Universidade do Oeste de Santa Catarina – UNOESC XANXERÊ

Disciplina: Matemática Financeira

Professora: Rosane Pedron Carneiro

Acadêmico(a): ____

CAPÍTULO 1

1.1. CONCEITOS

O estudo da Matemática Financeira é todo voltado para o crescimento do capital disponível com o tempo. Sim, porque não existe capital parado, completamente indisponível, como se costumava dizer antigamente**:** dinheiro embaixo do colchão. Até os depósitos judiciais têm a sua rentabilidade implícita, evitando que o débito do devedor continue aumentando.

Hoje, com os meios de comunicação de que dispomos, é muito difícil, senão impossível, alguém, mesmo de poucos recursos, ignorar que todo dinheiro pode e deve ser aplicado, seja em papéis de renda fixa ou variável, seja em empreendimentos imobiliários, industriais, comerciais e tantos outros de mais sofisticação existentes na economia brasileira e internacional, seja até em consumo de bens selecionados que vão aumentar o seu patrimônio.

Para poder aquilatar se a aplicação do nosso dinheiro foi ou está sendo bem feita, usa-se a Matemática Financeira em um dos dois regimes de capitalização existentes: simples ou composto.

1.1.1. Juros Simples e Compostos

O regime é de capitalização simples quando o juro ou a recompensa (ou ainda o aluguel) por se aplicar o capital é sempre constante ao fim de cada período de tempo, chamado de período financeiro ou simplesmente período.

Será de capitalização composta quando, ao fim de cada período, o juro desse período for incorporado ao capital que o produziu e passarem, os dois, a render juro no período seguinte. O capital vai sendo somado ao juro que produz em cada período e, portanto, o que vai render juro a cada novo período é um capital sempre maior que o anterior. Assim, o rendimento de cada período nesse regime é sempre crescente, mesmo que a taxa ou coeficiente de juro permaneça constante durante todo o prazo da aplicação ou do investimento, que é o que sempre acontece. É a capitalização dos juros ou dos rendimentos, também chamada de juro sobre juro.

Exemplo

Capital Inicial ou Principal • *P* = R$ 10.000,00
Coeficiente ou Taxa de Juros • *i* **=** 3% = 0,03
Período Financeiro • Período = mês
Prazo da Aplicação • *n* **=** 5 meses

Calcular o valor Final F ou Montante com os dados fornecidos :

<u>Juros Simples</u>

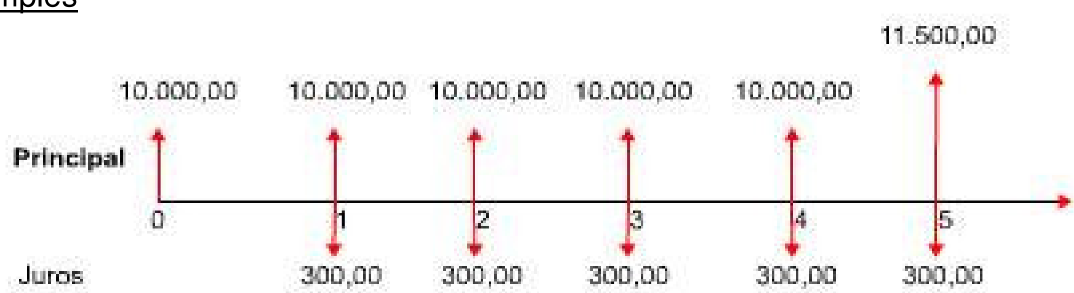


Figura 1

Ao fim de cinco meses, vamos ter o valor Futuro *F* composto do mesmo capital inicial de R$ 10.000,00 e dos juros mensais de R$ 300,00 por cinco vezes seguidas, totalizando R$ 1.500,00 – vide Figura 1.

$$J = 10.000{,}00 \times 0{,}03 = 300{,}00 \text{ por cinco meses seguidos } \therefore$$
$$J_5 = 10.000{,}00 \times 0{,}03 \times 5 = 1.500{,}00 \text{ reais}$$

$$J_n = P\,i\,n \rightarrow \textit{fórmula dos juros simples} \qquad \textbf{(1)}$$

ou

$$F_5 = 10.000{,}00 + 10.000{,}00 \times 0{,}03 \times 5 = 10.000{,}00\,(1 + 0{,}15) \therefore$$
$$F_5 = 10.000{,}00 \times (1{,}15) \therefore$$

$$F_5 = 11.500{,}00 \text{ reais}$$

$$F_n = P\,(1 + i\,n) \rightarrow \textit{fórmula do valor Futuro dos juros simples} \qquad \textbf{(2)}$$

Observação

O coeficiente ou taxa de juros (**i**), sendo uma fração do Principal (**P**) é cobrado na forma percentual (3%) ou na forma decimal ou unitária (0,03), como no exemplo dado, o que é rigorosamente a mesmíssima coisa em Matemática.

Juros Compostos

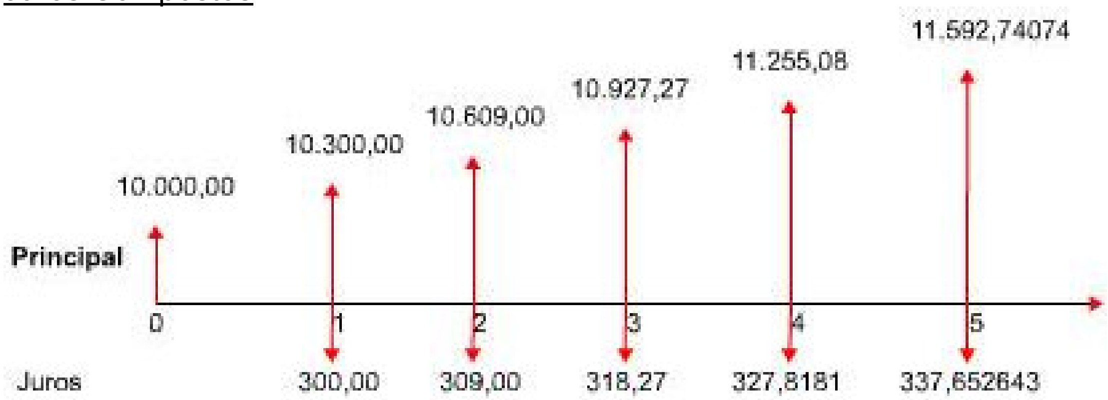


Figura 2

Ao final de cada período, o juro obtido nesse período é incorporado ao principal que o produziu e passam os dois, principal mais juro, a render juros no período que segue. Assim **:**

$$F_1 = P + J = P + P\,i \times 1 \quad \therefore \quad F_1 = P\,(1 + i)$$

$$F_2 = F_1 + J_2 = F_1 + F_1 \times i \times 1 = F_1\,(1 + i) = P\,(1 + i) \times (1 + i) \quad \therefore \quad F_2 = P\,(1 + i)^2$$

$$F_3 = P\,(1 + i)^3 \quad \text{e assim por diante até :}$$

$$F_n = P\,(1 + i)^n \rightarrow \textit{fórmula do valor futuro dos juros compostos} \qquad \textbf{(3)}$$

No exemplo $\rightarrow F_5 = 10.000{,}00\,(1{,}03)^5 = 10.000{,}00 \times 1{,}159274 = \text{R\$ } 11.592{,}74$

A diferença entre os valores futuros ou montantes obtidos nos dois regimes : 11.592,74 – 11.500,00 = 92,74, corresponde exatamente ao juro sobre juro, que é o que caracteriza o juro composto.

Pela sua própria definição, o juro simples deve ter e tem o seu uso voltado para as aplicações e investimentos de curto prazo, mais ainda aqui no Brasil, onde as taxas sempre foram e ainda são muito altas, não guardando a devida correlação com a inflação nacional nem com as taxas de juros internacionais.

O juro composto é o preferido para prazos maiores por razões óbvias e até mesmo para algumas operações de prazo muito curto, o "hot money" por exemplo, que vamos ver mais à frente.

Sempre é bom ressaltar que, no uso de qualquer das fórmulas de juros, o período financeiro (ano, semestre, mês, dia etc.) deve ser sempre o período a que se refere a taxa (anual, semestral, mensal, diária etc.) e vice- versa, é claro.

Em juros simples se usa tanto a fórmula **(1)** quanto a **(2)** que é redundante da primeira e no regime composto se utiliza quase que exclusivamente a **(3)**. Daí dizermos que na Matemática Financeira só existem duas fórmulas, uma para cada regime. As sofisticadas e complexas fórmulas que vão aparecer são simplesmente redundâncias destas duas.

$F_n = P\,(1 + i\,n)$ $\rightarrow$ *Juros Simples* $\rightarrow$ *equação linear* e
$F_n = P\,(1 + i)^n$ $\rightarrow$ *Juros Compostos* $\rightarrow$ *equação exponencial*

O que fazemos na verdade é adequar estas fórmulas às situações do momento, ou seja, trocando as suas "roupas" de acordo com o "acontecimento" do qual se vai tomar parte. Isto vai ser feito ao longo de todo o curso.

1.1.2. Conceito das Taxas de Juros

Taxas Proporcionais – duas taxas de juros, referidas a períodos financeiros diferentes, são proporcionais quando produzem o mesmo juro **J** atuando sobre o mesmo principal **P** e no mesmo prazo **n** $\rightarrow$ juros simples.
Exemplo: 2 % a.m. e 12 % a.s. em 6 meses.

Taxas Equivalentes – idem, quando produzem o mesmo valor Futuro ou Montante **F** atuando sobre o mesmo principal **P** durante o mesmo prazo **n** $\rightarrow$ juros compostos.
Exemplo: 2 % a.m. em 12 meses e 12,62 % a.s. em 2 semestres. (Como se faz o cálculo será visto no item **2.2**. à frente).

Observação: Em juros simples, taxas proporcionais são equivalentes. Em juros compostos, *não***.**

Taxa Nominal – quando referida a um período financeiro que não coincide com o período de capitalização.
Exemplo : 12 % a.a.. capitalizada mensalmente. Nesses casos se usa a taxa proporcional referente ao período da capitalização. No exemplo, 1 % a.m..

Taxa Efetiva – quando referida a um período financeiro que coincide com o período de capitalização.
Exemplo : 3 % a.m. capitalizada mensalmente.

1.1.3. Exercícios: Juros Simples

1. Calcular o juro produzido pelo capital de R$ 100.000,00 aplicado à taxa mensal de 1,38% por 35 dias. ***J = P i n***

a) Usando o prazo em dias (isto é, vamos usar a taxa mensal em dias também)
J = (100.000,00 x 0,0138) / (30 x 35) $\therefore$ ***J = 1.610,00 reais***

b) Usando a taxa mensal (isto é, vamos usar o prazo em fração de mês)
J = 100.000,00 x 0,0138 x 35 / 30 $\therefore$ ***J = 1.610,00 reais***

2. Qual o capital que, aplicado à taxa de 1,38% a. m. por 35 dias, produz um rendimento de R$ 1.610,00 ? ***Resposta: R$ 100.000,00***

3. Qual é o prazo necessário para que o capital de R$ 100.000,00 emprestado à taxa anual de 16,56% produza um juro de R$ 1.610,00?

Colocando o prazo em dias J = P i n $\rightarrow$ $n = \dfrac{J}{Pi}$

$$n = \frac{1.610{,}00}{100.000{,}00 \quad x \quad 0.1656} = \frac{1.610{,}00}{16.560{,}00} \quad \therefore$$

n = 0,097222 do ano $\therefore$

n = 35 dias

4. A que taxa anual foi aplicado um capital de R$ 100.000,00 que produziu juros de R$ 1.610,00 em 35 dias ? **Resposta: i = 16,56% a. a.**

5. Um industrial necessita de R$ 101.680,00 dentro de 42 dias para pagar os juros da carência no empréstimo tomado junto à Finame. Quanto o industrial deve aplicar, hoje, num banco que paga juros de 14,40% a.a.?

Fn = P (1 + i.n) $\rightarrow$ $P = \dfrac{F_n}{(1 + i.n)}$

$$P = \frac{101.680,00}{1 + (0,144 \text{ x } 42) / 360} \rightarrow \quad P = \frac{101.680,00}{1 + 0,0168} \quad \rightarrow \quad P = \frac{101.680,00}{1,0168} \quad \rightarrow$$

$$\text{P} = \text{R\$}100.000,00$$

6. Um investidor deposita no fim de cada mês a importância de R$ 5.000,00 numa casa bancária que paga juros de 12% a.a. Se o investidor deixar de fazer apenas o 10º depósito, qual será o valor futuro a que ele terá direito no fim do 10º mês ?
Resposta: R$ 47.250,00

7. Dois capitais, um de valor P1 = R$ 100.000,00, foram aplicados a juros de 15% a. a. e no mesmo prazo de 42 dias. Se o juro do segundo capital foi R$ 875,00 maior do que o do primeiro, qual é o valor desse capital ? ***Resposta: R$ 150.000,00***

8. Um aplicador fez um depósito remunerado (CDB) por 90 dias à taxa de 21,60% a.a. Vencido o prazo ele reaplica toda a importância resgatada à taxa anual de 23,76 % por dois meses. Sendo o valor Futuro da reaplicação igual a R$ 109.573,84, calcular o valor do depósito inicial . ***Resposta: R$ 100.000,00***

9. Uma pessoa contrai empréstimo de R$ 75.000,00 à taxa de 39,60% a.a. Em determinada data, este empréstimo é liquidado por R$ 81.187,50 e nova dívida é feita, agora no valor de R$ 40.000,00 a uma taxa inferior. O segundo empréstimo é resgatado ao fim três meses por R$ 42.880,00. Calcular o prazo do primeiro empréstimo e a taxa de juros cobrada no segundo.
Resposta: d1 = 75 dias i2 = 28,80% a. a.

10. Um empréstimo de R$ 42.000,00 foi tomado por determinado prazo à taxa de 42,00% a.a. Em certo momento o devedor paga o empréstimo e contrai outro no valor de R$ 200.000,00 a juros de 36,00% a. a. Após seis meses de efetuado o primeiro empréstimo, o devedor liquida a sua dívida remanescente, pagando R$ 26.940,00 de juros nos dois empréstimos. Calcular os prazos dos dois empréstimos.
Resposta: d1 = 60 dias d2 = 120 dias

11. Um médico deposita ao fim de cada quinzena, a juros de 1,40% a. m., a importância de R$ 10.000,00 (rendendo juros quinzenais). Sabendo-se que os dois últimos depósitos não foram efetuados, qual o valor Futuro ou montante ao fim de seis meses ? ***Resposta: R$ 104.550,00***

12. Dois capitais, o primeiro de R$ 200.000,00, foram aplicados respectivamente às taxas de 18,00% e 24,00% a.a. e produziram juros iguais a R$ 2.000,00 cada. Se o prazo de aplicação do segundo capital foi metade do prazo do primeiro, quais foram esses prazos? ***Resposta: d1 = 20 dias d2 = 10 dias***

13. Dois capitais, um de R$ 240.000,00 e outro de R$ 400.000,00, foram aplicados a juros, segundo uma mesma taxa. O primeiro rendeu em 50 dias, R$10.000,00 a mais do que o segundo em 21 dias. Calcular a taxa de juros. ***Resposta: 100 % a. a.***

14. Uma empresa faz um contrato com um banco de investimentos pelo qual se obriga a depositar por um ano, no início de cada mês, a importância de R$ 100.000,00 a juros anuais de 15,00% (contabilizados) mensalmente. Ao fim do contrato qual será o valor futuro ou montante da empresa ? ***Resposta: R$ 1.297.500,00***

15. Dois capitais foram colocados a juros, sendo o primeiro de R$ 1.000.000,00 a uma taxa 20% maior do que a do segundo e com um prazo igual à metade do prazo do segundo. Sabendo-se que o juro produzido por cada um dos capitais foi igual a R$ 30.000,00 e que a taxa anual do segundo capital é igual a 0,50% do seu prazo em dias, calcular os prazos e as taxas dos dois capitais.
Resposta: d1 = 30 dias i1 = 36,00% a.a. d2 = 60 dias i2 = 30,00% a. a.

1.1.4. Exercícios: Juros Compostos

1. Calcular o juro produzido pelo capital de R$ 100.000,00 aplicado à taxa de 1,38% a.m., com capitalização mensal, por 35 dias.

n = 35 dias = (30 + 5) dias = (35/30) meses = 1,166667 meses

$$F = 100.000,00 \ (1,0138)^{1,166667} \quad \therefore$$

$$F = 100.000,00 \ \times \ 1,016118 \quad \therefore$$

$$F = 101.611,8445 \text{ reais} \quad \rightarrow \quad \text{valor futuro} \quad \therefore$$

$$J = F - P = 101.611,8445 - 100.000,00 \quad \therefore$$

J = R$ 1.611,8445

2. Qual o capital que, aplicado à taxa de 1,38% a.m. por 35 dias com capitalização mensal, produz um rendimento de R$ 1.611,8445?

$$J = F - P = P \ (1 + i)^{n} - P \quad \therefore$$

$$J = P\left[(1+i)^{n} - 1\right] \quad \therefore$$

$$P = \frac{J}{(1+i)^{n} - 1} \quad \therefore$$

$$P = \frac{1.611,8445}{1,016118445 - 1} \quad \therefore$$

$$P = \frac{1.611,8445}{0,016118445} \quad \therefore$$

P = R$ 100.00 0,00

3. Qual é o prazo necessário para que o capital de R$ 100.000,00 emprestado à taxa nominal anual de 16,56 % com capitalização mensal produza um valor futuro ou montante de R$ 101.611,8445 ?

$T = 16,56\% \quad \therefore \quad i = \frac{T}{12} \quad \therefore \quad i = 1,38\%\, a.m.$

Observação

16,56% a.a. é chamada taxa nominal, no caso, conversível 12 vezes ao ano

$$F = P\ (1 + i)^{n} \quad \therefore$$

$$(1 + i)^{n} = \frac{F}{P} \quad \therefore$$

$$\log\ (1 + i)^{n} = \log\ \frac{F}{P} \quad \therefore$$

$$\log\ (1,0138)^{n} = \log\ \frac{[101.611,8445]}{100.000,00} \quad \therefore$$

$$n \log\ (1,0138) = \log\ 1,016118445 \quad \therefore$$

$$n = \frac{\log 1,016118445}{\log\ 1,0138} = \frac{0,015989922}{0,013705647} \quad \therefore$$

$$n = 1,166666705 \text{ meses} \quad \therefore$$

$$d = 1,166666705 \times 30 \text{ dias} \quad \therefore$$

$$d = 35 \text{ dias}$$

4. A que taxa nominal anual, com capitalização mensal, foi aplicado o capital de R$ 100.000,00 para produzir juros de R$ 1.611,8445 em 35 dias?

$(1 + i)^{n} = \frac{F}{P}$ → já que *n* sendo *35 dias* sabemos que é também *1,166667 ou (35/30) meses.*

$$(1 + i)^{1,166667} = \frac{101.611,8445}{100.000,000} \quad \therefore$$

$$(1 + i) = [\,1,016118445\,]^{1\,/\,1,166667} \quad \therefore$$

$$1 + i = 1,013799996 \quad \therefore$$

$$i = 0,013799996 \quad \therefore$$

$$i = 0,0138 \quad \text{ou} \quad i = 1,38\ \%\ \text{a m} \quad \therefore$$

$$T = 1,38\ \% \times 12 \quad \therefore$$

$$T = 16,56\ \%\ \text{a.a.}$$

5. Um industrial necessita de R$ 101.680,00 dentro de 42 dias para pagar os encargos da carência no empréstimo contraído junto à Finame. Quanto o industrial deve aplicar hoje num banco, que paga juros nominais de 14,40% a.a. capitalizados mensalmente nas suas operações passivas?

Cálculo da taxa mensal: $i = \frac{14,40\%\,a.a.}{12} = 1,20\%\ a.m.$

Cálculo do prazo em meses: n = 42 dias = (30 + 12) dias = (1 + 0,40) meses = 1,40 ou (42/30) meses.

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{101.680,00}{(1,012)^{1,40}}$$

$$P = \frac{101.680,00}{1,016840} \quad \therefore$$

$$P = 101.680,00 \times 0,983438673 \quad \therefore$$

$$P = 99.996,044220$$

P = R$ 99.996,04

6. O capital de R$ 60.000,00 foi aplicado à taxa de 15 % a.a. durante nove meses. Qual o valor futuro desta aplicação?

Observação

Como não foi explicitado o período de capitalização e a taxa dada é ao ano, vamos usar o período anual para capitalização.

$$9 \text{ meses} = \frac{9}{12} \text{ do ano} = 0,75 \text{ anos}$$

$$\mathbf{F = P\ (1 + i)^{n}}$$

$$F = 60.000,00\ (1,15)^{0,75}$$

$$F = 60.000,00 \times 1,110512$$

F = R$ 66.630,74

7. Em quanto tempo um capital aplicado a 3% a.m. duplica de valor ?

Resposta:. n = 23,44977225 meses <u>ou</u> n = 23,45 meses

8. A que taxa anual efetiva devemos aplicar nosso capital, de modo a obtermos um juro total igual a 50% do capital depois de quatro trimestres?

Resposta: i = 10,67 % a t ou T = 50 % a a

1.1.5. Juros Simples x Juros Compostos

Sendo as fórmulas de juros, linear e/ou exponencial, podemos fazer uma comparação gráfica e depois explicativa, de uma contra a outra, como segue *(Figura 3) :*

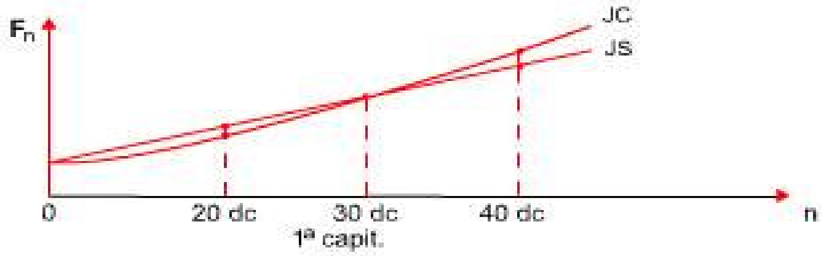


Figura 3

Antes da primeira capitalização, o regime de juros simples é mais vantajoso para o capitalista. No ponto onde as duas curvas se encontram, que é o primeiro período de capitalização, os regimes simples e composto se equivalem. Daí para frente, o regime de capitalização composto vai se distanciando exponencialmente do regime simples – vide *Figura 3.*

Usando o mesmo exemplo P = R$ 10.000,00 e i = 3 % a.m.:

a) Suponhamos um período de 20 dias, inferior ao do exemplo que é de um mês = 30 dias (ano comercial).
i = (3% / 30) 20 = 2% ao período ou i = (0,03 / 30) 20 = 0,02 ao período
J = 10.000,00 x 2% x 1 = 200,00 reais ou J = 10.000,00 x 0,02 x 1 = 200,00 reais
F = 10.000,00 + 200,00 = 10.200,00 reais ou ainda F = 10.000,00 (1 + 0,02 x 1)
F = 10.000,00 x 1,02 = 10.200,00 reais

Juros Compostos **(onde as taxas proporcionais não são equivalentes)**

$i = \left[(1 + 0,03)^{20/30} - 1 \right] = 0,019901$ *ao período* $\therefore$

J = 10.000,00 x 0,019901 = 199,01 reais $\therefore$

F = 10.000,00 + 199,01 = 10.199,01 reais ou $F = 10.000,00 \left[(1 + 0,03)^{20/30}\right]$ $\therefore$
F = 10.000,00 x 1,019901 = 10.199,01 reais

b) Para um período igual ao da primeira capitalização = 1 mês = 30 dias

<u>Juros Simples</u>
F = 10.000,00 x (1 + 0,03 x 1) = 10.000,00 x 1,03 = 10.300,00 reais

<u>Juros Compostos</u>
$F = 10.000,00 \left[(1 + 0,03)^{30/30} \right] = 10.000,00 \times 1,03 = 10.300,00$

c) Para um período maior do que a primeira capitalização, digamos 40 dias :
<u>Juros Simples</u>
F = 10.000,00 [1 + (0,03 / 30) 40] = 10.000,00 x 1,04 = 10.400,00 reais

<u>Juros Compostos</u>
$F = 10.000,00 \left[(1 + 0,03)^{40/30} \right] = 10.000,00 \times 1,040199 = 10.401,99$ reais

O entendimento do que foi feito é muito simples. Quando o período da aplicação é menor do que a primeira capitalização, nos juros simples como só se usa taxas proporcionais (porque são equivalentes), é só proceder à divisão da taxa pelo número de dias da primeira capitalização e multiplicar depois pelos dias da aplicação, o que vai refletir numa taxa menor no período. Nada de extraordinário acontece, a não ser se ganhar menos, porque se aplicou por menor prazo.

Na capitalização composta, além de se ganhar menos pelo menor prazo de aplicação, o fator de capitalização (1 + i) é mais descapitalizado do que capitalizado - expoente fracionário (20 / 30) = número de dias, no exemplo -, redundando num menor fator e conseqüentemente num menor valor futuro **F,** o que significa menos rendimento ou juros que na Capitalização Simples.

Na situação *b,* pode-se verificar com a maior facilidade que os dois regimes se equivalem, assim como também se vê com muita evidência que no caso **c ,** a capitalização composta é mais interessante para o aplicador e, mais ainda, quanto maior for o número de períodos, obviamente.

1.1.6. Valor Atual (A=P) e Desconto em Juros Compostos

Aproveitando que acabamos de falar em fator de capitalização **(1 + i)** é bom salientar dois aspectos importantes desse *elemento fundamental* para os cálculos financeiros.

1º) Já vimos, através da fórmula do montante ou valor futuro **F** que, para se capitalizar ou "agiar" um valor presente **P** a uma determinada taxa **i** por **n** períodos, basta que multipliquemos **P** pelo fator de capitalização adequado às variáveis **i** e **n.** Assim, temos :

$$F_n = P\,(1 + i)^{n} \qquad \textbf{(3)}$$

Ora, se queremos obter o valor presente *P* de uma dívida ou título com valor futuro $\mathbf{F_n}$, basta que façamos a divisão de F_n pelo fator de capitalização **(1 + i)** elevado ao número de períodos adequado *n* **:**

$$P = F_n / (1 + i)^{n} \qquad ou \qquad P = F_n.(1 + i)^{-n}$$

Este é o conceito mais usado de valor atual *A (ou P)* na capitalização composta.

Exemplo

Calcular valor atual *A* ou valor presente *P* de uma dívida de R$ 11.592,74 a vencer dentro de cinco meses à taxa mensal de 3% .

$$P = F_n / (1 + i)^{n}$$

$$P = 11.592,74 / (1,03)^{5} = 11.592,74 \times 0,862609 \quad \therefore$$

P = R$ 10.000,00

ou

$$P = Fn.(1 + i)^{-n}$$

$$P = 11.592,74 \;.\; (1,03)^{-5} = 11.592,74 \times 0,862609 \quad \therefore$$

P = R$ 10.000,00

O desconto composto *D* é muito pouco usado no mercado e é definido como todo desconto, ou seja, é o abatimento que se dá sobre o valor futuro pela antecipação do pagamento, ou seja :

$$D = F - P = P(1+i)^n - P \quad \therefore$$
$$D = P\left[(1+i)^n - 1\right]$$

No exemplo acima, teríamos**:**

$$D = 11.592,74 - 10.000,00 = 1.592,74 \text{ reais} \qquad \text{ou :}$$
$$D = 10.000,00\left[(1,03)^5 - 1\right] = 10.000,00\ (1,159274 - 1) = 1.592,74 \text{ reais}$$

A atualização de um título ou de uma dívida e, mais ainda, de um fluxo de caixa pelo regime composto é de extrema importância e uso nas operações financeiras como vamos ver um pouco mais à frente, no cálculo da equivalência de capitais, no cálculo da "IRR" ou TIR – Taxa Interna de Retorno ou do "NPV – NET PV" – Valor Presente Líquido de um investimento qualquer ou na cotação de títulos e valores mobiliários etc.

2º) Enquanto no regime de juros simples o que se usa para realizar os cálculos é a própria *taxa* , na capitalização composta o elemento usado é o *fator de capitalização ou o de descapitalização* (como sabemos, um é inverso do outro). A taxa, em juros compostos, é uma simples referência para os cálculos.

Assim, em juros simples, quando queremos somar ou subtrair taxas (referentes ao mesmo período financeiro), basta somar ou subtrair essas taxas. Vejamos**:**

4% a. m. + 3% a.m. = 7% a. m.
4% a. m. – 3% a.m. = 1% a. m.

No regime de juros compostos, não. Há que se multiplicar os fatores para se somar duas ou mais taxas e dividir também os fatores, no caso de subtração.

$1,04 \times 1,03 = 1,071200 \rightarrow 0,071200 = 7,12\%$ a. m.
$1,04 / 1,03 = 1,009709 \rightarrow 0,009709 = 0,97\%$ a. m.

1.1.7. Exercícios de Revisão (Capitalização Composta)

1. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 650,00, à taxa de 3% ao mês, capitalizado mensalmente pelo prazo de 14 meses. *Resposta: R$ 983,18*

2. Determine o juro de uma aplicação de R$ 2.850,00, a 4,5% ao mês, capitalizado mensalmente durante 8 meses. *Resposta: R$ 1.202,99*

3. Qual o montante produzido pelo capital de R$ 6.800,00 em regime de juro composto, aplicado durante 4 meses, à taxa de 3,5% ao mês? *Resposta: R$ 7.803,16*

4. Calcule o montante de R$ 8.500,00, a juros compostos de 1,5% ao mês, durante 40 meses. *Resposta: R$ 15.419,16*

5. Determine o capital aplicado a juros compostos de 3,5% ao mês, sabendo que após 8 meses rendeu um montante de R$ 19.752,14. *Resposta: 15.000,00*

6. Em que prazo uma aplicação de R$ 10.000,00 produzirá um montante de R$ 14.685,35, à taxa de 3% ao mês? *Resposta: 13 meses*

7. Um capital de R$ 20.000,00 foi aplicado a juros compostos durante 7 meses, rendendo R$ 3.773,72 de juro. Determine a taxa de aplicação. *Resposta: 2,5% a. m.*

8. O capital de R$ 12.000,00, colocado a juros compostos capitalizados mensalmente durante 8 meses, elevou-se no final desse prazo a R$ 15.559,08. Calcule a taxa de juro. *Resposta: 3,3% a. m.*

9. A que taxa bimestral devo aplicar o meu capital, de modo a obter um total de juro igual a 50% do capital aplicado no fim de 8 meses? *Resposta: 10,67% a. b.*

10. O capital de R$ 9.200,00 foi colocado em regime de capitalização composta durante 1 ano e 9 meses, à taxa de 36% ao ano. Qual o montante? *Resposta: 15.757,27*

11. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 50.000,00 à taxa de 2%a.m, considerando o regime de capitalização composta e o prazo da aplicação de 6 meses. *Resposta: 56.308,12*

12. Um capital de R$ 700,00 é aplicado a juros compostos, durante 1 ano e meio, á taxa de 2,5% a .m. Calcule os juros auferidos no período. *Resposta: 391,76*

13. Um banco remunera aplicações a juros compostos, cuja taxa é de 3% a .m. Se uma pessoa aplica hoje R$ 8.500,00 e R$ 10.000,00 daqui a 3 meses, qual será o montante daqui a 8 meses? *Resposta: 22369,29*

14. Qual o capital que, aplicado a juros compostos durante nove anos, à taxa de 10% a.a., produz um montante de R$ 17.500,00? *Resposta: 7.421,71*

15. Um determinado capital, aplicado a juros compostos durante 10 meses, rendeu uma quantia de juros igual ao valor aplicado. Determine a taxa mensal dessa aplicação. *Resposta: 7,18% a .m.*

16. Um capital de R$ 6.500,00 aplicado a juros compostos, rendeu depois de um certo prazo o montante de R$ 11.592,60. Sabendo que a taxa mensal da aplicação foi de 7,5%, calcule o prazo da aplicação. *Resposta: 8 meses*

17. Um capital, aplicado a juros compostos, durante 9 meses, rendeu um montante igual ao seu dobro. Determine a taxa mensal da aplicação. *Resposta: 8% a .m.*

18. Uma dívida de R$ 80.000,00 vence daqui a 5 meses. Considerando uma taxa de juros compostos de 10% a .m., calcule seu valor atual nas seguintes datas:
    a) Hoje.
    b) Daqui a 2 meses.
    c) Dois meses antes do vencimento.

    Resposta: (a) 49.673,71 (b) 60.105,18 (c) 66.115,70

CAPÍTULO 2

2.1. O ESTUDO TEÓRICO DAS TAXAS

2.1.1. Taxas Equivalentes – exemplos

Em juros simples é muito fácil ver que as taxas proporcionais são equivalentes, pela própria natureza da sua fórmula de montante ou F_n que é linear

Em juros compostos, isso já não acontece, também pela própria natureza da fórmula de Montante ou F_n que é exponencial. Vejamos o exemplo:

P = R$ 10.000,00 t = 3 % a.m n = 5 meses

$$F_5 = 10.000,00 \, .(1,03)^5 \therefore F_5 = 10.000,00 \times 1,159274 \quad \therefore \quad F_5 = 11.592,74 \text{ reais}$$

A taxa para cinco meses proporcional à mensal de 3 % é **:** 5 x 3 % = 15 %. Assim**:**

$$F'_5 = 10.000,00 \, . \, (1,15) \quad \therefore \quad F'_5 = 11.500,00 \text{ reais}$$

Do exemplo acima se percebe imediatamente que *3% a.m capitalizada mensalmente por cinco meses* é maior do que *3% a.m. aplicada linearmente por cinco meses ou 15% ao período*. Também é óbvio que o responsável por isso é a capitalização ou a incorporação do juro ao capital que o produziu ao fim de cada período. Então, para que F'_5 fosse igual a $\mathbf{F_5}$, qual deveria ser a taxa relativa ao período de *cinco meses* a ser usada? Evidentemente, um pouco maior do que *15% = 5 x 3%,* já que o principal e o prazo total da operação permanecem os mesmos. Mas quanto maior ? Qual seria o seu exato valor?

$$F'_5 = F_5 \quad \therefore$$

$$10.000,00 \, . \, (1 + i) = 10.000,00 \, . \, (1 + 0,03)^5 \quad \therefore$$

$$1 + i = (1,03)^5 \quad \therefore \quad i = 1,159274 - 1 \quad \therefore$$

$i = 0,159274 \rightarrow$ forma decimal <u>ou</u> $i = 15,927407\ \% \rightarrow$ forma percentual

Desta maneira, *3% a.m capitalizada por cinco meses é equivalente a 15,927407 % referente ao período de cinco meses.*

Isso nos permite concluir que, para se achar a taxa do período maior equivalente à do período menor em juros compostos, basta elevarmos *o fator de capitalização* da taxa menor (conhecida) ao número de períodos a que se refere a taxa maior (desconhecida), mantendo-se a mesma unidade de tempo nos dois períodos e, depois, subtraindo-se a unidade, pois o que se quer é a taxa e não o fator. Em outras palavras, deve-se capitalizar o *fator de capitalização* da taxa conhecida (menor) pelo quociente entre o número de períodos da taxa desconhecida (maior) e o número de períodos da taxa menor, mantendo-se sempre a mesma unidade de tempo para os dois períodos.

Exemplo

Calcular a taxa para 225 dias equivalente à taxa de 3% relativa a 30 dias.

$$i = \left[1,03 \right]^{225/30} - 1 \quad \therefore \quad i = \left[1,03 \right]^{7,5} \quad \therefore \quad i = 1,248186 - 1 \quad \therefore$$

$$i = 0,248186 \quad \text{ou} \quad i = 24,818566\ \% \quad \text{pelos 225 dias}$$

Observação
Neste caso, como os períodos foram dados em número de dias, descapitalizamos o fator da taxa de 30 dias por 30 para obtermos seu fator diário e, depois, capitalizamos esse fator por 225 dias, retiramos a unidade e temos a taxa procurada, pois **:**

$$\left[(1,03)^{1/30} \right]^{225} = \left[1,03 \right]^{225/30}$$

Agora, se quisermos a taxa do período menor equivalente à do período maior, o processo é o mesmo, só que invertido**:** devemos elevar o fator da taxa maior (conhecida) ao quociente entre o período menor e o maior, mantendo as mesmas unidades de tempo para os dois períodos, ou seja, devemos descapitalizar o fator da taxa maior pelo número de períodos a que ela se refere e depois, se for o caso, capitalizarmos o fator obtido pelo número de períodos a que se refere a taxa menor. Vejamos**:**

Qual é a taxa mensal equivalente à taxa de 15,927407 % para cinco meses ?

$$i = (1,15927407)^{1/5} - 1 = 1,030000 - 1 \quad \therefore$$

$$i = 0,03 \quad \text{ou} \quad 3\ \%\ \text{a.m}$$

Exemplo

Qual é a taxa para 63 dias equivalente à 21% para 365 dias ?

$$i = \left[(1,21)^{1/360} \right]^{63} - 1 = \left[1,000522 \right]^{63} - 1 = 1,033449 - 1 \quad \therefore$$

$$i = 0,033449 \quad \text{ou} \quad 3,344884\ \% \quad \text{pelos 63 dias}$$

ou simplesmente

$$i = (1,21)^{63/360} - 1 = 1,033449 - 1 \quad \therefore$$

$$i = 0,033449 \quad \text{ou} \quad 3,344884\ \% \quad \text{pelos 63 dias}$$

2.1.2. Exercícios

1. Calcular a taxa mensal proporcional e a equivalente a 24% a. a.. ***Resposta: 2% a. m. 1,809% a. m.***

2. Calcular a taxa nominal e a efetiva anual correspondente a 2% ao mês. ***Respos: 24% a.a 26,824% a.a***

3. Qual a taxa trimestral de juro equivalente a 22% a.a.? ***Resposta: 5,10% a. t.***

4. Um capital foi aplicado a 1,5% ao mês. Qual a taxa anual equivalente**?** ***Resposta: 19,56% a. a.***

5. Qual a taxa mensal de juro equivalente a 20% a.a.? ***Resposta: 1,531% a. m.***

6. Qual a taxa anual de juros equivalente a 1% ao mês? ***Resposta: 12,68%* a.a**

7. Qual a taxa semestral de juros equivalente a 20% a.a.? ***Resposta: 9,54% a s.***

2.2. AS TAXAS MAIS USADAS NO MERCADO

2.2.1. Taxa Overnight ou Taxa Over

A taxa *overnight* ou mais comumente chamada taxa *over* é, por definição, a taxa equivalente a um fator diário obtido quando se descapitaliza uma taxa efetiva pelo número de dias úteis a que ela se refere. Ela pode ser referida ao mês ou ao ano. Hoje, se usa mais a taxa *over* anual.

1° Exemplo

Qual é a taxa *over* mensal obtida de uma taxa efetiva de 1,9684 % referente a 26 dias úteis (du) ?

Cálculo do fator *f* diário

$$f = (1 + 0{,}019684)^{1/26} = 1{,}000750 \quad \rightarrow \quad \text{fator diário}$$

Cálculo da taxa “over” mensal t $\rightarrow$ puramente *convenção*

$$t = (f - 1)\,30 \times 100 = (1{,}000750 - 1)\,30 \times 100$$

$$t = 2{,}25\ \%\ a.\ m. \rightarrow \textit{taxa}\ \text{over}$$

A convenção da taxa *over* mensal diz **:**

1º) Retirar a unidade do fator diário $\rightarrow$ obtém-se a taxa diária na forma decimal = = 0,000750

2ª) Multiplicar a taxa decimal por 30 $\rightarrow$ obtém-se a taxa mensal na forma decimal = = 0,022500

3ª) Multiplicar a taxa mensal por 100 $\rightarrow$ obtém-se a taxa mensal na forma percentual = = 2,25 %

Para agilizar a operação, multiplicamos o fator diário sem a unidade por 3.000 = 30 x 100 **:**

$t = (1{,}000750 - 1)\ 3.000 = 2{,}25\ \%$

Observação

O que importa é o fator diário, porque é através dele que fazemos os cálculos, como vamos ver. Qualquer taxa para cálculos em juros compostos, inclusive a taxa "over", é apenas referência para se poder operar.

É claro que podemos também fazer a operação inversa, isto é, obter a taxa efetiva (referente aos mesmos 26 du) a partir da taxa "over"

$$t_{ef} = \left[\left[\frac{2{,}25}{3000} + 1 \right]^{26} - 1 \right] .\ 100 = 1{,}9684\ \%\ \text{pelos } 26\ \text{du}$$

E a taxa *over* anual ?

O BACEN convencionou que, para efeitos de cálculo de taxa *over* anual, todo período de ano possui 252 dias úteis e pronto.

2° Exemplo

Qual a taxa *over* anual obtida de uma taxa efetiva de 1,9684% referente a 26 du?

Cálculo do fator **f** diário

$$f = (1{,}019684)^{1/26} = 1{,}000750$$

Observação

Chamamos atenção outra vez para o fato de que o *que nos interessa é exatamente esse fator f diário,* porque é através dele que fazemos os cálculos. Para se chegar a ele é que usamos as taxas "over" mensal ou anual, ambas se valendo do mesmo conceito do fator, dado no início. O caminho para se achar o fator é que é diferente, partindo da taxa *over* mensal ou anual.

Cálculo da taxa *over* anual

$$T = \left[(1{,}000750)^{252} - 1 \right] 100 = 20{,}795629\ \% \quad \text{ou} \quad T = 20{,}80\ \%\ \text{a. a. (duas casas)}$$

ou em outras palavras, a taxa *t = 2,25 % mensal over* é equivalente à *taxa anual over* de *20,795629%* ou *20,80%,* pois ambas produziram o mesmo fator diário, no caso, de *1,000750.* A taxa *over*, seja na forma mensal ou anual, deve ser sempre dada com duas casas decimais, arredondada matematicamente (dois com).

Numa operação de volta podemos obter a mesma taxa efetiva referente aos 26 du do início (vamos usar a taxa anual com seis casas apenas para não dar nenhuma diferença nos cálculos) :

$$T = \left(\left(\frac{20{,}795629}{100} + 1 \right)^{\frac{26}{252}} - 1 \right) .100$$

T = 1,968399 % ∴

T = 1,9684 % pelos 26 du

Das duas formas de taxa *over* dadas, a mais usada é a anual, a partir de 02/01/98 por indução do próprio BACEN (Circular nº 2.761 de 18/06/97).

Devido ao fato de que nem todo período de ano possui 252 du – inclusive a maioria tem menos – *a taxa over anual é a própria taxa efetiva anual,* como se pode deduzir da própria definição de taxa *over* dada no princípio.

Uso da taxa *over*

A taxa *over* é usada em todos os financiamentos de títulos (venda com recompra acompanhada de compra com revenda), nas operações de *hot money*, nas negociações junto à BM&F e em muitos outros casos, como será mostrado no decorrer deste trabalho.

3º Exemplo

Um título de R$ 100.000,00 vai ser financiado por 36 dias corridos (26 du) a uma taxa efetiva anual de 20,7956 % (mesma justificativa anterior para usarmos mais que duas casas decimais).Qual será o valor de recompra do título no final do prazo?

$$\text{Valor de Recompra} = \text{VR} = 100.000{,}00 \left(\frac{20{,}7956}{100} + 1 \right)^{\frac{26}{252}}$$

VR = 100.000,00 x 1,019684 ∴

VR = 101.968,40 reais

Continuando, se o financiamento fosse realizado ao longo dos 26 du com taxas anuais de: 20,80 % nos primeiros 10 du , 21,10 % nos 7 du seguintes e 20,29 % nos últimos 9 du, teríamos**:**

$$VR = 100.000,00 \ (1,2080)^{10/252} \ . \ (1,2110)^{7/252} \ . \ (1,2090)^{9/252} \quad \therefore$$

$$VR = 100.000,00 \times 1,007527 \times 1,005332 \times 1,006801 \quad \therefore$$

$$VR = 100.000,00 \times 1,019788 \quad \therefore$$

$$\mathit{VR = 101.978,82 \quad reais}$$

Observação

Reparar que foram dadas três taxas anuais *over* (ou efetivas) para 10, sete e nove dias úteis. O que fizemos foi *multiplicar* os três fatores das taxas capitalizados pelos dias respectivos e depois multiplicar também o fator resultante pelos R$ 100.000,00 financiados e obter o VR. Isto porque, como o leitor já sabe, em juros compostos não se pode somar taxas como em juros simples mas, sim, multiplicar fatores; do mesmo modo, não se subtrai taxas mas sim divide-se fatores.

A taxa média anual "over" ou mensal do financiamento poderia também ser obtida a partir do fator resultante da multiplicação dos três fatores parciais :

$$T = \left[\ (1,0197880)^{252/26} - 1 \ \right] 100 \quad \therefore$$

$$T = (1,209117 - 1) \ 100 \quad \therefore$$

$$T = 20,91 \ \% \ a. \ a.. \quad \rightarrow \quad \text{taxa anual } \mathit{over} \text{ ou anual efetiva}$$

Se quisermos a taxa mensal *over:*

$$T = \left[(1,000754) - 1 \right] 3.000 \quad \therefore$$

$$T = 2,26 \ \% \ a. \ m.$$

2.2.2. TBF – Taxa Básica Financeira

A *TBF*, criada pela Resolução nº 2.171 de 30/06/95 do CMN, teve por principal finalidade ajudar na indução aos investidores para alongar os prazos de suas aplicações de renda fixa e também servir de base para o cálculo da *TR – Taxa Referencial,* que havia sido lançada em 1991.

A *TBF*, calculada diariamente pelo DEPEC do BACEN, sempre com quatro casas decimais, consiste em se estabelecer a média mensal ponderada, pelo volume, das captações diárias em *CDB / RDB* prefixados de 30 a 35 dias corridos, dos 30 maiores Conglomerados Financeiros do país. A amostra desses conglomerados é geralmente modificada em um ou dois participantes, por ocasião dos balanços semestrais.

Atualmente (Resolução nº 2809 de 21/12/00 do CMN) a metodologia de cálculo das **TBF** manda que " as instituições integrantes da amostra devem prestar ao BACEN, no máximo até às 16h de cada dia útil, as seguintes informações, relativas ao dia útil imediatamente anterior **:**

I – o montante *V,* em reais, dos *CDB / RDB* referidos anteriormente, representativos da efetiva captação da instituição.

II – a taxa mensal ajustada *M* dos referidos *CDB / RDB*, obtida de acordo com o seguinte:

a) para cada *CDB / RDB* emitido, deve ser calculada a correspondente taxa mensal ajustada T_i, segundo a fórmula:

$$T_i = \left[\left[\frac{1 + A_i}{100} \right]^{w/252} - 1 \right] . 100 \quad \rightarrow \quad \text{em \% portanto , onde :} \qquad \mathbf{(1)}$$

A_i = taxa anual do i-ésimo *CDB / RDB* em %
w = nº de du entre o dia da emissão e o dia correspondente ao dia da emissão no mês seguinte.

b) a partir das taxas T_i obtidas, deve ser calculada a taxa mensal média *M,* de acordo com o que segue :

$$M = \frac{\sum V_i T_i}{\sum V_i} \quad \rightarrow \quad \text{as taxas em \% , onde :} \qquad \mathbf{(2)}$$

Vi = valor do i-ésimo CDB / RDB ”

Para fins de determinação do valor *w* da fórmula **(1)**, quando inexistente o dia correspondente ao dia da emissão no mês seguinte, deve ser considerado o dia primeiro do mês posterior.

Para cada dia do mês – dia de referência – o BACEN deve calcular e divulgar a *TBF*, para o período de um mês, com início no próprio dia de referência e término no dia correspondente ao dia do mês de referência, considerada a hipótese do mês anterior.

Quando o dia de referência for dia útil, tudo bem, a *TBF* é calculada pela fórmula :

$$TBF = \frac{\sum Y_k M_k}{\sum Y_k} \quad \rightarrow \quad \text{as taxas em \%, onde :} \qquad \mathbf{(3)}$$

Y_k = montante dos *CDB / RDB* emitidos pela k-ésima instituição
M_k = taxa mensal média ajustada da k-ésima instituição

Quando o dia de referência não for dia útil, calculam-se os fatores diários da **TBF** dos dias úteis anterior e posterior ao dia de referência e tira-se a média geométrica entre os dois, obtendo um fator médio. Subtraindo-se a unidade desse fator e multiplicando-se o que restou pelo número de dias úteis compreendidos no período de vigência da *TBF* que se quer calcular, encontra-se a *própria TBF na forma decimal.* Para se obter a *TBF em percentual,* basta multiplicar a *TBF decimal* por *100.*

Usos da TBF

A *TBF* tem muitas aplicações no nosso mercado, a saber **:**

1ª) Servir como projeção ou estimativa fidelíssima das taxas de juros futuras para 30 dias, já que se trata da média ponderada pelo volume das médias igualmente ponderadas dos 30 maiores grupos financeiros do país, lamentavelmente para apenas 30 dias.

Como vamos ver no Capítulo 4, a projeção de que o mercado lança mão para prazos maiores do que 30 dias é feita através das taxas futuras de juros obtidas no mercado futuro de DI –1 dia , da BM&F, cuja filosofia é a mesma, reflete a média das taxas futuras de juros que os participantes estimam, mas com a diferença de que lá a amostra dos participantes é bem menor do que o universo dos bancos e também não tão confiável, dada a grande quantidade de manipuladores.

Não confundir especuladores com manipuladores. Enquanto os primeiros são os grandes responsáveis pelos mercados futuros em geral, pois entram no "jogo" muito bem aparelhados tecnicamente, contando com uma estrutura de pessoal, máquinas e equipamentos, laboratórios etc, tudo muito bem dimensionado e dirigido para aquela finalidade, dispostos a ganhar, mas sabendo que podem também perder, os manipuladores são nocivos ao mercado, pois tendem a levá-lo para o lado errado, enquanto apostam do lado certo, inclusive sempre que possível, usando de informações obtidas na clandestinidade – *inside information.*

2ª) Atuar também como indexador, mesmo sendo taxa de juro, para operações ativas e passivas dos Bancos, desde que obedecido o prazo mínimo de dois meses.

3ª) Servir de fiel balizador no curto prazo, para as nossas decisões domésticas e comerciais, nos apontando o que fazer com um dinheiro disponível, se convém tomar empréstimo para adquirir algum bem de que necessitamos ou é melhor esperar mais um pouco e assim por diante.

4ª) A mais importante de todas**:** ser a *TBF* a mãe da *TR – Taxa Referencial,* usada em ativos importantíssimos da nossa economia.

2.2.3. TR – Taxa Referencial e Redutor

A *TR* nada mais é do que a *TBF* expurgada do juro real pago aos aplicadores e da tributação, ambos embutidos nos valores brutos que a *TBF* apresenta. Desde a criação da *TBF* , em meados de 1995, a *TR* tem a mesma fórmula de cálculo – vide relação **(4)** à frente. Porém nesta fórmula existe a figura do redutor, ou melhor dizendo, do fator do redutor = *R***,** este sim, sofreu várias modificações ao longo dos anos, alterando por conseqüência, indiretamente, a fórmula e o valor da *TR*. O nosso livro, *Matemática Comercial e Financeira*, editado pela Makron Books do Brasil Ltda., mostra (pág.55), as diversas alterações. Neste trabalho, vamos nos ater apenas ao que é realizado hoje.

Se os juros reais e a tributação, que constituem a taxa chamada de redutor *R'* refletissem a realidade como antes, obviamente que a *TR* iria medir, com muita fidelidade, a expectativa de *CM* futura e/ou inflação, pelo menos para um mês à frente.

Aliás, esse foi o motivo pelo qual a *TR* foi criada em substituição ao *BTN fiscal.*

Acontece que, com o passar dos anos, o conceito inicial do fator do redutor foi se modificando e, hoje, a Autoridade o usa para tornar o rendimento da *TR* de tal forma que, os ganhos da Caderneta de Poupança = *(TR + 6 % a. a. de taxa nominal)* não ultrapassem o rendimento líquido dos *CDB / RDB* dos bancos e Caixa Econômica.

Sim, porque o *CDB / RDB* tem tributação e a Poupança, não. Dessa forma, se uma *TBF* está rendendo 1,4224 % de 26/06 a 26/07/01, a *TR* tem que ser tal que a rentabilidade da Poupança, no mesmo período, não ultrapasse de 65 a 70 % de 1,4224 %. Vejamos :

$$\text{Rendimento da Poupança} = \left[\, 1{,}005\,(1 + TR) - 1 \,\right] 100 \quad \therefore$$

$$\left[\, 1{,}005\,(1 + TR) - 1 \,\right] 100 \leq 0{,}70 \times 1{,}4224\ \% \quad \therefore$$

$$\left[\, 1{,}005\,(1 + TR) - 1 \,\right] 100 \leq 0{,}995680\ \% \quad \therefore$$

$$1{,}005\,(1 + TR) - 1 \leq 0{,}009957 \quad \therefore$$

$$1{,}005\,(1 + TR) \leq 1{,}009957 \quad \therefore$$

$$1 + TR \leq 1{,}004932 \quad \therefore$$

$$TR \leq 0{,}004932 \quad \therefore$$

$$TR \leq 0{,}4932\ \%$$

$$\text{Suponhamos que : } TR = 0{,}4932\ \% \quad \therefore$$

$$\text{Rendimento da Poupança} = \left[\, 1{,}005\,(1{,}004932) - 1 \,\right] 100 \quad \therefore$$

$$\text{Rendimento da Poupança} = 0{,}9957\ \% \text{ no período}$$

$$70\ \% \text{ da TBF} = 0{,}70 \times 1{,}4224\ \% = 0{,}9957\ \% \quad \therefore$$

$$0{,}9957\% = 0{,}9957\ \%$$

Observação

Como vamos ver a seguir, a *TR* desse período foi de 0,2396 %, ou seja **:**

$$RP = \left[\, 1{,}005\,(1{,}002396) - 1 \,\right] 100 \quad \therefore$$

$$RP = 0{,}7408\ \% \rightarrow \textit{rendimento real da poupança no período.}$$

Na realidade, vê-se que a *Poupança* rendeu bem menos do que o cálculo simulado. Tudo bem. O que *não pode* é render *mais* do que o líquido do *CDB / RDB***,** obviamente para não prejudicar os *grandes***,** porque esses têm onde gritar e serem ouvidos. Assim, é mais cômodo tirar dos pequenos, porque esses não têm platéia.

Pela própria definição, a *TR* deve ser calculada pela fórmula abaixo, uma vez que, como sabemos, em juros compostos, não podemos subtrair taxas e, sim, dividir os fatores :

TR = $\left(\dfrac{1+\dfrac{TBF}{100}}{R} - 1 \right).100$ $\rightarrow$ em % , onde : **(4)**

$1+\dfrac{TBF}{100}$ $\rightarrow$ fator da **TBF** (dada em %)

R = a + b. $\dfrac{TBF}{100}$ $\rightarrow$ fator do redutor, sendo :

a = 1,005

b = 0,48

TBF dada em %

Exemplo

Calcular o fator do Redutor *R* e a *TR* para uma *TBF = 1,4224 %* de 26/06 a 26/07/0x :

R = 1,005 + 0,48 x 0,014224 $\therefore$

R = 1,011828 $\rightarrow$ Só de curiosidade, *a taxa R´* do redutor é**:**

R´ = (R – 1) 100 $\rightarrow$ R´ = 1,1828 % no mesmo período = 83,16 % da TBF

R = 1,0118 $\rightarrow$ arredondando para quatro casas matematicamente, ou seja, *4 com*

Atenção

Usar o *R* somente com quatro casas decimais e sem nenhum acréscimo decimal a mais. Portanto, atenção com as máquinas de calcular *HPs*, porque elas acumulam todos os acréscimos decimais dos cálculos e, muitas vezes, o que está no visor não é exatamente o que está sendo calculado por elas. Dá diferença e grande.

$$\text{TR} = -\left[\frac{1{,}014224}{1{,}0118} - 1\right].100$$

$$\text{TR} = (1{,}002396 - 1).100 \quad \therefore$$

$$\text{TR} = 0{,}239573\ \% \quad \therefore$$

TR = 0,2396 % no período $\rightarrow$ arredondando 4 com

Observação

A mesma Resolução (nº 2809 de 21/12/00) que modificou a metodologia de cálculo da *TBF* , passando a usar dias úteis ao invés de dias corridos como antes, estabeleceu valores para a constante *b* do redutor, em função da meta para a taxa SELIC (MS) :

Para		MS	$>$	16 %	$\rightarrow$	b = 0,48
Para	16 % $\geq$	MS	$>$	15 %	$\rightarrow$	b = 0,44
Para	15 % $\geq$	MS	$>$	14 %	$\rightarrow$	b = 0.40

E assim por diante, mantendo sempre a proporção de, para cada ponto de queda no % da MS $\rightarrow$ 0,04 pontos de queda na constante *b.*

Usos da TR

A exemplo da *TBF***,** a *TR* tem inúmeras utilizações, apesar de já não apresentar mais os mesmos valores coerentes com a *TBF* de antes, por razões anteriormente abordadas.
1ª) Apesar de ser taxa de juro, é usada como indexador da Caderneta de Poupança, única aplicação a que qualquer brasileiro tem acesso.Como sabemos, a Caderneta rende *TR* acrescida de juros nominais de 6 % a. a.
2ª) Idem, é o indexador das contas do *FGTS***,** que são acrescidas também de juros nominais de 3 % a. a.
3ª) Idem, é o principal indexador dos financiamentos habitacionais da *CEF***.**
4ª) Idem**,** mas também usada como indexador de Instituições Financeiras nas suas operações ativas e passivas com prazo mínimo de um mês. É usada também como o indexador das NTN – H = Notas do Tesouro Nacional – Série H, inclusive constituindo-se no seu único rendimento (o papel é negociado com deságio)

2.2.4. TJLP – Taxa de Juro de Longo Prazo

Criada em dezembro de 1994 com o seu primeiro valor de 26,01 % a.a., mas vigência trimestral (12, 1, 2 – 3, 4, 5 – 6, 7, 8 – 9, 10, 11)**,** a *TJLP* está diretamente relacionada aos processos de alongamento e desindexação que vieram na esteira do Plano Real, de julho de 1994.

Já teve duas fórmulas de cálculo, além da atual, a qual começou em outubro /99, quando o trimestre de vigência já havia passado ao civil : 1, 2, 3 – 4 , 5, 6 – 7, 8, 9 etc.
Da mesma forma que a *TR***,** o citado livro da MAKRON Books, apresenta essas duas fórmulas iniciais, Aqui também, vamos nos contentar com que é feito hoje, que é o que interessa.

A *TJLP* de hoje é “calculada” pelo CMN – Conselho Monetário Nacional, passando pelo crivo do Ministro da Fazenda, é claro, e consiste no somatório puro e simples do risco Brasil , traduzido na taxa dos juros internacionais para os próximos 12 meses = 5,75 % (hoje), com a expectativa de inflação, medida pelo IPCA, também para os próximos 12 meses = 3,75 %.
No exato momento em que estávamos escrevendo estas linhas (dia 28/06/01) a TV anunciava os números retromencionados, que totalizavam uma TJLP **=** *9,50 % a. a.,* com vigência para os três meses seguintes, julho, agosto e setembro de 2001.Esta taxa era um pouco superior à anterior de 9,25 % a.a..

Usos da TJLP

A *TJLP* foi criada quase que exclusivamente para suprir de fundos o *BNDES,* já que é o único órgão financeiro, no meio de tantos outros, públicos e privados, que financia projetos de instalação, ampliação e construção industriais, além de outras atividades, a prazos longos e custos compatíveis com o empreendimento, através de sua subsidiária integral – *Finame* = Agência Especial de Financiamento Industrial. Ou seja, o *BNDES* é, sem a menor dúvida, o grande responsável pelo nosso Parque Industrial, que aliás foi a razão da sua criação. *Tudo bem, mas nós sabemos de tantos órgãos públicos que foram criados para desempenhar determinadas funções de importância vital no crescimento e desenvolvimento do país e que nada fizeram, além de gastar o dinheiro do povo.*

Assim é que, desde a criação da *TJLP***,** os recursos do *PIS – PASEP*, do FAT – Fundo de Amparo ao Trabalhador e do Fundo da Marinha Mercante são repassados ao BNDES e recebem a remuneração da *TJLP***.**

Além desta utilização transcendental, a *TJLP***,** embora seja taxa de juro como a *TBF* e a *TR* , serve também como indexador para os Bancos efetuarem operações ativas ou passivas, no prazo mínimo de um mês.

2.2.5. TAXA SELIC

A Taxa SELIC é a taxa básica da nossa economia, criada e administrada pelo *COPOM* – Comitê de Política Monetária, órgão normativo diretamente subordinado ao Presidente do BACEN.

Qualquer alteração na Taxa SELIC tem que ser aprovada pelos membros componentes do Comitê nas suas reuniões ordinárias mensais ou extraordinárias, a qualquer momento. Existe uma espécie de autorização prévia que o Comitê pode dar ao presidente do BACEN, chamada de *viés***,** através da qual o presidente pode mexer na taxa, sem ouvir ninguém. Se o *viés* for de baixa, a alteração só pode ser no sentido de baixar a taxa ; caso contrário, a alteração só pode ser de alta. Se o *viés* for neutro ou não existir, as alterações na Taxa SELIC só podem ser feitas em reuniões do Comitê, com o acordo do colegiado.

A Taxa SELIC é estabelecida em função da situação geral e das prioridades econômicas do país, principalmente em relação à estabilidade da moeda, isto é, da inflação (ou deflação). Daí estamos conhecendo um outro e novo instrumento de controle dos meios de pagamento e, portanto, da inflação **:** ao primeiro sinal de alta na taxa inflacionária, por qualquer razão que seja, o COPOM aumenta a Taxa SELIC **,** que por ser a taxa básica, induz os agentes financeiros a subirem imediatamente as suas taxas ativas, e nisso eles são muito rápidos, encarecendo o custo do dinheiro e inibindo o consumo. *Mutatis mutandis,* a mesma coisa se passa quando o sinal é de desaquecimento exagerado da economia, só que, aqui, os agentes já não são tão rápidos. Num primeiro momento, é o que acontece. Depois, se vai procurando a causa certa que provocou o alerta da inflação e se dá o remédio adequado. Acontece que o melhor remédio é quase sempre esse mesmo**:** inibir o consumo via redução dos meios de pagamento.

O mês de junho de 2001 foi pródigo em exemplos reais por que passou o nosso país, em termos de tomada de decisões para segurar as coisas nos seus lugares, pois até ataque especulativo aconteceu contra a nossa moeda, conjugado com a crise que parece eterna do nosso maior vizinho *e uma outra, gravíssima, pois se trata de total incompetência, descaso até, das nossas autoridades, para com o mínimo de condição de vida da população : a crise energética.* A Autoridade Monetária fez o que devia, ou seja, num primeiro momento, em abril e maio, o COPOM começou a aumentar a taxa em meio ponto percentual, nas suas reuniões mensais **;** em junho não houve outra saída a não ser aplicar um choque, aumentando a Taxa SELIC em um ponto e meio percentual, indo parar em 18,25 % a. a. com *viés* de baixa, para atenuar um pouco as pressões de alta. Isso tudo, sem falar nas outras medidas necessárias e que foram e estão sendo tomadas.

A taxa SELIC é a maior taxa (ou teto) usada para se financiar títulos do Governo Federal que estão custodiados no *SELIC – Sistema Especial de Liquidação e Custódia*, do BACEN. Serve de balizador para as instituições que operam esses papéis, onde a moeda corrente é a Reserva Bancária, ou seja, recursos disponíveis imediatamente ou, em D + 0.

2.2.6. TAXA CETIP

A taxa CETIP, a exemplo da sua irmã do SELIC, é a média das taxas operadas com os ativos que se encontram custodiados na *Central de Custódia e de Liquidação Financeira - CETIP*. Obviamente, ela segue de perto a Taxa SELIC, sendo os seus valores bastante próximos, dia a dia. Serve também como referência e em muitos casos atua até como indexador de contratos, acordos etc.

CAPÍTULO 3

3.1. DESCONTO BANCÁRIO

Obs: (Não constando algo em contrário, em todos os exercícios, deve-se usar o IOF=0,0041% ao dia, para dias corridos)

3.1.1. Exercícios

1. Um estudante descontou uma NP - Nota Promissória no Banco Duta S/A para 45 dias. Se o Banco cobra 60 % a.a. de taxa de desconto e o valor da NP é de R$ 40.000,00, qual foi o valor do desconto e quanto foi creditado líquido para o estudante na sua c/c ?

$$D_B = F\,i\,n \text{ , onde :}$$

i = 60% a.a. = 5% a m ; 45 dias = 1,5 meses ; IOF = 0,0041% x 30 = 0,123% a m

Assim, a taxa bancária, agravada do IOF = 5,123 % ao mês.

$$D_B = 40.000{,}00 \times 0{,}05123 \times 1{,}5 = 3.073{,}80 \text{ reais}$$

Valor Líquido = VL = 40.000,00 – 3.073,80

VL = R$ 36.926,20

Observação:

Como sabemos, o *desconto bancário* **=** D_B é equivalente ao juro cobrado antecipadamente sobre o valor final (ou nominal) *F* do título, à taxa pactuada, também chamada *taxa pré* ou *taxa de desconto*, pelo prazo que decorre desde a negociação até o vencimento do título. Daí termos usado à conhecida fórmula abaixo**:**

$$D_B = F\,i\,n$$

O IOF ou *Imposto sobre Operações Financeiras* é cobrado atualmente à alíquota de 0,0041 % ao dia sobre "o valor líquido da operação, correspondente ao valor de principal que é o valor nominal (ou final) do título, deduzidos os juros cobrados antecipadamente", isto é, sobre o valor que é entregue ou creditado na c/c do cliente, também chamado de *Valor Atual Bancário* **=** $\mathbf{A_B}$, pelo número de dias da operação, de acordo com o Art. 5º da Instrução Normativa da SRF nº 46 de 02/05/01. Então:

$$A_B = F - D_B = F - F\,i\,n = F\,(1 - i\,n) \quad \therefore$$

$$A_B = 40.000{,}00\,(1 - 0{,}05 \times 45/30) \quad \therefore$$

$$A_B = 37.000{,}00 \text{ reais}$$

Assim, é sobre o valor acima de R$ 37.000,00 que vai incidir a tributação do IOF.

$$IOF = 0{,}000041 \times 37.000{,}00 \times 45 = 68{,}27 \text{ reais}$$

Na realidade então, o valor líquido creditado para o estudante foi :

$$VL = 40.000{,}00 - \text{Despesas} = 40.000{,}00 - (D_B + IOF) \quad \therefore$$

$$VL = 40.000{,}00 - (3.000{,}00 + 68{,}27) \quad \therefore$$

$$VL = 36.931{,}73 \text{ reais , portanto R\$ 5,53 a mais.}$$

No entanto, apenas para facilidade de cálculo e como muitos bancos fazem - já que a diferença no cobrar o **IOF** sobre o valor nominal **F** ou sobre esse valor deduzido dos juros antecipados **(A_B)** é muito pequena, dado que os prazos das operações de desconto são curtos e os valores dos títulos descontados também não são muito grandes - nos exercícios que se seguem, vamos atuar com o **IOF** sobre o valor nominal ou final **F** dos títulos. Isso vai nos proporcionar exercícios mais interessantes, como veremos adiante.

1. Um engenheiro vai a um banco e desconta uma NP com vencimento em 50 dias à taxa bancária de 4,20 % a m. Se o líquido creditado para o engenheiro foi de R$ 417.577,50, qual o valor da NP ? ***Resposta: R$ 450.000,00***

2. A Construtora Faz e Não Cai Ltda. descontou uma duplicata no Banco Corello S/A 28 dias antes do vencimento à taxa de 2,85 % a m. Se o valor líquido creditado na c/c da Construtora foi de R$ 145.387,80 com o Banco cobrando também **TAC** de R$ 150,00 e comissão extra de 0,20% sobre o título, qual foi valor da duplicata ? ***Resposta: R$ 150.000,00***

3. A empresa comercial Vendo Mais Que os Outros Ltda. foi ao Banco Balançando S/A para descontar uma duplicata de R$ 100.000,00 42 dias antes do seu vencimento. O Banco, aquiescendo à solicitação do seu cliente, fez o desconto, creditando na c/c da empresa o líquido de R$ 95.650,00 , tendo cobrado TAC de R$ 150,00 no ato. A que taxa mensal total (incluindo o IOF) o Banco operou ? ***Resposta: i = 3 % a m***

4. Dois títulos são descontados. O primeiro, 30 dias antes do seu vencimento, à taxa de 36% a a e o segundo, 60 dias antes de vencer. A diferença entre o segundo e o primeiro título é de R$ 30.000,00. Sabendo-se que o desconto sofrido pelo segundo título foi R$ 2.635,30 maior que o do primeiro e igual 8,3936% desse primeiro, calcular os valores dos dois títulos e a taxa mensal de desconto do segundo, excluída do IOF. ***Resposta:*** F_1 ***= R$ 50.000,00*** F_2 ***=R$ 80.000,00 i = 2,50 % a m***

5. Uma empresa descontou uma duplicata de R$ 120.000,00 num banco que trabalha com taxa de desconto de 2,70% a.m., 20 dias antes do vencimento. Calcular : a) o custo total do cliente b) a receita líquida do banco na operação, depois de ter recolhido o PIS (0,65%) e o COFINS (3,00%), sabendo-se que o "funding" para o banco custou 13,20 % a.a.

$$D_B = 120.000{,}00 \times \frac{2{,}70}{3.000} \times 20 = 2.160{,}00 \ \textit{reais}$$

IOF = 0,000041 x 20 x 120.000,00 = 98,40 reais

Taxa Líquida do Banco = 2,70 – (13,20 / 12) = 1,60% a m

$$\text{Faturamento do Banco} = 120.000{,}00 \times \frac{1{,}60}{3.000} \times 20 = 1.280{,}00 \ \textit{reais}$$

a) Custo Total do Cliente = D_B + IOF = 2.160,00 + 98,40

Custo Total = 2.258,40

b) Receita Líquida do Banco = Faturamento – (PIS + COFINS)

PIS = 0,65% s/ 1.280,00 = 8,32 reais

COFINS = 3% s/ 1.280,00 = 38,40 reais

Receita Líquida = 1.280,00 – (8,32 + 38,40)

Receita = 1.233,28 reais

Observação
É muito comum o banco imputar o PIS e o COFINS ao cliente em determinadas operações, como vamos ver mais à frente, no *hot money* e no *leasing.*

6. A Cia. Cinematográfica Raposa do Século Vinte e Um S/A, descontou um título no Banco Áureo S/A 38 dias antes do seu vencimento, à taxa mensal de 2,60%. Sendo de R$ 250.000,00 o valor da duplicata e sabendo-se que o Banco exige 10% de saldo médio (SM) sobre todos os títulos que desconta, qual foi o valor líquido creditado na c/c da CIA. Cinematográfica? Que taxa de juros totais ela acabou pagando?

$$D_B = 250.000,00 \,.\left[\frac{2,60}{3.000} + \frac{0,0041}{100}\right].\,38 = 8.622,83$$

SM = 10% s/ 250.000,00 = R$ 25.000,00

VL = R$ 216.377,17 ➔ + R$ 25.000,00 bloqueados (SM)

X = (8.622,83 x 100) / 216.377,17 = 3,985092 % pelos 38 dias ou

t = 3,146126 % a m ou t = 3,15 % a m

7. Uma empresa deve R$ 173.600,00 a seu fornecedor e vai a um banco descontar um título para 20 dias e quitar a dívida à vista.Qual deverá ser o valor do título a ser dado ao banco, se este cobra 4,677 % a.m., de taxa de desconto e exige saldo médio de 10% sobre o valor do título descontado ? ***Resposta: F = R$ 200.000,00***

8. Dois títulos com vencimento, respectivamente, para 30 e 60 dias, foram descontados às taxas anuais totais (incluído o IOF) de 68,40 % e 62,40 %, verificando-se um desconto bancário total de R$ 26.500,00. Sabendo-se que o valor do primeiro título é a metade do valor do segundo, calcular os valores dos dois títulos. ***Resposta: F_1 = R$ 100.000,00 F_2 = 200.000,00***

9. Uma empresa de celulose quer abrir o seu capital e para isso vai emitir novas ações ao valor nominal de R$ 1,00 cada. A subscrição será feita com 40 % em espécie no ato, e o restante em três notas promissórias de mesmo valor cada, com vencimentos, respectivamente para dois, quatro e seis meses após o lançamento. O contrato com o banco de investimento responsável pelo lançamento é de 800 milhões de ações, e a forma do “underwriting” é “stand-by”, ou seja, colocação de todo o lote de ações acordado. Sabendo-se que a comissão cobrada pelo BI é de 2% sobre o valor nominal e paga à vista na data do lançamento e que a taxa de desconto para NP do mercado anda por volta de 4,50 % a.m., qual o valor líquido de toda a emissão na data do lançamento? ***Resposta: R$ 695.238.400,00***

CAPÍTULO 4

4.1. RENDAS OU ANUIDADES

4.1.1. Conceitos e Classificação

Renda é uma sucessão de capitais que vão se tornando disponíveis em épocas diferentes, um após o outro. Esses capitais, também chamados *termos ou anuidades,* podem ser iguais ou não e se tornar disponíveis a intervalos (períodos) regulares (mês, bimestre, trimestre etc.) ou não. Se forem iguais, teremos uma *renda constante* e se os períodos entre dois termos consecutivos forem regulares (sempre os mesmos para uma mesma Renda), estaremos diante de *uma renda uniforme.* Entre dois períodos consecutivos existirá sempre uma taxa de juros para cada renda, dada em relação ao período considerado.

No presente estudo, veremos apenas as rendas constantes e uniformes**,** usando sempre *juros compostos,* pelo extraordinário emprego que o nosso Mercado Financeiro faz desse tipo de renda, como veremos mais à frente.

As rendas se classificam também segundo a data da disponibilidade ou vencimento do seu primeiro termo em **:**

a) Rendas Imediatas ou Postecipadas – são as mais usadas e acontecem quando o primeiro termo se torna disponível ou vence ao fim do primeiro período após a época zero, também chamada Época do Contrato *(Figura 1)*

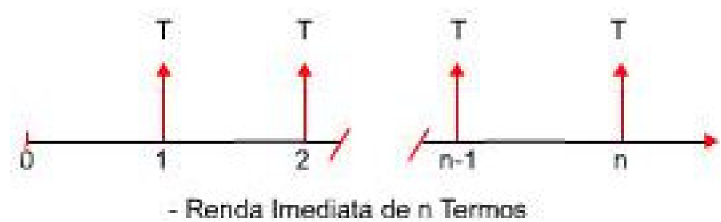


Figura 1 – Renda imediata de **n** termos

b) Rendas Antecipadas – quando o primeiro termo se torna disponível ou vence antecipadamente, já na época zero *(Figura 2)*

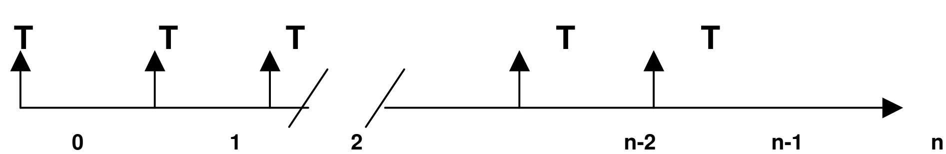


Figura 2 – Renda antecipada de **n** termos

c) Rendas Diferidas (ou com Carência) – quando o primeiro termo se torna disponível ou vence ao fim de *m +1* períodos a contar da época zero, dizemos que se trata de uma *renda diferida de m períodos* ou que possui uma *carência de m períodos (Figura 3).*

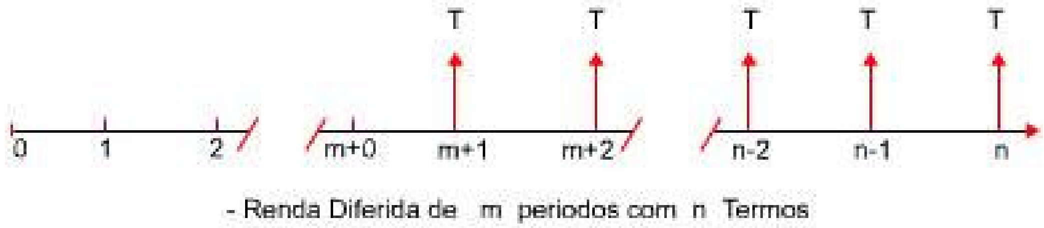


Figura 3 – Renda diferida de *m períodos* com *n termos*

4.1.2. Rendas Imediatas

O estudo das rendas visa sobretudo o cálculo do seu valor – *A* e/ou do seu Valor Final ou Montante – *M***.**

Valor Atual – A_I (Atual das Imediatas)

Suponhamos uma renda imediata de *n* termos *T* à taxa *i* de juros. O seu valor atual – A_I é a soma dos valores atuais dos seus Termos, ou seja, é o somatório dos valores dos *n* termos descapitalizados à taxa *i* da época em que estão para a época zero **(***Figura 4).*

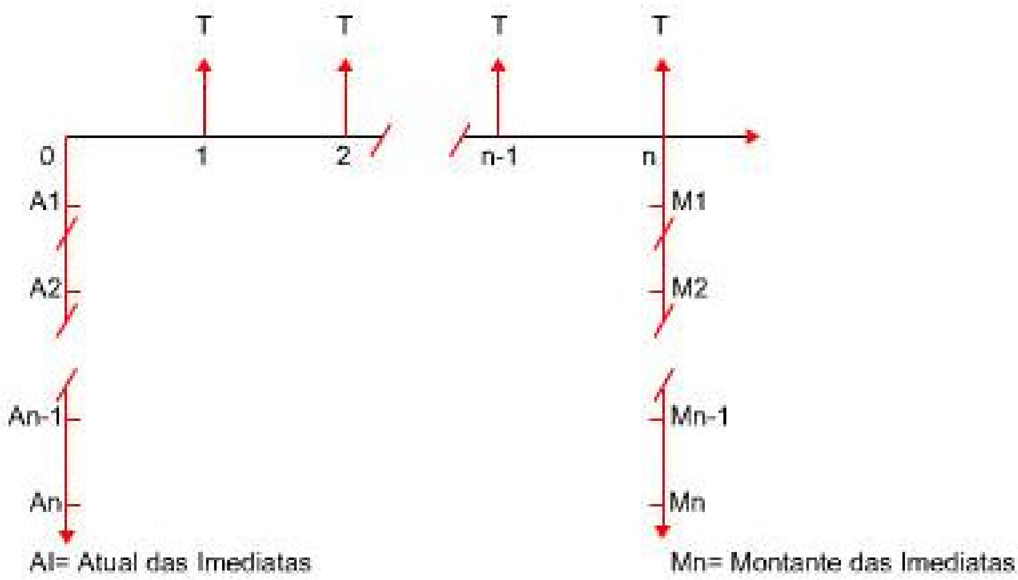


Figura 4

$A_I = A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{n-1} + A_n$, onde **:**

$$A_1 = T / (1 + i)^1$$
$$A_2 = T / (1 + i)^2$$
$$A_{n-1} = T / (1 + i)^{n-1}$$
$$A_n = T / (1 + i)^n \quad \therefore$$

$A_I = T/(1+i)^1 + T/(1+i)^2 + \ldots\ldots\ldots + T/(1+i)^{n-1} + T/(1+i)^n \therefore A_I = T\,[1/(1+i)^1 + 1/(1+i)^2 + \ldots\ldots\ldots + 1/(1+i)^{n-1} + 1/(1+i)^n] \therefore$

OU

$$A_I = T \sum_{p=1}^{p=n} 1/(1+i)^p \qquad \text{onde :}$$

$\sum_{p=1}^{p=n} 1/(1+i)^p \rightarrow$ soma dos termos de uma PG (Progressão Geométrica) onde o último termo é $1/(1+i)^n$, a razão é igual a $1/(1+i)$ e o primeiro termo igual a $1/(1+i)$

Aplicando a fórmula da soma dos termos da PG $\rightarrow$ $S_n = (a_n \times q \angle a_1)/(q-1)$ e desenvolvendo os cálculos, vamos chegar a **:**

$$\sum_{p=1}^{p=n} 1/(1+i)^p = [(1+i)^n - 1]\,/\,i\,(1+i)^n = a\ n\ i \rightarrow \text{convenção internacional}$$

$$A_I = T\,[\,[(1+i)^n - 1\,]\,/\,i\,(1+i)^n\,] = PV_I$$

$$VP = T.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

1º Exemplo

Calcular o *A_I ou PV_I* de uma renda imediata de seis termos mensais *T* de valor *R$ 100,00* cada à *taxa mensal de 3 %.*

a) Usando a relação (3) :

$$A_I = 100{,}00 \times [\,[\,(1{,}03)^6 - 1\,]\,/\,0{,}03 \times (1{,}03)^6\,] \quad \therefore$$

$A_I = 100{,}00 \times 5{,}417191 = 541{,}719144$ reais $\rightarrow$ **A_I** = *541,72 reais*

2º Exemplo

Calcular o valor de cada termo mensal T ou PMT de uma renda imediata de seis meses cujo valor atual A_I = PV_I é igual a R$ 541,719144 à taxa de 3 % a.m.

a) $T = 541{,}719144 \times \frac{1}{5{,}417191} = 541{,}719144 \quad x \quad 0{,}184598 \quad \therefore \quad T = 100{,}00 \ reais$

b) Usando a programação específica da HP – 12 C **:**

6 n 3 i 541,719144 CHS PV_I PMT T → visor = *100,00 reais*

Valor final ou montante – M_I → na época do último termo

Olhando a *Figura 4* podemos ver que, analogamente ao *valor atual A_I,* o *montante M_I* de uma renda imediata de **n** termos de valor **T** cada um à taxa **i** na época do último termo, é o somatório dos montantes desses termos capitalizados da época em que estão para a época do último deles ou o mesmo que capitalizarmos o **A_I** da época zero para a época **n**, à taxa **i.** Assim **:**

$$M_I = A_I \times (1 + i)^n$$

$$VF = P.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

4.1.3. Rendas Antecipadas

Valor Atual – A_A e Montante – M_A

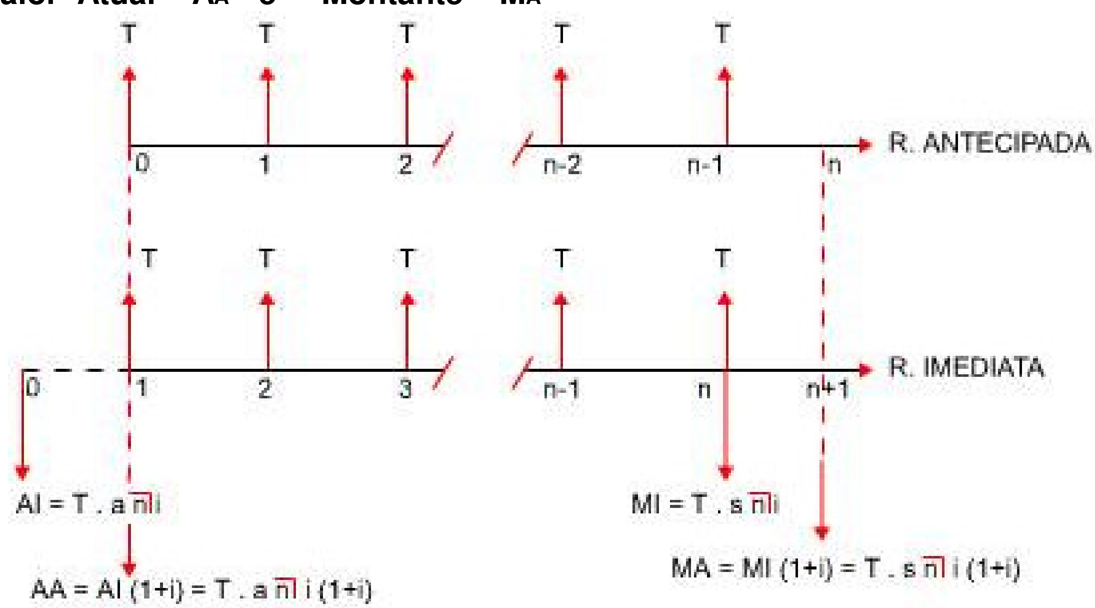


Figura 5

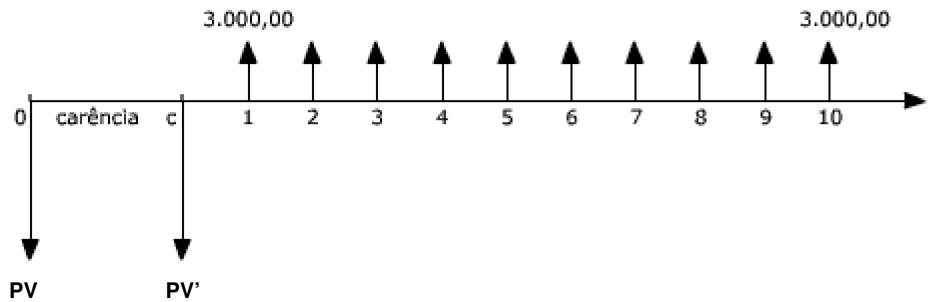
Vê-se com muita facilidade numa simples olhadela para a Figura 5 que, nas *rendas antecipadas*, temos fórmulas muito parecidas com as das rendas imediatas correspondentes.

$$VP = P.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^{n-1}}\right] \qquad VF = P.\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)$$

4.1.4. Rendas Diferidas

4.2. EXERCÍCIOS

1. Um contrato de mútuo obriga o devedor a fazer 10 pagamentos bimestrais de R$ 3.000,00 com os juros sendo contados à taxa efetiva de 18 % a.a.. Calcular o valor presente do contrato (PV), sabendo-se que existe uma cláusula de carência de cinco meses. ***Resposta: PV = R$ 24.134,64***



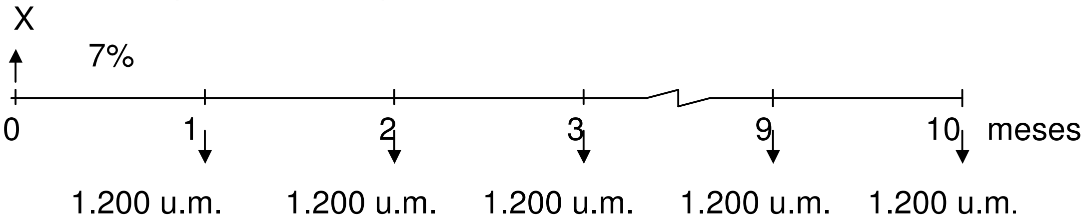
2. Calcular o valor mensal do depósito a ser efetuado ao fim de cada mês, numa conta remunerada a 1,35 % a. m., de forma que se possa constituir em 12 meses um fundo tal que, permita quatro saques bimestrais e consecutivos de R$ 2.000,00 cada , sendo o primeiro no final do 15º mês a contar da data original das mensalidades**.** ***Resposta: R$ 571,04***

3. Um advogado deposita R$ 10.000,00 no fim de cada mês na Caixa de Poupança de um Banco Multinacional que remunera os depósitos em 1,40 % a.m.. Após seis meses, o advogado quer retirar a sua poupança em 12 parcelas mensais, iguais e sucessivas, sendo a primeira ao fim de 30 dias. Supondo que a taxa de juros subisse para 1,50 % depois dos seis primeiros meses, calcular o valor de cada parcela de saque. ***Resposta: R$ 5.696,96***

4.2.1. Exercícios de Revisão

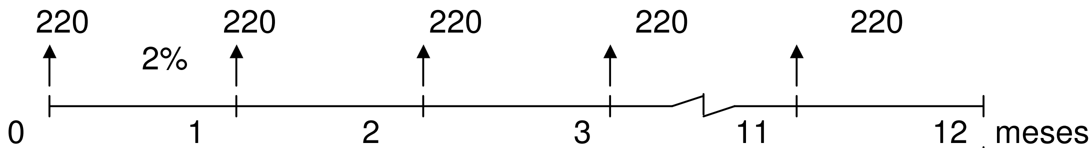
1. Interprete cada problema e depois calcule o valor do “X”

a)



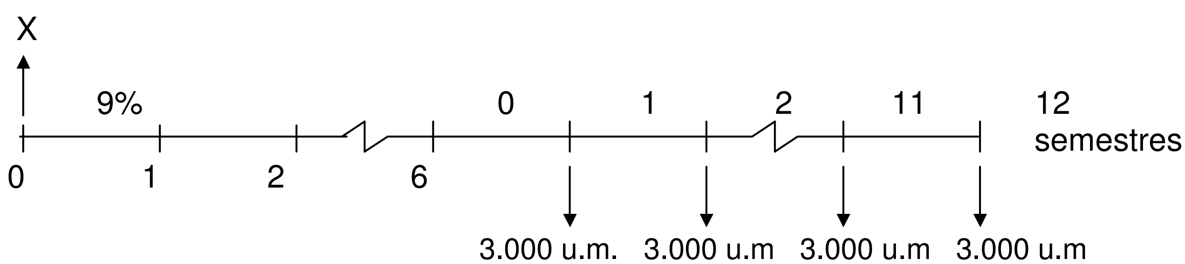
R: 8.428,30 u.m.

b)



R: 3.009,67 u.m.

c)



R: 12.809,12 u.m.

2. Qual o valor atual de uma renda imediata (postecipada) de 15 termos (prestações) trimestrais de 500 u.m., à taxa de 6% ao trimestre? Resposta: 4.856,12 u.m.

3. Um aparelho de televisão foi comprado com 10 prestações mensais antecipadas de 100 u.m. Sabendo-se que os juros são de 2% ao mês, qual o preço à vista do televisor? Resposta: 916,22 u.m.

4. Uma pessoa deposita 600 u.m. no fim de cada trimestre, a 24 % a. a., durante 3 anos. Calcular o montante. Resposta: 10.121,96 u.m

5. Que dívida pode ser amortizada com 20 prestações anuais de R$ 2.000,00 à taxa de 5% a. a., devendo a 1ª prestação ser paga no ato do empréstimo? Resposta: R$ 26.170,64

6. Qual o valor da prestação anual que, a 4% a. a., em 20 anos, amortiza a dívida de R$ 500,00? Resposta: 36,79

7. Uma empresa deposita 2.000 u.m. no início de cada semestre, a 20% a. a., durante 5 anos. Qual o montante. Resposta: 35.062,33 u.m.

8. Um empréstimo, cujo principal é de R$ 20.000,00, foi realizado a juros compostos, e deve ser liquidado mediante o pagamento de 12 prestações mensais, iguais e sucessivas. Determinar o valor dessas prestações sabendo-se que a taxa de juros cobrada é de 12% a.a, capitalizados mensalmente, e que a 1ª prestação ocorre 30 dias após a libertação dos recursos. Resposta: 1.776,98

9. Um empresário deseja obter um financiamento para adquirir um equipamento, cujo valor à vista é de R$ 10.000,00. Para diminuir o valor das prestações, ele pretende dar uma entrada de R$ 3.000,00 por ocasião da compra. Determinar o valor das 24 prestações mensais, iguais e sucessivas, para a parte financiada, sabendo-se que o financiamento é realizado a juros compostos de 15% a.a, capitalizados mensalmente, e que a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos. Resposta: 339,41

10. Um conjunto de sofá é vendido à vista por R$ 600,00 ou a prazo em 4 prestações mensais iguais, sendo dados ao cliente 2 meses de carência, isto é, a 1ª prestação só é dividida daqui a 3 meses. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros do financiamento for 4,5% a .m.? Resposta: 182,64

11. Um equipamento cujo o valor à vista é de $ 25.000,00 está sendo financiado a juros compostos de 12% ao ano, capitalizados mensalmente, no prazo de um ano. Determinar o valor que deve ser dado de sinal, a título de entrada, para que o valor das 12 prestações mensais, iguais e sucessivas seja limitado a $ 1.700,00. Assumir que a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos. Resposta: 5.866,37

12. Um lote de um balneário é vendido à vista por R$ 20.000,00, ou a prazo nas seguintes condições: 24 prestações mensais de R$ 900,00 uma prestação adicional um ano após a venda. Se a taxa de juros do financiamento for de 2% a .m., qual o valor da prestação adicional? Resposta: 377,61

13. Um financiamento, com o principal de $ 10.000,00, deve ser liquidado em 10 prestações mensais, iguais e sucessivas, com uma taxa de 1,2% ao mês, no regime de juros compostos. Assumir os meses com 30 dias e determinar o valor dessas prestações nas seguintes hipóteses:

a) A 1ª prestação deve ser paga 30 dias após a liberação dos recursos; Resposta: 1.067,18

b) A 1ª prestação deve ser paga no ato da liberação dos recursos, a título de entrada; Resposta: 1.054,53

c) A 1ª prestação deve ser paga 120 dias após a liberação dos recursos. Resposta 1.106,06

CAPÍTULO 5

5.1. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

5.2. SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO

O *Sistema Francês de Amortização* é também chamado de *Sistema de Prestações Constantes – SPC*, pelo fato de suas prestações serem todas iguais entre si. Como os seus períodos são também iguais ao primeiro, e a primeira prestação acontece também no fim do primeiro período, pode-se dizer que o Sistema Francês é a cópia fidelíssima das *Rendas Imediatas Uniformes e Constantes na Capitalização Composta*, que vimos no *item 2.4* do Capítulo 2. Assim, o valor atual *PV* das rendas é a dívida *D* do sistema francês, o valor dos pagamentos *PMT* das rendas é o valor das prestações *T* do Sistema. O número de pagamentos ou prestações **n** e a taxa de juros *i* são os mesmos também → *Figura 1 :*

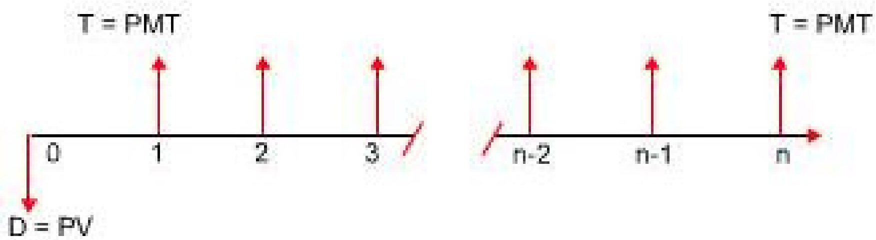


Figura 1

$PV = PMT \cdot a_{n\,i}$ → Rendas Imediatas ∴

$D = T \cdot a_{n\,i}$ → *Sistema Francês* ∴ *(1)*

$T = D \cdot 1 / a_{n\,i}$ → *Valor de cada Prestação* *(2)*

1º Exemplo

Uma dívida de R$ 600.000,00 vai ser paga pelo sistema francês em seis prestações semestrais à taxa de 20 % a.s. Calcular o valor das prestações e montar a planilha teórica de financiamento, não levando em conta o IOC ou IOF → *Figura 2*

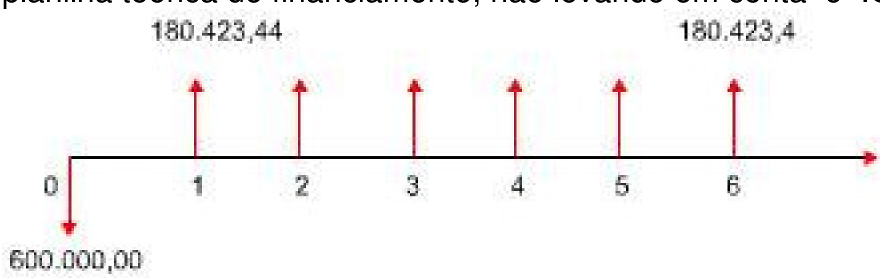


Figura 2

a) Cálculo do valor de cada prestação *T*

$$T = 600.000,00 \;.\; (1 / a_{\overline{6}|20}) = 600.000,00 \times 0,300706 \quad \therefore$$
$$T = 180.423,44 \text{ reais}$$

b) Planilha Teórica de Financiamento → *QUADRO I*

Assim, a dívida de R$ 600.000,00 será paga em seis prestações semestrais de R$ 180.423,44 e como não há carência, pois o sistema francês é idêntico a uma renda imediata, cada prestação vai arcar com parte do juro e parte da amortização.

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES

Todo e qualquer sistema de amortização através de prestações, constantes ou não, uniformes ou não, observa duas premissas básicas **:**

1ª) Cada prestação é a soma de duas parcelas **:** a primeira é de juro e a segunda, de amortização. Esta segunda pode ser *zero* nas primeiras prestações, quando existe carência **;** se não houver carência a parcela de amortização existirá.

2ª) A parcela de juro é sempre devida nos períodos em que existir prestação e é dada pelo produto da taxa pactuada e relativa ao prazo do período vencido, pelo saldo devedor do período anterior ao do vencido.

Essas duas premissas constituem a base sobre a qual se assentam todos os cálculos de pagamento de dívida, através de prestações.

Voltando ao nosso exemplo onde os juros são de 20% ao semestre, que é o período no caso, cada prestação é a soma da parcela de juro com a de amortização nela contidas. Então, podemos ver que, o juro $\mathbf{J_1}$ da primeira prestação, é o valor resultante da taxa de juros pactuada incidindo sobre o saldo devedor $\mathbf{D_0}$. Portanto**:**

$$J_1 = 20\,\% \text{ s/ } D_0$$
$$J_1 = 0,20 \times 600.000,00 \quad \therefore$$
$$J_1 = 120.000,00 \text{ reais}$$

Como o valor da primeira prestação é de R$ 180.423,44, a diferença entre ela e a parcela de juro de R$ 120.000,00 , no valor de R$60.423,45, é a parcela de amortização da primeira prestação que vai amortizar parte do saldo devedor (R$ 600.000,00) da época anterior (época *zero***)**, redundando num saldo devedor de R$ 539.576,56 referente à época *um***.**

$$A_1 = T - J_1$$

$$A_1 = 180.423,45 - 120.000,00 \quad \therefore$$

$$A_1 = 60.423,45 \text{ reais}$$

e

$$D_1 = D_0 - A_1$$

$$D_1 = 600.000{,}00 - 60.423{,}45 \quad \therefore$$

$$D_1 = 539.576{,}56 \text{ reais}$$

No fim do segundo semestre (época 2), tudo se repete **:**

$$J_2 = 20\ \%\ s\ /\ D_1$$

$$J_2 = 0{,}20\ s\ /\ 539.576{,}56 \quad \therefore$$

$$J_2 = 107.915{,}31 \text{ reais}$$

$$A_2 = T - J_2$$

$$A_2 = 180.423{,}45 - 107.915{,}31 \quad \therefore$$

$$A_2 = 72.508{,}14 \text{ reais}$$

$$D_2 = D_1 - A_2$$

$$D_2 = 539.576{,}55 - 72.508{,}14 \quad \therefore$$

$$D_2 = 467.068{,}42 \text{ reais, e assim por diante:}$$

Dessa maneira, podemos montar a planilha teórica.

Quadro I

n	**T**	**J**	**A**	**D**
0				600.000,00
1	180.423,45	120.000,00	60.423,45	539.576,55
2	180.423,45	107.915,31	72.508,14	467.068,42
3	180.423,45	93.413,68	87.009,76	380.058,65
4	180.423,45	76.011,73	104.411,72	275.646,93
5	180.423,45	55.129,39	125.294,06	150.352,87
6	180.423,45	30.070,57	150.352,87	0,00
TOTAIS		*482.540,68*	*600.000,00*	

Observando o Quadro I podemos ver que, a princípio, se paga mais juro em cada prestação e conseqüentemente se amortiza menos, o que é lógico, porque no início o saldo devedor *D* é sempre maior. Porém, com o passar do tempo, o saldo devedor vai diminuindo, devido às amortizações e se passa a pagar uma parcela cada vez menor de juros em cada prestação, com o conseqüente aumento na parcela de amortização, já que a soma das duas é constante e igual à prestação.

Nos financiamentos de longo prazo concedidos através de qualquer Sistema, é comum o mutuário desejar saber o valor do seu saldo devedor num determinado momento antes do vencimento do empréstimo, seja por simples curiosidade, seja para verificar se suporta antecipar a liquidação da dívida restante, naquele momento. Para isso, não é preciso desenvolver toda a planilha teórica de financiamento. Vejamos **:**

Suponhamos uma dívida *D* financiada pelo sistema francês em *n* prestações de valor *T*, a uma taxa *i* → *Figura 3*

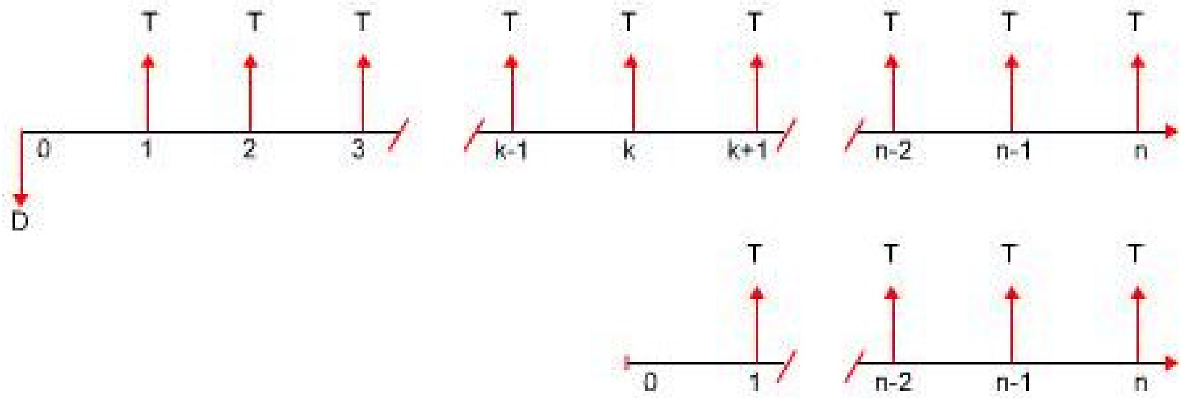


Figura 3

Seja *k* uma época tal que **:** $0 \le k \le$ **.** O saldo devedor D_k nesta época *k* é exatamente a soma das *n-k* parcelas de amortização contidas nas *n-k* prestações restantes, ou seja, é o valor atual (na época *k*) das *n-k* prestações restantes, à taxa *i* . Assim **:**

$$D_k = T \, . \, a_{n-k \;\; i}$$

Uma vez conhecidos o saldo devedor D_k, o número de prestações restantes **n-k** , e a taxa de juros **i** , temos aí três das quatro variáveis de que se compõe uma renda e, mesmo que não conhecêssemos o valor de **T**, o seu cálculo poderia ser feito sem nenhuma dificuldade **:**

$$T = D_k \, . \, 1 / a_{n-k \;\; i}$$

2º Exemplo

Usando os dados do primeiro exemplo, calcular o saldo devedor após o pagamento da 4ª prestação.

$$D_4 = 180.423{,}45 \, . \, a_{6-4 \;\; 20} \quad \therefore$$

$$D_4 = 180.423{,}45 \, . \, a_{2 \;\; 20} \quad \therefore$$

$$D_4 = 180.423{,}45 \, . \, 1{,}527778 \quad \therefore$$

$$D_4 = 275.649{,}93 \text{ reais}$$

5.2.1. A Tabela Price

A Tabela Price (Richard Price – economista inglês) é um caso particular do sistema francês de amortização quando o período é o mês – prestações mensais. A taxa de juros referencial é *a taxa anual nominal,* usando-se então a *taxa mensal proporcional* para se proceder aos cálculos.

Observação

O uso da Tabela Price é extraordinariamente grande e popular em todo o planeta. Por isso, as lojas de departamentos que trabalham com o CDC, CP, operações de "leasing" e outras formas de venda a prazo em prestações mensais, oferecem a taxa usada já ao mês.

3° Exemplo

Qual o valor da prestação mensal para se adquirir uma geladeira de preço à vista igual a R$ 850,00 , em oito vezes, à taxa de 24 % a.a., sem entrada ?

$$T = 850{,}00 \ (1 / a_{8\ 2}) \quad \therefore$$

$$T = 850{,}00 \times 0{,}136510 \quad \therefore$$

$$T = R\$\ 116{,}03$$

Ou na HP-12C

8 n 2 i 850,00 CHS PV PMT → visor = 116,03 reais

Impostos Incidentes

As operações financeiras realizadas para liquidação através de prestações – o "leasing" não é considerado operação financeira e, sim, comercial – sofrem a incidência do IOF ou IOC à alíquota de 0,0041 % ao dia (1,50 % ao ano), além do PIS, COFINS etc. A incidência do IOF (IOC) é sobre os saldos devedores pelos dias em que vigorarem ou sobre as amortizações também pelos dias de suas vigências, o que dá exatamente no mesmo como vai ser mostrado, já que esse tipo de imposto, devido exclusivamente ao cliente, incide tão somente sobre o principal do financiamento, não podendo de forma alguma ser cobrado sobre os encargos.

Como o IOF (IOC) é retido antecipadamente, isto é, no ato da concessão do empréstimo e nas condições retromencionadas, o mais fácil e prático para obter o seu valor é calcular um fator que, multiplicado pela importância financiada, nos fornece esse valor no início da operação, uma vez que o órgão financiador é o responsável pela retenção do imposto e tem um prazo máximo de dez dias, a contar do fechamento da operação, para recolher esse imposto aos cofres da Receita Federal.

Esse fator, que vamos batizar de fator do IOF = *F* ou *f*, pela sua própria definição, vai ser função dos saldos devedores e dos números de dias correspondentes. Como os saldos devedores (e lógico, as amortizações também) dependem da taxa de juros cobrada, em última instância o fator do IOF passa a ser função da taxa e dos prazos dos saldos devedores. Dessa maneira, pode-se elaborar tabelas do IOF para prazos e taxas que se queira e, como vamos mostrar a seguir, esse trabalho é bastante facilitado ao usarmos o programa Excel.

Vejamos um caso real de CDC – Crédito Direto ao Consumidor – efetuado pela financeira de um banco com sede em São Paulo. Vamos mostrar nesse exemplo a cobrança do IOF que foi usada e também as outras formas que poderiam ser praticadas.

Exemplo

O financiamento de uma máquina no valor de R$ 98.683,00 foi realizada no dia 31/01/00 através da Tabela Price (CDC) a juros mensais de 2,15%. Sabendo que o prazo é de um ano e que as prestações vencem no último dia de cada mês subseqüente, calcular **:**

a) o valor das prestações sem o IOF **;**

b) o valor do IOF e do seu fator **;**

a) Prestação sem o *IOF* . Resposta: R$ 9.417,60

b) Valor do IOF e de seu fator → Quadro II

IOF = 829,76 reais
Fator do IOF = F = 0,008408 = 0,8408%

QUADRO II
SIMULAÇÃO DE CÁLCULO DE IOF FINANCIADO - TABELA PRICE

Principal = 98.683,00
Taxa mês = 2,15%
Prazo = 12 meses
IOF Taxa = 0,0041% ao dia

Dias	Dias ac.	Saldo Dev	PMT	Juros	Amort	IOFs/Amort	IOFs/SD
0	0	98.683,00					
29	29	91.387,08	9.417,60	2.121,68	7.295,92	8,67	117,33
31	60	83.934,31	9.417,60	1.964,82	7.452,78	18,33	116,15
30	90	76.321,30	9.417,60	1.804,59	7.613,01	28,09	103,24
31	121	68.544,60	9.417,60	1.640,91	7.776,69	38,58	97,00
30	151	60.600,71	9.417,60	1.473,71	7.943,89	49,18	84,31
31	182	52.486,03	9.417,60	1.302,92	8.114,68	60,55	77,02
31	213	44.196,88	9.417,60	1.128,45	8.289,15	72,39	66,71
30	243	35.729,51	9.417,60	950,23	8.467,37	84,36	54,36
31	274	27.080,10	9.417,60	768,18	8.649,41	97,17	45,41
30	304	18.244,72	9.417,60	582,22	8.835,38	110,12	33,31
31	335	9.219,38	9.417,60	392,26	9.025,34	123,96	23,19
31	366	0,00	9.417,60	198,22	9.219,38	138,35	11,72
Totais					**98.683,00**	**829,76**	**829,76**

Fator do IOF = F = 829,76/98.683,00 = 0,008408 = 0,8408%

5.3. SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

No Sistema de Amortização Constante (SAC), o mutuário vai pagar a dívida contraída também por meio de prestações periódicas que englobam juro e amortização, desde que não haja carência. Acontece que, aqui o que é constante, é a amortização do saldo devedor, aliás como o próprio nome do sistema sugere. As prestações têm valor decrescente, uma vez que elas são o resultado da soma da parcela de juro com a parcela de amortização. A parcela de amortização é constante, como foi dito, mas a parcela de juro é decrescente, pois se trata do produto da taxa pactuada pelo saldo devedor do período anterior e como esse saldo vai sendo amortizado periodicamente, o juro de cada parcela só pode ir diminuindo também e por conseguinte, o valor de cada prestação.

1º Exemplo

Consideremos os números do primeiro exemplo no sistema francês, e vamos montar a planilha teórica de financiamento $\rightarrow$ *Figura 1*

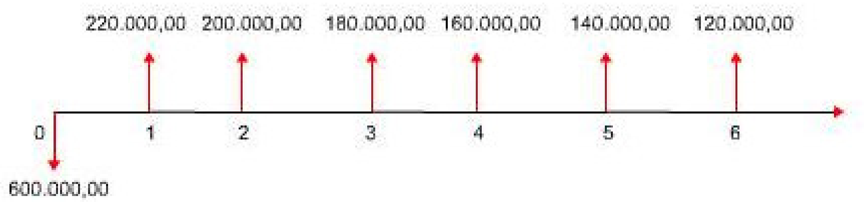


Figura 1

a) Cálculo do valor da parcela **A** de amortização **:**

$$A = D / n$$

$$A = 600.000{,}00 / 6 \quad \therefore$$

b) Planilha Teórica de Financiamento

$$D_1 = D_0 - A \quad \therefore$$

$$D_1 = 600.000{,}00 - I$$

$$D_1 = 500.000{,}00 \text{ reais}$$

$$J_1 = D_0 \cdot i$$

$$J_1 = 600.000{,}00 \cdot 0{,}20 \quad \therefore$$

$$J_1 = 120.000{,}00 \text{ reais}$$

$$T_1 = A + J_1$$

$$T_1 = 100.000{,}00 + 120.000{,}00 \quad \therefore$$

$T_1 = 220.000{,}00$ reais , e assim por diante **:**

Dessa forma pode-se montar a planilha pedida que segue abaixo no Quadro I

QUADRO I

n	A	D	J	T
0		600.000,00		

1	100.000,00	500.000,00	120.000,00	220.000,00
2	100.000,00	400.000,00	100.000,00	200.000,00
3	100.000,00	300.000,00	80.000,00	180.000,00
4	100.000,00	200.000,00	60.000,00	160.000,00
5	100.000,00	100.000,00	40.000,00	140.000,00
6	100.000,00	0,00	20.000,00	120.000,00
TOTAIS	**600.000,00**		**420.000,00**	

Comparando o Quadro I do SAC com o Quadro I do sistema francês, vemos que, no Sistema de Amortização Constante – SAC paga–se menos juros que no sistema francês. Isto se deve única e exclusivamente ao fato de que no SAC se desembolsa mais dinheiro no pagamento das primeiras prestações do que no sistema francês, ou seja, as primeiras prestações sendo maiores, significa maiores amortizações e no início dos pagamentos, o que é mais importante ainda. Se o mutuário possui recursos para pagar mais nas primeiras prestações, melhor para ele.

Porém, matematicamente falando, os dois sistemas são equivalentes, assim como qualquer sistema de pagamentos periódicos ou **não,** desde que se trate de dívida com os mesmos valor, prazo e taxa de juros.

5.3.1. Aplicações Práticas do SAC

O Sistema de Amortização Constante – SAC tem grande aplicação nos empréstimos de longo prazo, tanto aqui no Brasil quanto nos outros países. Vejamos **:**

Os programas Finame e BNDES Automático da Finame que já vimos, são baseados também no SAC, se olharmos para os programas tradicionais. Baseados porque, sendo atrelados à TJLP, a variação trimestral desta taxa mascara um pouco a visualização do SAC. Porém, se fizermos os mencionados programas da forma simplificada, em URTJLP, como aliás é a maneira mais usada , vamos constatar com imensa facilidade a presença marcante do SAC. Os programas da Finame, em volume e prazo, são os mais procurados pelos industriais e demais empresários do nosso país.

Isto, sem falarmos nos programas de financiamento com ou sem correção monetária que fazem uso direto do SAC e que são usados por diversos órgãos financiadores.

Exercícios

1. Um empréstimo de R$ 600.000,00 foi concedido para ser pago em 60 prestações mensais a juros de 1,80 % a.m. através do sistema francês. Calcular **:**

a) O valor de cada prestação

b) O saldo devedor após ter sido paga a 47ª prestação

c) As parcelas de juro e de amortização contidas na 48ª prestação

2. Mesmo exercício anterior mas com o empréstimo realizado através do SAC

5.4. Observações entre o SPC e o SAC

Ao olharmos os dois exercícios já resolvidos, mesmo sem desenvolver toda a planilha teórica dos financiamentos, podemos perceber que, no Sistema SAC, se paga aparentemente menos juros e se amortiza o saldo devedor mais rapidamente do que no francês **:**

$$J_{48} = 2.340{,}00 \text{ reais} \rightarrow \text{no SAC}$$

$$J_{48} = 3.401{,}91 \text{ reais} \rightarrow \text{no Francês}$$

e

$$D_{47} = 130.000{,}00 \text{ reais} \rightarrow \text{no SAC}$$

$$D_{47} = 188.995{,}07 \text{ reais} \rightarrow \text{no Francês}$$

Isto acontece porque, no SAC, o mutuário começa pagando prestações de maior valor do que no francês. Por exemplo, nos dois exercícios **:**

$$T_1 = A + J_1 = 20.800{,}00 \text{ reais} \rightarrow \text{no SAC}$$

$$T_1 = T = 16.435{,}18 \text{ reais} \rightarrow \text{no Francês}$$

Ora, se no SAC as prestações iniciais são maiores do que no sistema francês (de valor constante), significa que lá se está amortizando mais e no princípio, quando o saldo devedor é maior **;** então é lógico que, aparentemente, se vai pagar menos juros com o decorrer das prestações, como já foi mostrado. Pagar maiores prestações é para quem possui maior disponibilidade de recursos naquele momento e isso depende do mutuário, é claro. Vamos a uma situação extrema, de o mutuário ter todo o dinheiro de que necessita. Nesse caso, ele não vai fazer empréstimo **algum** e, sim, lançar mão das suas disponibilidades, portanto, *aparentemente, não vai pagar juro.* Ledo engano, existe o que costumamos chamar de **"***custo de oportunidade",* que neste caso, nada mais é do que, agindo assim, o mutuário em potencial, também não vai poder aplicar aquele dinheiro em outro ativo qualquer que lhe traga rentabilidade ou juro, simplesmente porque já não existe mais a disponibilidade de antes. Assim *ele deixa de ganhar juro, o que significa "pagar" juro.*

A realidade matemática é essa. Tudo na vida tem um valor diferente, se olhado em épocas diferentes. Com o dinheiro, essa verdade ainda é mais visível, pelo próprio princípio em que se baseia a teoria da Matemática Financeira : " todo capital aplicado cresce com o tempo" .

3. Um apartamento de valor R$ 50.000,00 está sendo negociado com entrada de 16 % e o saldo devedor financiado em 10 anos através de prestações mensais a juros de 1% a.m. Em que momento do financiamento os valores das prestações seriam iguais, se fizéssemos os cálculos pelo SAC e também pela Tabela Price ?

5.4.1. Exercícios

Exemplo:

Uma dívida de R$ 5.000,00 com juros de 18% ao ano, capitalizados mensalmente deve ser amortizada por meio de pagamentos mensais iguais durante os próximos 6 meses, devido o primeiro daqui a um mês.

Construir uma tabela de amortização para dívida do exemplo 1:

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0	**R$ 5.000,00**			
1	**R$ 4.197,37** (5.000,00- 802,63)	**R$ 802,63** (877,63 - 75,00)	**R$ 75,00** 5.000,00x1,5%	**R$ 877,63**
2	**R$ 3.382,71** (4.197,37- 814,67)	**R$ 814,67** (877,63 - 62,96)	**R$ 62,96** 4.197,37x1,5%	**R$ 877,63**
3	**R$ 2.555,82** (3.382,71- 826,89)	**R$ 826,89** (877,63 - 50,74)	**R$ 50,74** 3.382,71 x1,5%	**R$ 877,63**
4	**R$ 1.716,53** (2.555,82- 839,29)	**R$ 839,29** (877,63 - 38,34)	**R$ 38,34** 2.555,82x1,5%	**R$ 877,63**
5	**R$ 864,66** (1.716,53- 851,88)	**R$ 851,88** (877,63 - 25,75)	**R$ 25,75** 1.716,53x1,5%	**R$ 877,63**
6	**R$ (0,00)** (864,66- 864,66)	**R$ 864,66** (877,63 - 12,97)	**R$ 12,97** 864,66x1,5%	**R$ 877,63**

Exercícios:

1) Uma dívida de R$ 3.000,00 é amortizada em quatro prestações mensais com juros de 5% a.m. Construir os planos de amortização.
   a) Tabela Price: Sistema Francês de Amortização

Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0				
1				
2				
3				
4				

b) SAC: Sistema de Amortização Constante

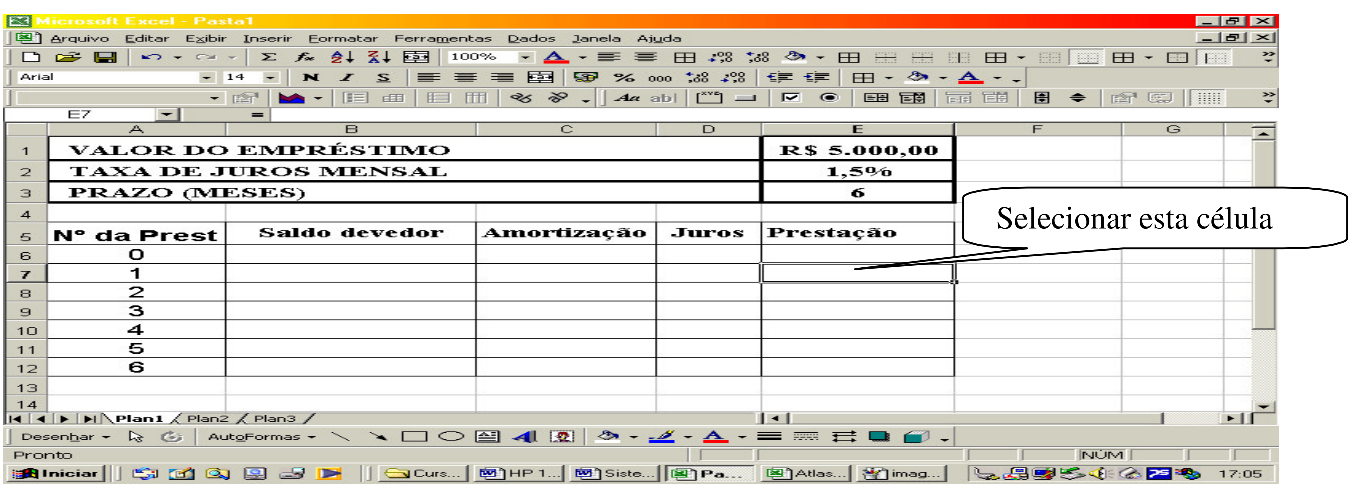
Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0				
1				
2				
3				
4				

2) A fim de remodelar seu estabelecimento, um comerciante toma emprestados R$ 13.000,00. Concorda em amortizar seu débito, capital e juros a 12% ao ano, por meio de pagamentos anuais iguais durante os próximos 5 anos, o primeiro com vencimento para daqui a um ano pelo Sistema Francês de Amortização. Construir o plano de amortização.

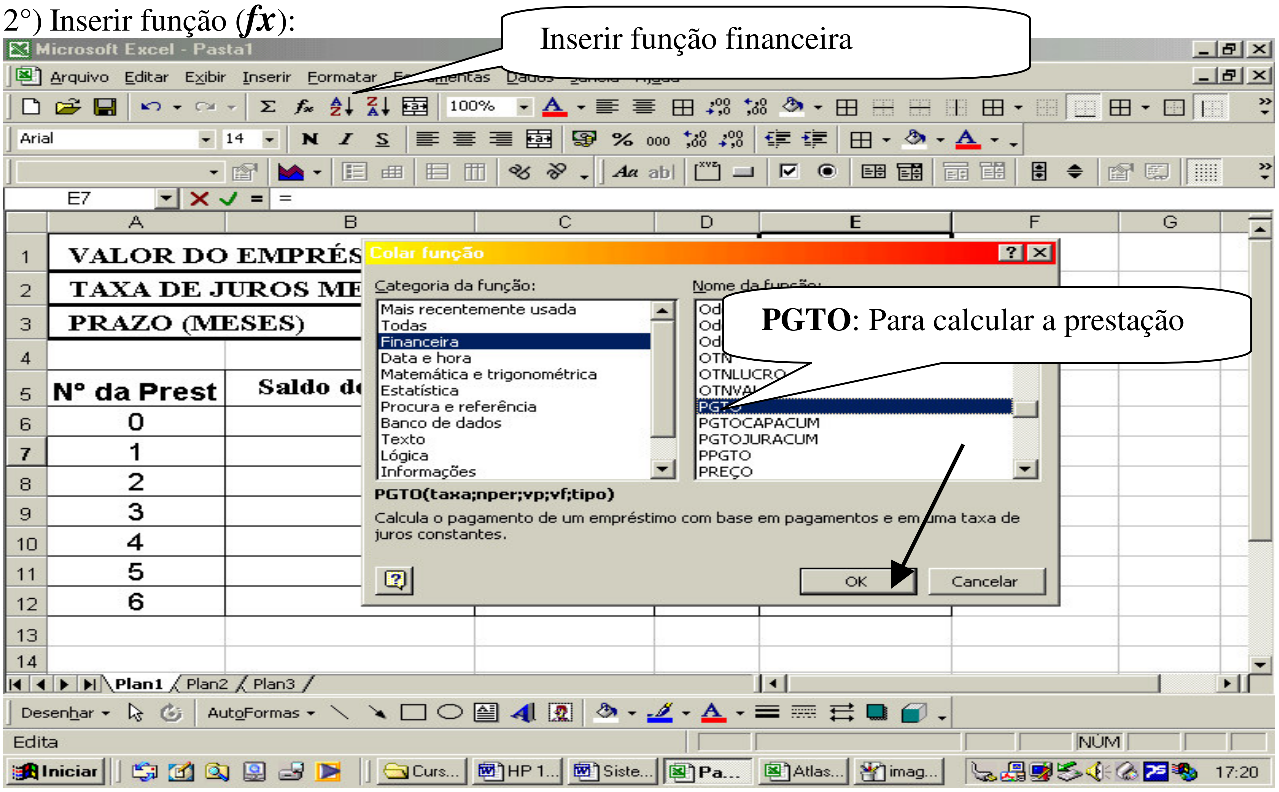
Período	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Com os recursos do Excel:

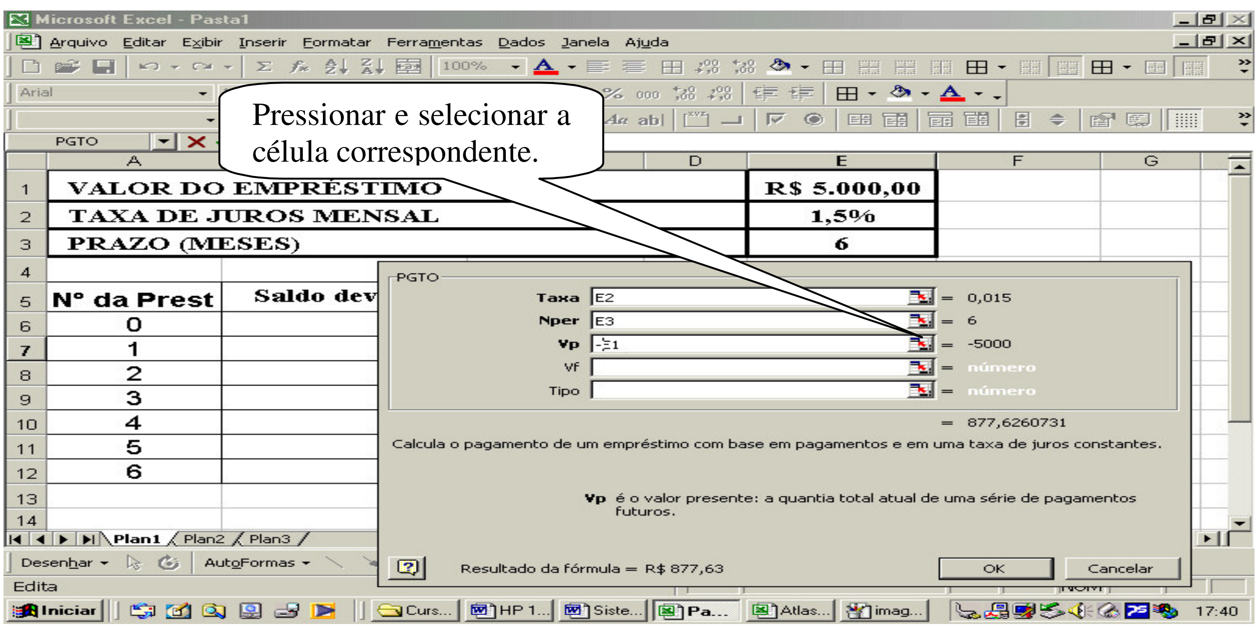
1°) Organizar a planilha conforme sugestão abaixo.



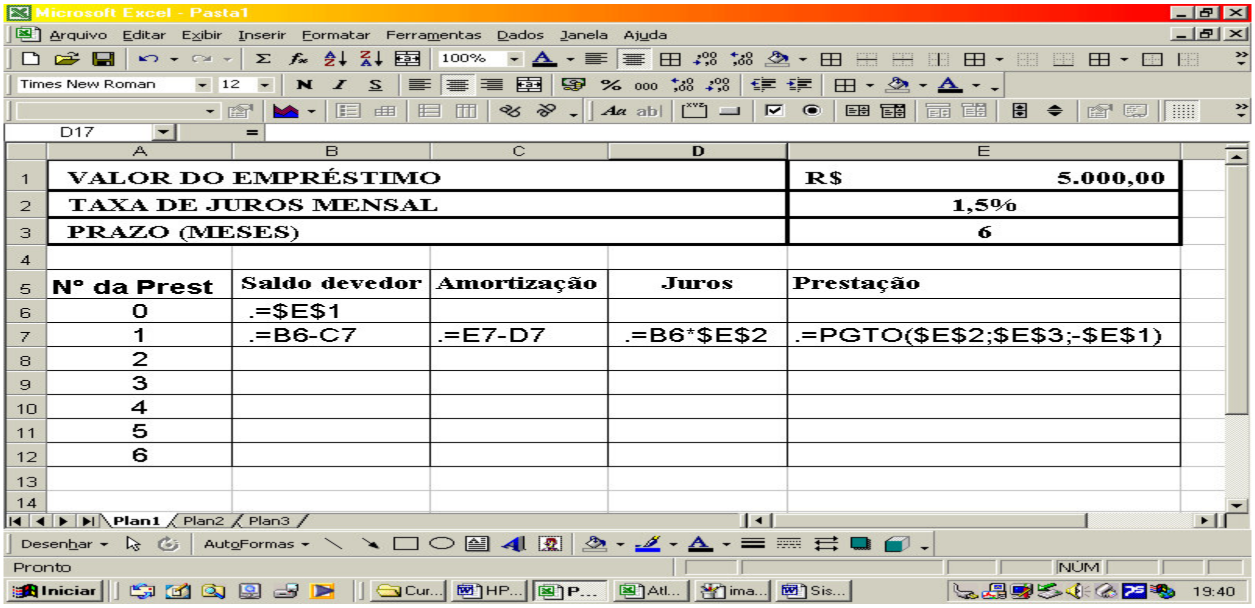
2°) Inserir função (*fx*):



3°) Pressionar "OK" para visualizar a tela abaixo. Preencher cada janela com os dados do problema. Como resposta observa-se o valor da prestação. É interessante informar o valor do PV negativo (-) assim o valor da prestação será positivo e facilitará a construção da planilha.

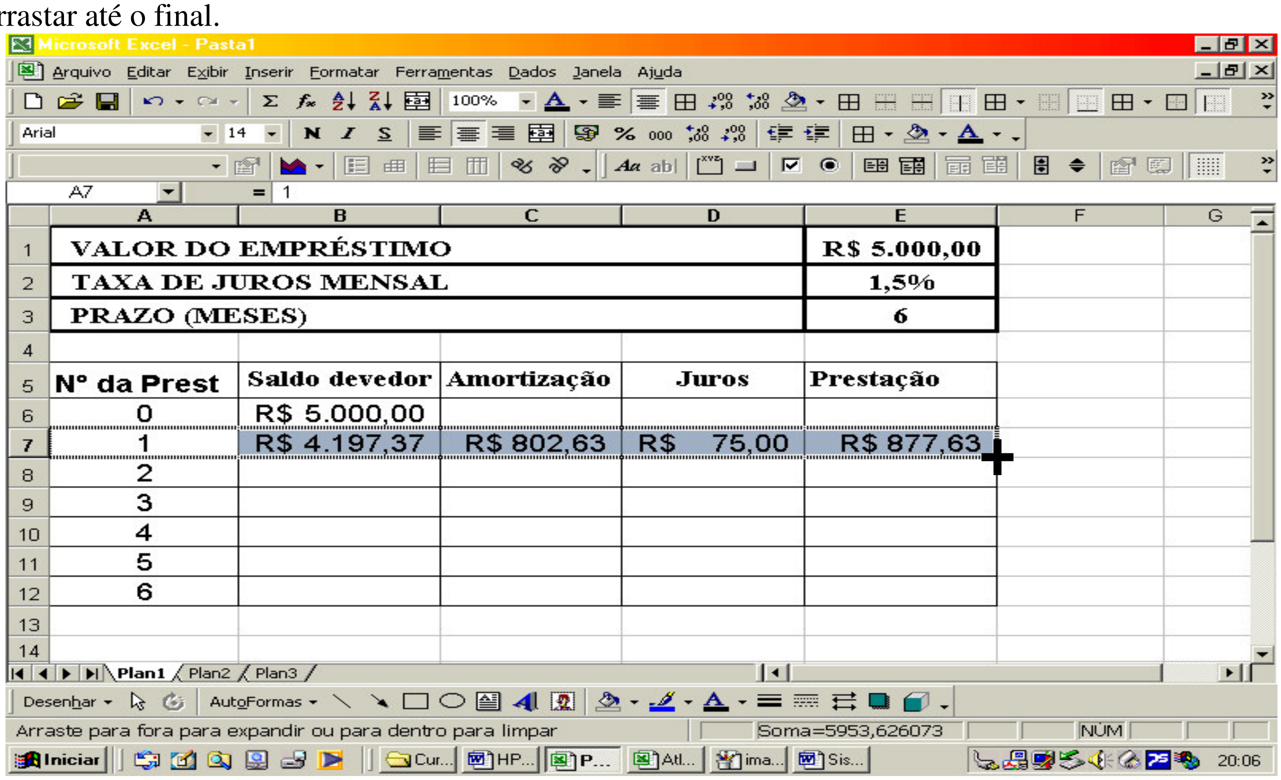


4°) Com o valor da prestação e os dados iniciais do problema é possível desenvolver a planilha. O símbolo "$", que é usado para isolar a posição da coluna, tem como objetivo o congelamento da célula em referência. (Obs: o uso do "$" não é obrigatório, ele permite o uso da mesma planilha para outros problemas de mesma natureza, assim é suficiente trocar apenas os dados iniciais da questão).



	A	B	C	D	E
1	VALOR DO EMPRÉSTIMO				R$ 5.000,00
2	TAXA DE JUROS MENSAL				1,5%
3	PRAZO (MESES)				6
4					
5	Nº da Prest	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
6	0	.=E1			
7	1	.=B6-C7	.=E7-D7	.=B6*E2	.=PGTO(E2;E3;-E1)
8	2				
9	3				
10	4				
11	5				
12	6				

5°) Para preencher a planilha, é só selecionar a linha 7 (sete) da esquerda para a direita e arrastar até o final.



	A	B	C	D	E
1	VALOR DO EMPRÉSTIMO				R$ 5.000,00
2	TAXA DE JUROS MENSAL				1,5%
3	PRAZO (MESES)				6
4					
5	Nº da Prest	Saldo devedor	Amortização	Juros	Prestação
6	0	R$ 5.000,00			
7	1	R$ 4.197,37	R$ 802,63	R$ 75,00	R$ 877,63
8	2				
9	3				
10	4				
11	5				
12	6				

Exercícios:

1) A fim de remodelar seu estabelecimento, um comerciante toma emprestados R$ 13.000,00. Concorda em amortizar seu débito, capital e juros a 6% ao ano, por meio de pagamentos mensais iguais durante os próximos 3 anos, o primeiro com vencimento para daqui a um mês. Construir o plano de amortização e identificar:

a) O pagamento mensal. **Resposta: 395,49**

b) O saldo devedor logo após o 20° (vigésimo) pagamento. **Resposta: 6.066,64**

2) Maria toma emprestados R$ 100.000,00 com juros de 6% a.a composto trimestralmente. A dívida deve ser liquidada mediante um pagamento de R$ 20.000,00 daqui a 2 anos, seguindo de pagamentos trimestrais iguais no fim de cada período durante 8 anos.

a) Achar o pagamento periódico necessário. **Resposta 3.666,79**

b) Calcular o saldo devedor logo após o 5° pagamento periódico. **Resposta: 80.917,29**

c) Que parte do último pagamento é empregada para pagar os juros? **Resposta: 54,19**

3) Um imóvel é financiado em 240 prestações mensais e consecutivas. O valor financiado corresponde a R$ 50.000.00 e a taxa de juros é 1% ao mês. Calcule o valor dos juros, da amortização e do saldo devedor relativo às prestações 50, 120 e 200.

N° da Prest	Amortização	Juros	Saldo devedor
50	R$ 82,30	R$ 468,24	R$ 46.741,83
120	R$ 165,16	R$ 385,38	R$ 38.373,14
200	R$ 404,42	R$ 146,13	R$ 14.208,25

CAPÍTULO 6

6.1. Revisão

6.1.1. Capitalização Simples

1) Calcular os juros de 300 u.m., à taxa de 24% a.a., durante 8 meses.

2) Qual o capital que, em 2 anos, a 1,5% ao mês, produz 93,6 u.m. de juros?

3) A que taxa se deve colocar o capital de 300 u.m. para que, em 3 meses e 6 dias, produza o montante de 316 u.m.?

4) Durante quanto tempo o capital de 200 u.m. deve ser empregado, à taxa de 2% ao mês, para produzir o montante de 272 u.m.?

5) Um título de 500 u.m. foi resgatado 4 meses antes do vencimento por 470 u.m. Calcular a taxa do desconto comercial.

Respostas:
1) 48 u.m. 2) 260 u.m. 3) 20% a.a. 4) 1 ano e 6 meses. 5) 1,5% ao mês.

6.1.2. Capitalização Composta

1) Carlos pretende vender o seu terreno pelo preço de R$ 60.000,00 à vista. Entretanto, em face das dificuldades de venda à vista, está disposto a fazer o seguinte plano de pagamento: Entrada de R$ 12.000,00, mais R$ 25.000,00 no fim de seis meses e mais duas parcelas, sendo a segunda 50% superior à primeira, vencíveis em 1 ano e 15 meses, respectivamente. Admitindo-se que a taxa de juros de mercado é de 6% a.m. (juros compostos), qual será o valor da última parcela (que vence em 15 meses)?

2) A loja Bom Som vende um conjunto de som em duas parcelas: R$ 200,00 de entrada e R$ 400,00, após 5 meses. Francisco propõe adiar a segunda parcela por mais 3 meses. Considerando que a taxa de juros mensal cobrada é de 5% e o regime de capitalização composto, quanto Francisco deverá pagar a mais na entrada?

3) Em uma butique do shopping X, uma senhora é atendida pelo vendedor, que afirma: “O preço desse vestido, à vista, é R$ 210,00, mas a senhora poderá comprá-lo em três vezes sem acréscimo, sendo a primeira dada como entrada”. Se a taxa de juros cobrada pela butique, nas vendas a prazo, é de 4% a.m., que porcentagem do preço à vista pode a loja dar de desconto?

4) Uma empresa deve pagar três títulos. O primeiro de R$ 2.500,00 exigível em três meses; o segundo de R$ 3.000,00, exigível em seis meses e o terceiro de R$ 4.500,00, exigível em 9 meses. A empresa pretende substituir esses três últimos por um único de R$ 15.426,83. Admitindo-se o regime de juros compostos e uma taxa mensal de 8%. Determine o prazo do novo título.

5) Uma empresa deve pagar três títulos. O primeiro, de R$ 15.000,00 exigível em 1 ano; o segundo, de R$ 30.000,00 exigível em 2 anos, e o terceiro, de R$ 25.000,00 exigível em 3 anos. A empresa pretende substituir esses três títulos por um único título de R$ 45.676,21. Admitindo-se o regime de juros compostos e uma taxa mensal de 5%, qual o prazo do novo título?

Respostas:
1. R$ 40.578,20 2. R$ 42,67 3. 3,8% 4. 12 meses 5. 15 meses

6.1.3. Seqüências de Capitais

1) Obtenha o preço à vista de um automóvel financiado à taxa de 3% a.m., sendo o número de prestações igual a 10 e R$ 1.500,00 o valor de cada prestação mensal, vencendo a primeira um mês após a compra.

2) Um produto é vendido à vista por R$ 4.000,00 ou a prazo em 3 prestações mensais iguais de *R$ 1.524,21*, sem entrada. Qual a taxa de juros do financiamento?

3) Um aparelho eletrônico é vendido à vista por R$ 2.000,00. Obter o valor de cada prestação nas seguintes condições de financiamento:

a) 12 prestações mensais iguais sem entrada e taxa de 2,5% a.m.;

b) 18 prestações mensais iguais com entrada e taxa de 2% a.m.;

c) 24 prestações mensais iguais com 6 meses de carência e taxa de 3% a.m.

4) Um barco é vendido à vista por R$ 6.000,00, ou então com 20% de entrada mais 4 prestações mensais e iguais. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros for de 6% a.m.?

5) Um eletrodoméstico é vendido nas seguintes condições: Entrada de R$ 70,00 mais 5 prestações mensais de R$ 80,00 cada. Sabendo-se que a taxa de juros do financiamento é de 5% a.m., pede-se o preço à vista.

6) Uma geladeira é vendida em 5 prestações mensais de R$ 800,00 cada uma, sendo a primeira dada como entrada. Qual o preço à vista, se a taxa de juros do financiamento for de 4,5% a.m.?

7) Um microcomputador é vendido à vista por R$ 2.500,00, ou então em 4 prestações mensais iguais, sendo a primeira dada como entrada. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros for de 5,6% a.m.?

8) Um terreno é vendido à vista por R$ 130.000,00 ou a prazo em 12 prestações mensais iguais. Sendo a taxa de juros de 2,5% a.m., pede-se:

a) O valor de cada prestação, se forem antecipadas;

b) O valor de cada prestação, se forem postecipadas.

9) Um apartamento cujo preço à vista é R$ 50.000,00 é vendido a prazo com 30% de entrada e o saldo em 100 prestações mensais iguais postecipadas. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros do financiamento for de 1% a.m.?

10) Um automóvel é vendido à vista por R$ 40.000,00, ou então 30% de entrada mais 12 prestações mensais de R$ 3.000,00 cada uma, corrigidas monetariamente pelo índice de correção da caderneta de poupança.

a) Qual a melhor alternativa para um comprador que aplica todo seu dinheiro na caderneta de poupança e tem fundos para comprar à vista?

b) Qual a perda monetária em valor presente, se ele escolher a pior alternativa? (Lembre-se que a caderneta de poupança rende juros reais de 0,5% a.m.)

11) Um banco concede um empréstimo a uma empresa no valor de R$ 60.000,00 para ser pago em 4 prestações mensais e iguais postecipadas de R$ 16.850,00 cada uma. Qual a taxa de juros do financiamento?

12) O preço à vista de um aparelho de som é de R$ 820,00. A prazo, o pagamento poderá ser feito em prestações mensais iguais postecipadas de R$ 198,00 cada uma. Calcular o número de prestações sabendo que a taxa de juros do financiamento é de 5%a.m.

13) O preço à vista de um carro é de R$ 25.000,00, mas pode ser vendido a prazo em 24 prestações mensais iguais, imediatas e postecipadas de R$ 1.449,42, com 20% de entrada. Qual a taxa mensal de juros que está sendo cobrada pela venda do carro?

14) Na liberação de um empréstimo de R$ 10.000,00 foi cobrada uma taxa de abertura de crédito de R$ 100,00, uma taxa de cadastro de R$ 120,00 e um seguro no valor de R$ 50,00. Se o empréstimo foi pago em 10 prestações mensais postecipadas de R$ 1.500,00, qual a taxa efetiva de juros?

15) Uma pessoa deposita mensalmente, durante 7 meses, R$ 350,00 num fundo que remunera seus depósitos à taxa de 2,1% a.m.. Qual o montante no instante do último depósito?

16) Quanto uma pessoa deve depositar mensalmente durante 15 meses num fundo de investimentos que rende 1,8% a.m., para que no instante do último depósito tenha um montante de R$ 60.000,00?

17) Quanto deverei depositar mensalmente num fundo de investimentos que paga 3% a.m. de juros, para que ao final do 18º depósito tenha um montante de R$ 20.000,00?

18) Para o dono de uma loja, qual a melhor alternativa: financiar uma mercadoria cujo preço à vista é de R$ 1.200,00 em 10 prestações mensais e iguais postecipadas de R$ 143,00; ou vender à vista e aplicar num fundo que rende uma taxa mensal constante e tal que o montante após 10 meses seja R$ 1.652,00?

19) Uma empresa deve pagar um título de R$ 50.000,00 daqui a um ano. Quanto deveria investir mensalmente, a partir de hoje, se os depósitos forem iguais e remunerados a 2,3% a.m., para que, um mês após o último depósito, o saldo seja suficiente para pagar o título?

20) Um conjunto de sofás é vendido à vista por R$ 600,00 ou a prazo em 4 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira 3 meses após a compra. Qual o valor de cada prestação, se a taxa de juros do financiamento for de 5,8% a.m.?

21) Um conjunto de dormitório é anunciado por 10 prestações mensais e iguais de R$ 200,00, vencendo a primeira dois meses após a compra. Qual o preço à vista, se a taxa de financiamento for de 3,5% a.m.?

22) Um aparelho de som é vendido por R$ 2.300,00 à vista. A prazo, o mesmo aparelho é vendido em 6 prestações mensais e iguais, sendo dados 2 meses de carência ao cliente, isto é, a primeira prestação só é devida daqui a 3 meses. A taxa de juros cobrada pela loja é de 6% a.m.. Obtenha o valor de cada prestação.

23) O preço à vista de um carro é de R$ 36.000,00. No entanto, há um plano de venda a prazo que exige 30% de entrada, financiando o saldo em 24 prestações mensais iguais (antes da correção) e com 3 meses de carência, isto é, a primeira prestação vence daqui a 4 meses. Sabendo-se que a taxa de juros do financiamento é de 5% a.m., qual o valor de cada prestação?

24) Qual a taxa de juros mensal cobrada em uma operação de empréstimo pessoal, cujo principal, de R$ 5.000,00, foi pago em seis prestações iguais, mensais e consecutivas de R$ 1.000,00, sendo que a primeira foi paga 30 dias após a contratação?

25) Uma loja de brinquedos está vendendo seus produtos nas seguintes condições:

a) A vista: desconto de 10% sobre o preço fixado na etiqueta;

b) A prazo: o valor fixado na etiqueta é dividido para pagamento em quatro prestações iguais, mensais e consecutivas, vencendo a primeira no ato da aquisição. Qual a taxa mensal de juros compostos que a loja está cobrando em suas vendas a prazo?

Sugestão: adote um valor hipotético para o valor do produto fixado na etiqueta.

RESPOSTAS

1. *R$ 12.795,30*
2. 7% a.m
3. *a) R$ 194,97*
b) R$ 130,79
c) R$ 141,01
7. *R$ 676,97*
8. *a) R$ 12,364,22*
b) R$ 12.673,33
9. *R$ 555,30*
10. *a) Comprar à vista*
14. *8,76% a.m.*
15. *R$ 26.098,67*
16. *R$ 2.777,77*
17. *R$ 854,17*
18. *Vender a prazo.*
22. *R$ 525,55*
23. *R$ 2.114,13*
24. *5,47%a.m.*
25. *7,51%a.m.*

4. *R$ 1.385,24*
5. *R$ 416,36*
6. *R$ 3.670,02*

b) R$ 6.856,80
11. *R$ 11.090,32*
12. *6,63% a.m.*
13. 5

19. *R$ 3.583,11*
20. *R$ 192,94*
21. *R$ 1.607,07*