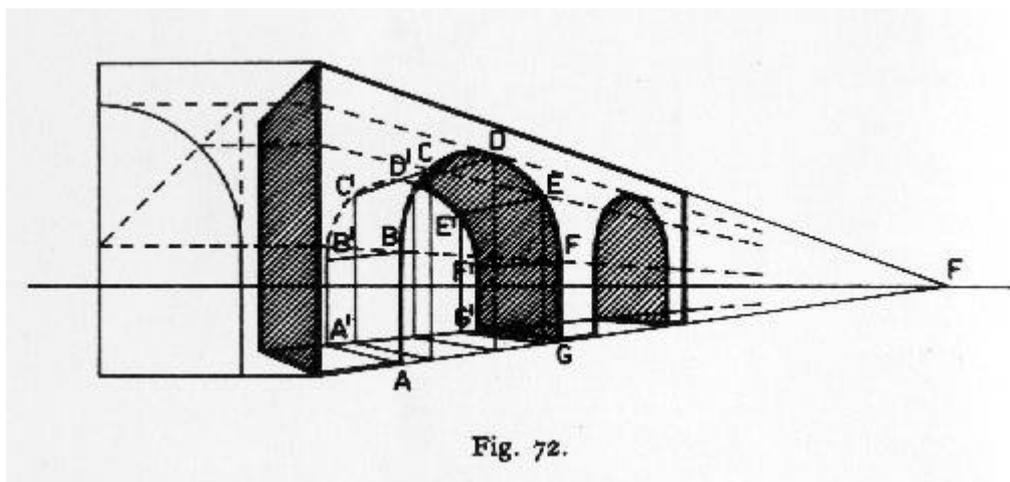


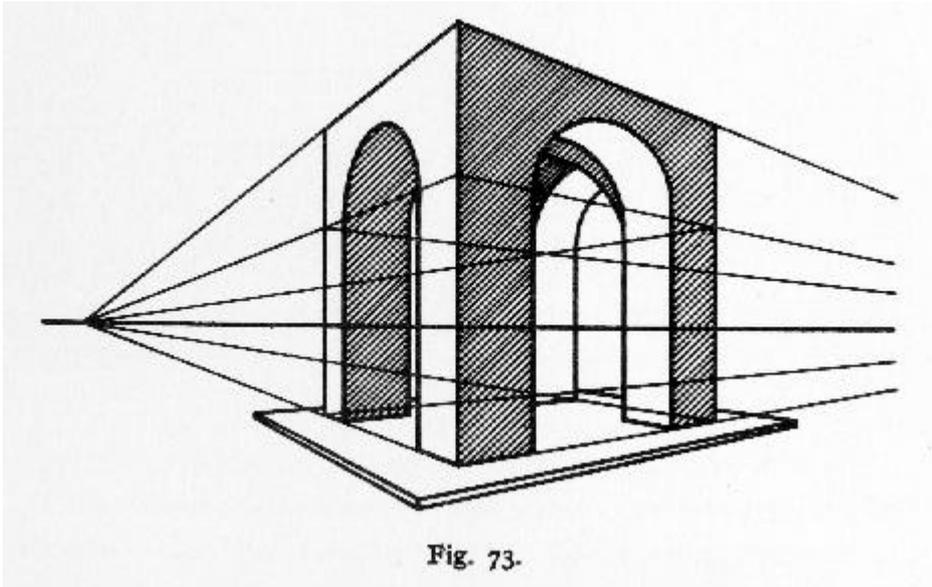
Fig. 70.



Os raios ópticos passando pelos pontos de uma circunferência formam uma superfície cônica, cuja interseção com o quadro, isto é, a imagem em perspectiva procurada, é uma seção cônica. A imagem perspectiva de um círculo colocado em um plano paralelo ao quadro é um círculo (Fig. 70).

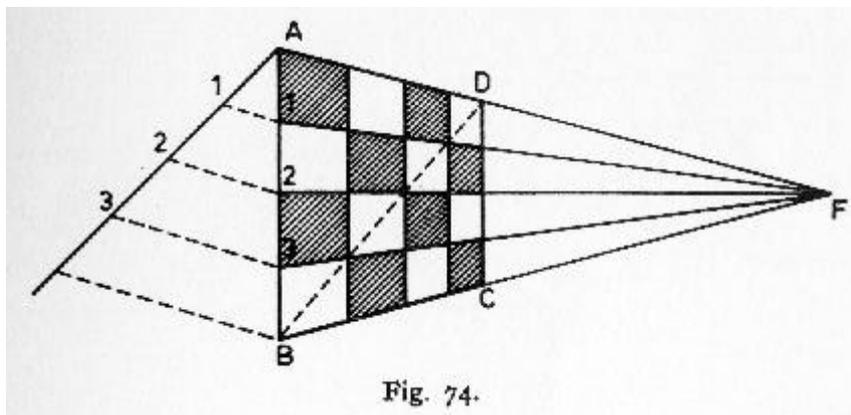
74. A imagem perspectiva de círculos de igual raio, postos em planos paralelos, e tais que os centros dos mesmos se encontrem em uma linha reta, são seções paralelas de um mesmo cilindro: os pontos correspondentes das diversas seções se encontram em retas paralelas ao eixo do cilindro.





Na Fig. 71, o mesmo problema precedente é resolvido por meio de uma projeção lateral perspectiva.

75. Nas figuras 72 e 73 são aplicados alguns dos métodos de construção anteriormente indicados.



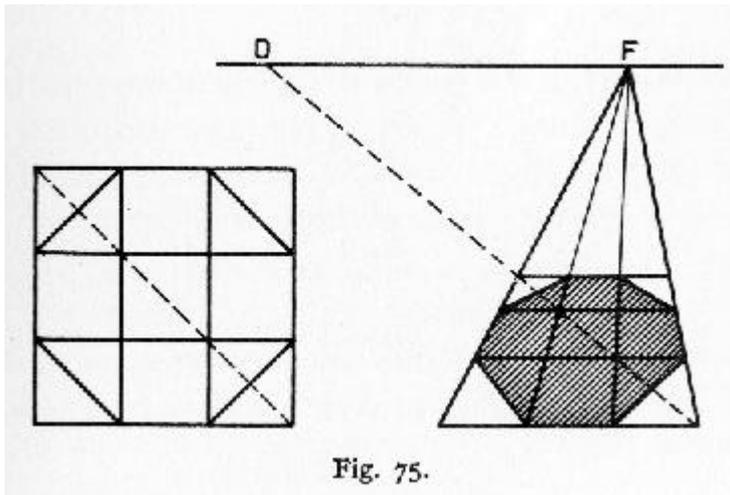


Fig. 75.

76. Um segmento de reta pode ser subdividido em um número qualquer de partes iguais, mesmo sem fazer uso de um verdadeiro ponto medidor (Fig. 74).

77. O método precedente é muito útil para construir a perspectiva de polígonos regulares (figs. 75, 76).

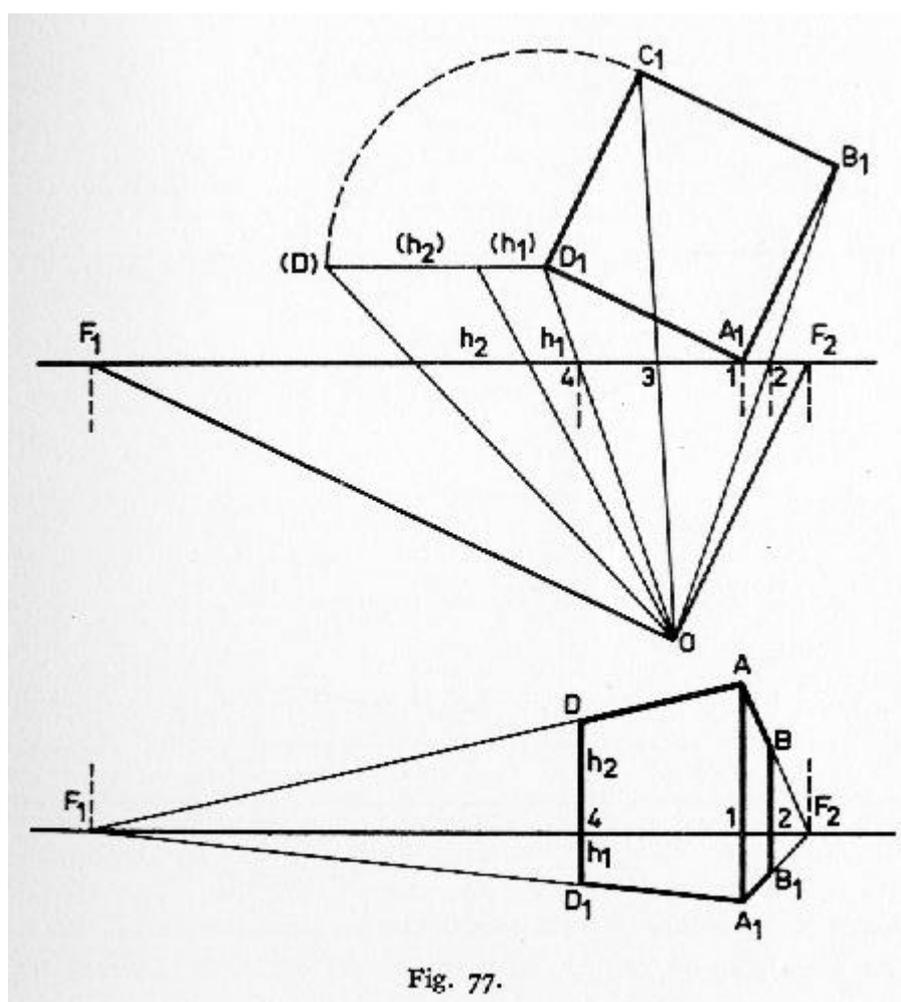
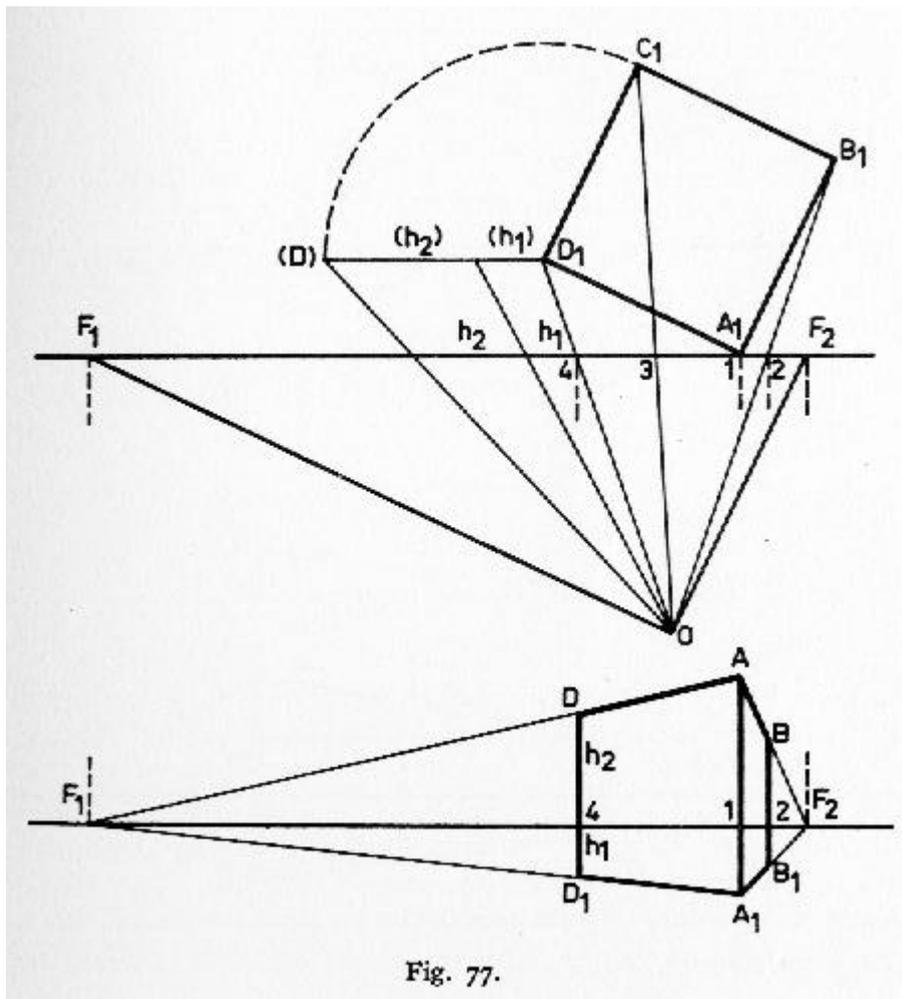


Fig. 77.

78. Quando um dos pontos de fuga das direções que se apresentam no objeto do qual se quer construir a perspectiva não encontra lugar dentro dos limites do desenho, podem-se igualmente encontrar as imagens perspectiva das retas convergentes neste ponto.

Rebatendo a parte da aresta vertical D_1D do cubo, posta acima do plano horizontal, paralelamente à linha do horizonte em $D_1(D)$, e ligando as extremidades do segmento assim obtido com o olho O , obtém-se na linha do horizonte a imagem reduzida D'_1D' do segmento considerado (Fig. 77).

79. O problema precedente pode ser resolvido também reduzindo toda a figura em uma escala menor. A distância principal reduzida de OV , por ex., em $OV/2$, corresponde um novo ponto de fuga ($F_1/2$). Os pontos correspondentes das duas perspectivas se encontram



em retas passando pelo ponto de vista V e as retas correspondentes são paralelas. Não se faz mais do que mudar o sistema de projeção, aproximando o olho ao quadro (Fig. 78).

80. Para construir as imagens perspectivas de retas paralelas a uma reta da qual se tenha a perspectiva mas não o ponto de fuga,

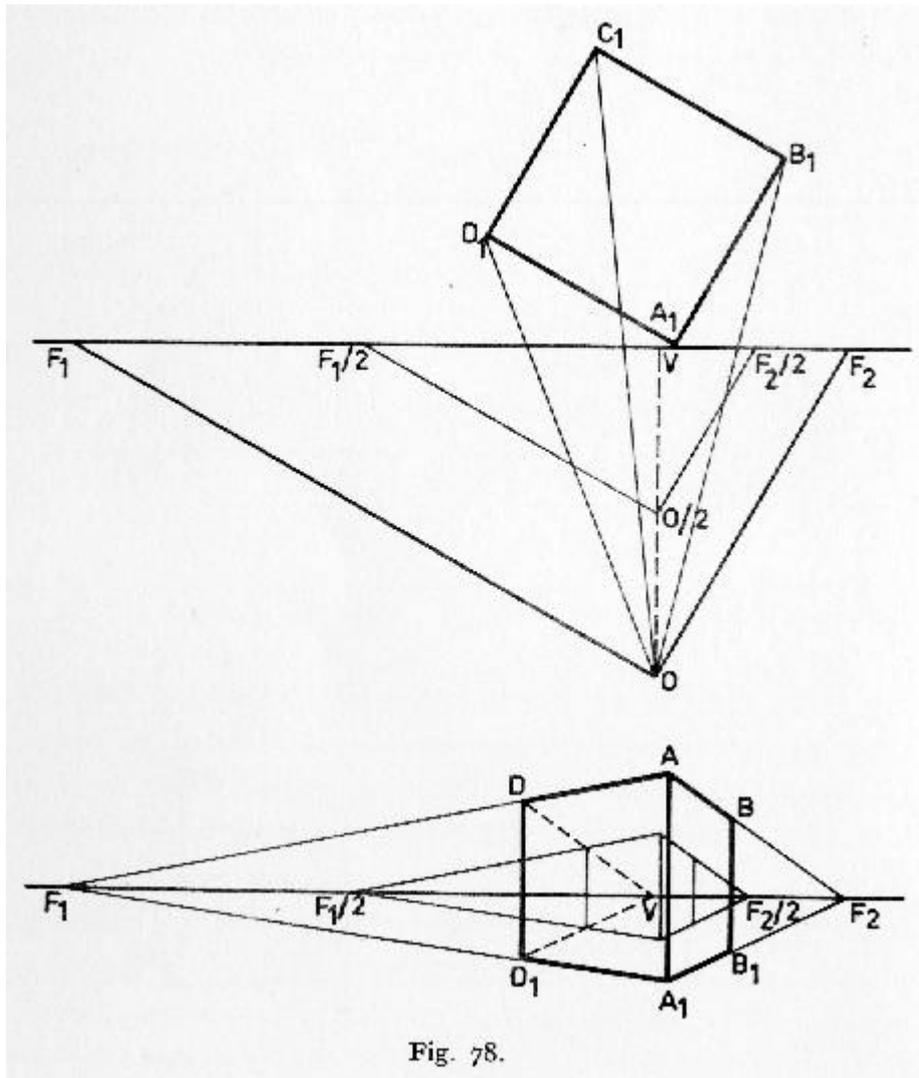


Fig. 78.

procede-se do seguinte modo e (fig. 79) . Dividem-se os segmentos $a-A$ e $b-B$, compreendidos entre a linha do horizonte e a perspectiva dada, em duas escalas verticais quaisquer em a e em b , em um número igual de partes, para, a seguir, ligar os pontos correspondentes.

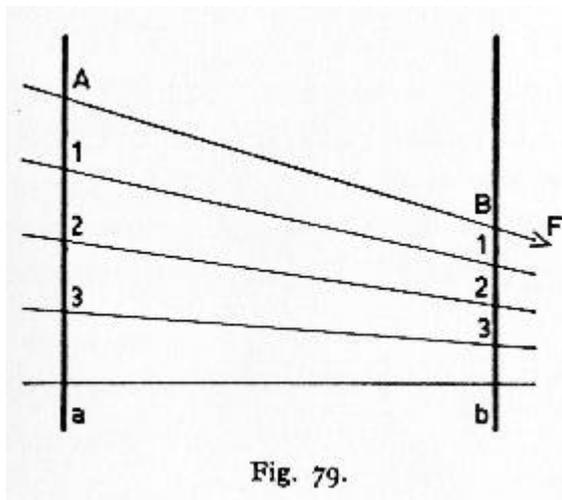


Fig. 79.

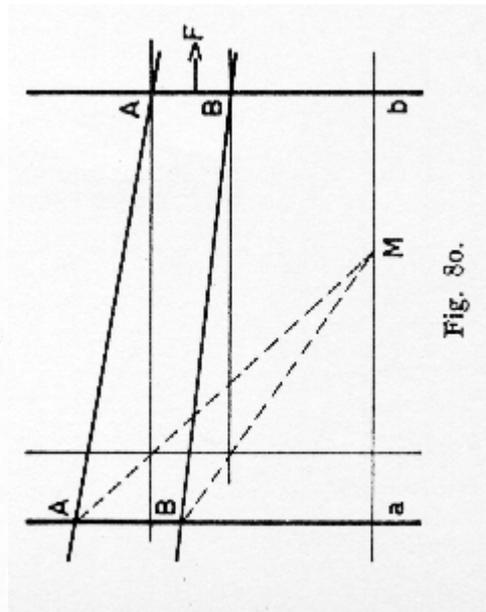


Fig. 80.

Em um segundo método (figura 80) de resolução do mesmo problema, nos servimos de um ponto medidor M qualquer.

81. Para determinar a posição do ponto medidor correspondente a uma direção da qual não se conhece o ponto de fuga, divide-se o ângulo $F_1 O V$ (Fig. 81) em duas partes iguais. O ponto de encontro da bissetriz com a linha do horizonte é o ponto medidor procurado.

De fato, visto que os segmentos $F_2 O$ e $F_2 M_2$ são iguais, serão também iguais os ângulos $F_2 O M_2$ e $F_2 M_2 O$, ou seja, $F_2 O M_2 = F_2 M_2 O = \alpha$. Têm-se, além disso, as duas relações $\alpha + \beta = 90$ graus, e $\alpha + \gamma = 90^\circ$; e, sendo $\beta_1 = \beta_2$, resulta que $\gamma = \beta$, ou seja, a reta $O M_2$ divide o ângulo $F_1 O V$ em duas partes iguais.

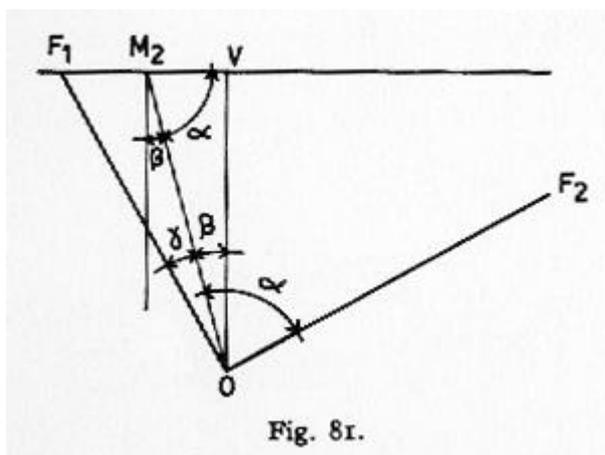


Fig. 81.

82. Quando se tenha que construir a perspectiva de um objeto muito complicado, tudo vai em vantagem da precisão do desenho, construir, além de uma projeção horizontal,

também uma projeção vertical perspectiva do mesmo objeto, em um plano vertical perpendicular ao plano de terra e ao quadro. Retas perpendiculares aos planos de projeção, passando por pontos correspondentes das duas projeções, determinam, em seu ponto de encontro, as perspectivas dos mesmos pontos.

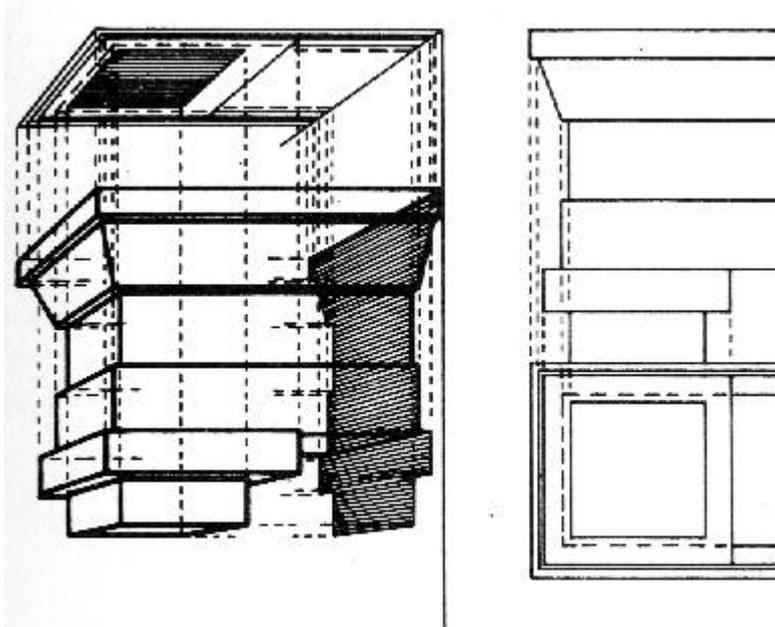


Fig. 82.

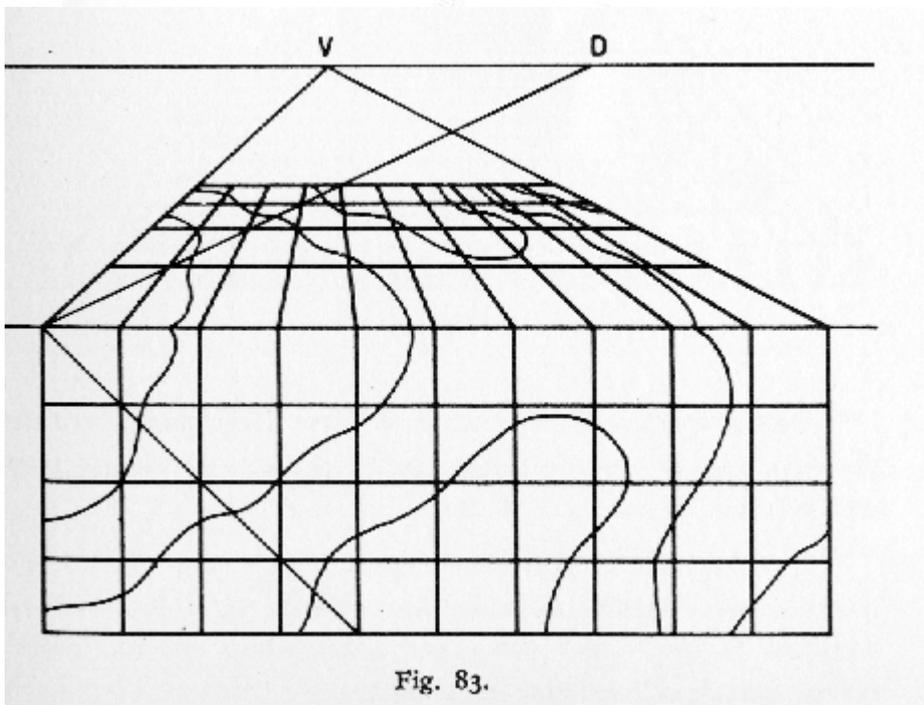


Fig. 83.

Este método, das duas projeções perspectivas, é empregado muito freqüentemente nos

velhos tratados, principalmente para construir a perspectiva de detalhes de arquitetura.

83. Um método de construção da perspectiva, muito útil em certos casos, é o chamado dos reticulados. Ele consiste em desenhar no plano de terra a perspectiva de um reticulado de malhas quadradas, de modo a se ter em cada ponto do mesmo plano uma unidade de medida que sirva para desenhar a perspectiva dos objetos considerados (figs. 83, 84).

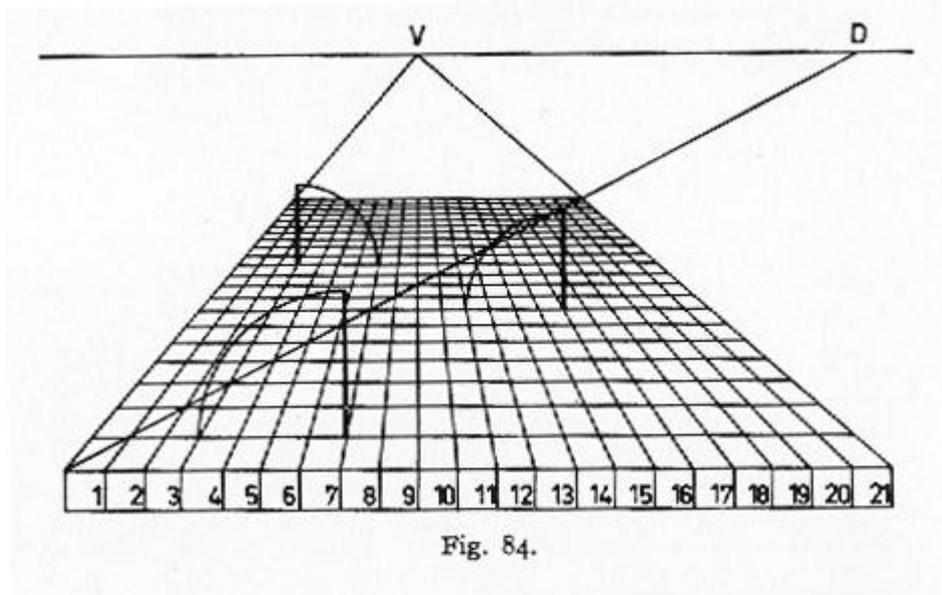


Fig. 84.

Para a construção do reticulado, serve como ponto medidor o ponto de fuga das diagonais dos quadrados, que é neste caso o ponto de distância.

Este método de construção pode ser de emprego vantajoso quando, por exemplo, se tenha que construir a perspectiva de uma paisagem inteira, com numerosas construções; ele não permite, porém, uma grande precisão de desenho.