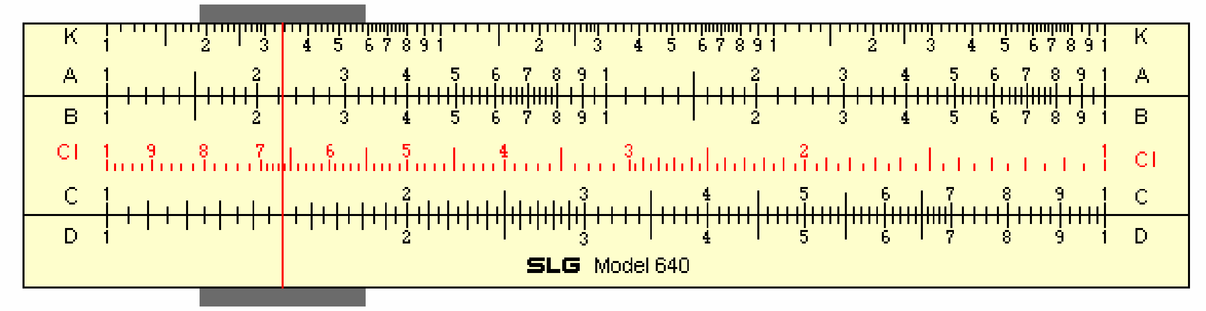
Resolución de

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

con la

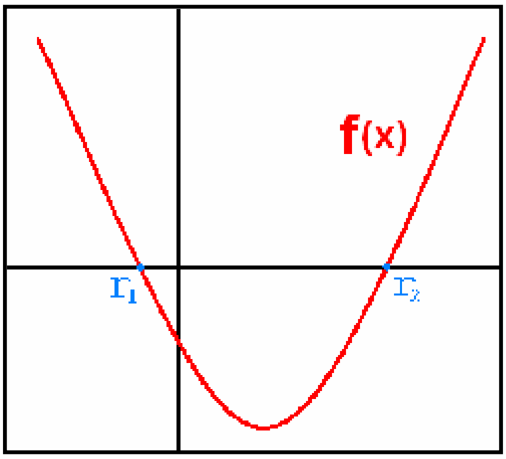
REGLA DE CÁLCULO



Editerio Krayono
Ponferrada – España
2 0 0 6

Introducción.

Una ecuación de segundo grado tiene la forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Las raíces de dicha ecuación son los valores r_1 y r_2 que satisfacen las ecuaciones siguientes: $a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) = ax^2 + bx + c = 0$. Dividiendo la ecuación de segundo grado por el coeficiente a se obtiene la forma reducida $x^2 + px + q = 0$, que tiene las mismas raíces que la ecuación original: $(x - r_1) \cdot (x - r_2) = x^2 + px + q = 0$. Desarrollando el producto de binomios e igualando coeficientes con la ecuación reducida se llega a la relación entre las raíces y los coeficientes p y q: $-(r_1 + r_2) = p$; $r_1 \cdot r_2 = q$.



Gráficamente las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$ son los puntos de corte con el eje horizontal de la parábola $f(x) = x^2 + px + q$

Para encontrar los valores r_1 y r_2 se puede utilizar la conocida expresión:

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot q}}{2} \quad \text{o mejor para regla de cálculo :} \quad r_{1,2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

En función del signo del radicando las soluciones pueden ser de tres tipos:

- Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ las dos raíces son números complejos conjugados:

$$r_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \left(\sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}\right) \cdot i \qquad r_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \left(\sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}\right) \cdot i$$

- Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ las dos raíces son números reales e iguales (raíz doble):

$$r_1 = r_2 = -\left(\frac{p}{2}\right)$$

- Si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ las dos raíces son números reales diferentes:

$$r_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad r_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Con una regla de cálculo provista de las escalas fundamentales A, B, C, D y CI se puede calcular fácilmente el valor del radicando y así determinar el tipo de las raíces de la ecuación cuadrática: Se situa C2 sobre Dp y se lee el valor en D bajo C1 (ó C10); el valor leído en D es $p/2$. Ahora, sin mover la reglilla, se lleva el cursor a C1(ó C10) y se lee en A el valor de $(p/2)^2$. Comparando $(p/2)^2$ con q se determina el signo del radicando.

Raíces complejas.

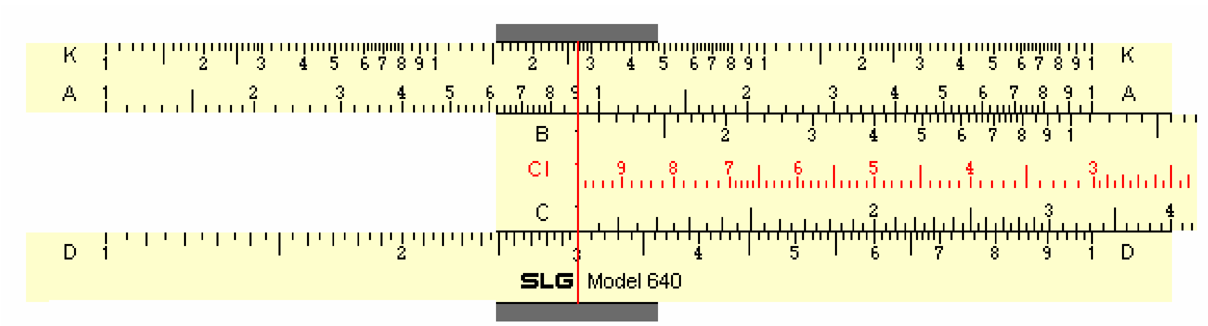
En este caso el valor del radicando es negativo; las dos raíces son números complejos conjugados.

Ejemplo 1: $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Situe C2 sobre D6 y se lee el valor de $p/2$ en D bajo C1: 3. Sin mover la reglilla se lleva el cursor a C1 y se lee en A el valor $(p/2)^2$: 9. Como 9 es menor que q (10) las raíces son números complejos, que se calculan con las fórmulas vistas en la introducción. En este ejemplo el cálculo de la raíz del valor absoluto del radicando es trivial, pero en otro caso se lleva el cursor sobre el valor del radicando en la escala A y se lee la raíz cuadrada en D.

$$r_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \left(\sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}\right) \cdot i = -3 + \sqrt{|9-10|} \cdot i = -3 + \sqrt{1} \cdot i = -3 + i$$

$$r_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \left(\sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}\right) \cdot i = -3 - \sqrt{|9-10|} \cdot i = -3 + -\sqrt{1} \cdot i = -3 - i$$



Raíz doble.

El valor del radicando es cero, por lo que las dos raíces son números reales iguales.

Ejemplo 2: $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Como en el ejemplo 1 se situa C2 sobre D6 y se lee el valor de $p/2$ en D bajo C1: 3. Sin mover la reglilla se lleva el cursor a C1 y se lee en A el valor $(p/2)^2$: 9. Como 9 es igual que q (9) el radicando es cero, y las raíces serán:

$$r_1 = r_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) = 3$$

Raíces reales diferentes.

El valor del radicando es positivo, por lo que las dos raíces son números reales diferentes. Se distinguen tres casos en función de los signos de p y q, casos que se analizan teniendo en cuenta que $-(r_1 + r_2) = p$; $r_1 \cdot r_2 = q$.

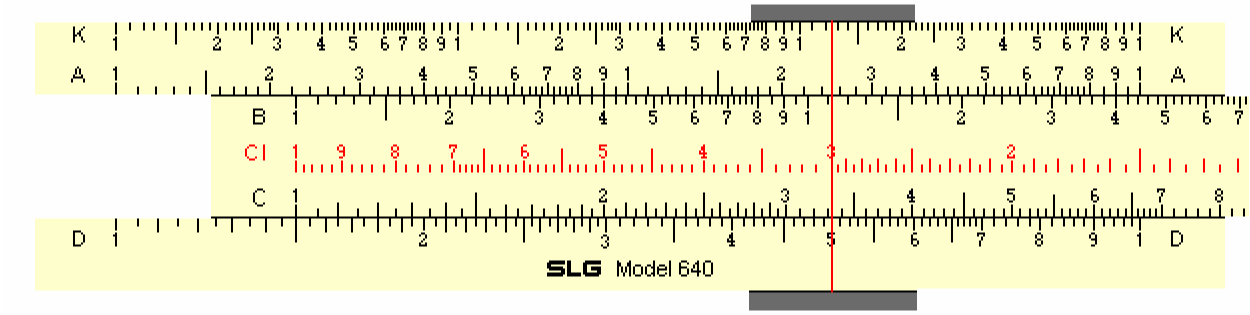
· Caso 1: ***p*** > 0 y ***q*** > 0.

Al ser q > 0 se deduce que r_1 y r_2 tienen el mismo signo; y como p > 0 entonces las raíces r_1 y r_2 son negativas.

El procedimiento a seguir es el siguiente: Mueva la reglilla hasta que C1 (ó C10) coincida con D*q*. Deslice el cursor hasta encontrar un valor en CI y otro en D cuya suma sea ***p***. Los valores encontrados, con signo negativo, son las raíces de la ecuación.

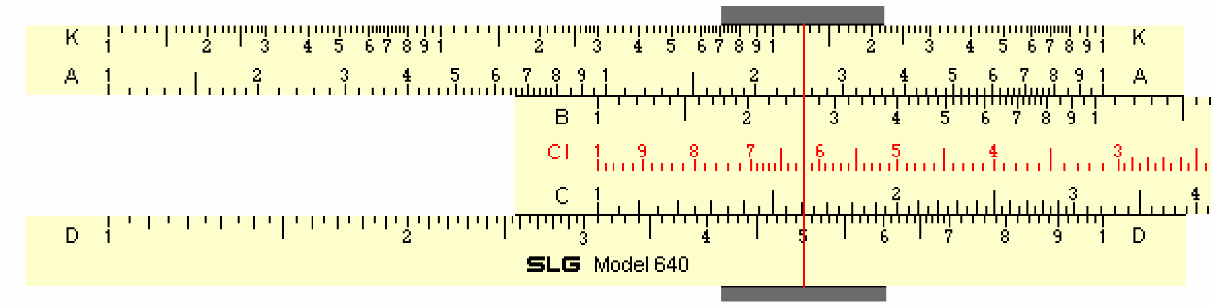
Ejemplo 3: $x^2 + 8x + 15 = 0$.

Situe C1 sobre D15. Mueva el cursor hasta CI3 – D5 (o hasta CI5 - D3) ya que 3 y 5 suman 8 (*p*). Las raíces de la ecuación serán r_1 = -3 y r_2 = -5.



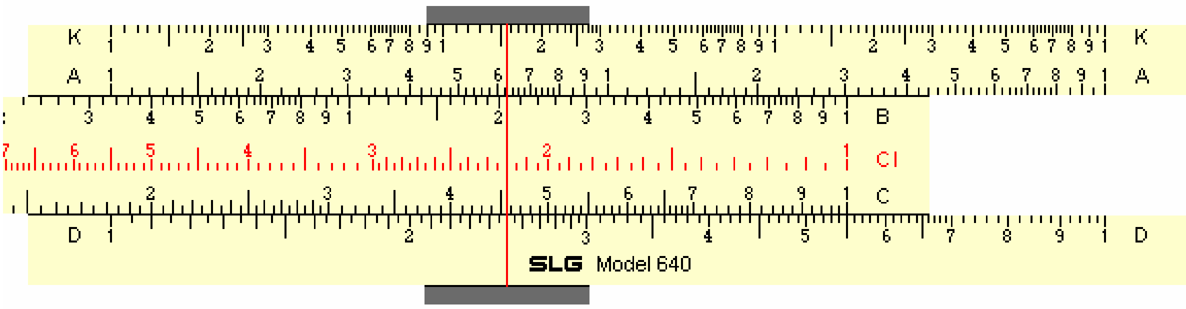
Ejemplo 4: $x^2 + 11{,}2x + 31 = 0$.

Situe C1 sobre D31. Mueva el cursor hasta CI62 - D5 (o hasta CI5 - D62) ya que 6,2 y 5 suman 11,2 (*p*). Las raíces de la ecuación serán r_1 = -6,2 y r_2 = -5.



Ejemplo 5: $x^2 + 24{,}5x + 55 = 0$.

Situe C10 sobre D55. Mueva el cursor hasta CI22 - D25 (o hasta CI25 - D22) ya que 22 y 2,5 suman 24,5 (*p*). Las raíces de la ecuación serán r_1 = -22 y r_2 = -2,5.



· Caso 2: $p < 0$ y $q > 0$.

Al ser q > 0 se deduce que r_1 y r_2 tienen el mismo signo; y como p < 0 entonces las raíces r_1 y r_2 son positivas.

El procedimiento a seguir es el mismo que en el caso anterior, con la única diferencia que las dos raíces serán positivas en vez de negativas.

Como ejemplos sirven los del caso anterior simplemente cambiando el signo del coeficiente *p*.

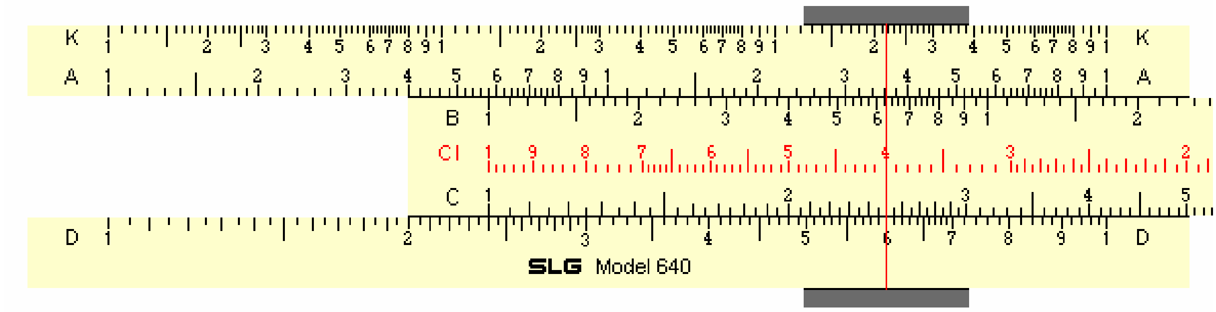
· Caso 3: $q < 0$.

Al ser $q < 0$ se deduce que una de las reaíces es positiva y la otra negativa.

El procedimiento a seguir es el siguiente: Mueva la reglilla hasta que C1 (ó C10) coincida con D*q*. Deslice el cursor hasta encontrar un valor en CI y otro en D cuya diferencia sea ***p***. Los valores encontrados son las raíces de la ecuación. Los signos de las raíces dependen del valor del coeficiente *p*; si $p > 0$ la raíz con mayor valor absoluto será negativa; y si $p < 0$ la raíz con mayor valor absoluto será positiva.

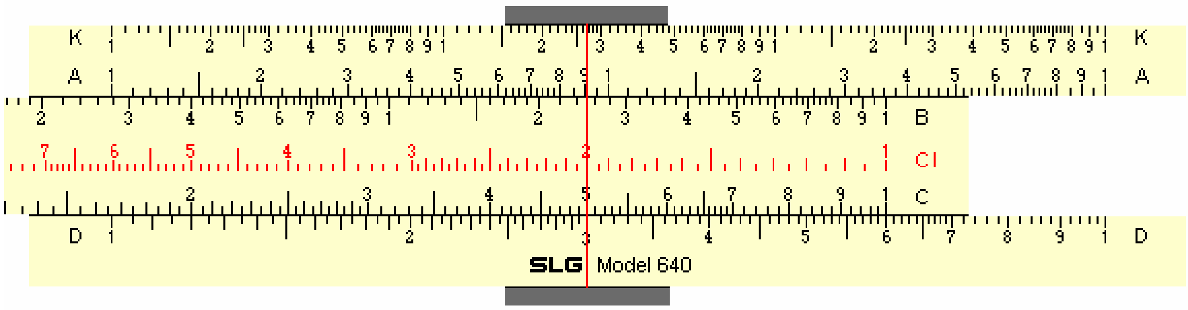
Ejemplo 6: $x^2 + 2x - 24 = 0$.

Situe C1 sobre D24. Mueva el cursor hasta CI4 - D6 (o hasta CI6 - D4) ya que la diferencia entre 6 y 4 es 2 (*p*). Las raíces de la ecuación serán r_1 = -6 y r_2 = 4.



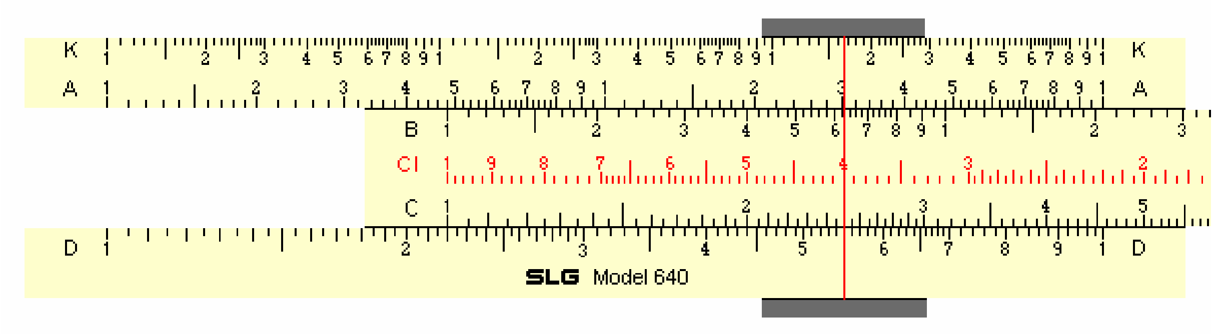
Ejemplo 7: $x^2 + x - 6 = 0$.

Situe C10 sobre D6. Mueva el cursor hasta CI2 – D3 (o hasta CI3 – D2) ya que la diferencia entre 3 y 2 es 1 (*p*). Las raíces de la ecuación serán r_1 = -3 y r_2 = 2.



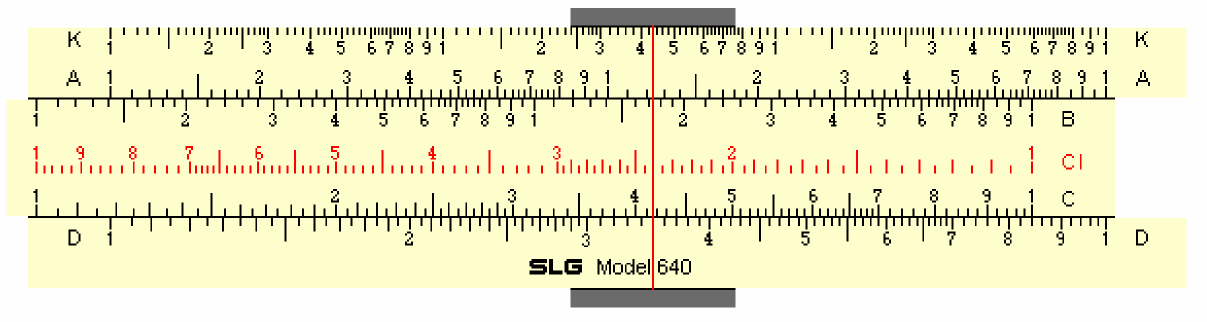
Ejemplo 8: $x^2 - 1{,}5x - 22 = 0$.

Situe C1 sobre D22. Mueva el cursor hasta CI4 – D55 (o hasta CI55 – D4) ya que la diferencia entre 5,5 y 4 es 1,5 (p). Las dos raíces de la ecuación serán r_1 = 5,5 y r_2 = -4.



Ejemplo 9: $x^2 - 1{,}1x - 8{,}4 = 0$.

Situe C10 sobre D84. Mueva el cursor hasta CI24 – D35 (o hasta CI35 – D24) ya que la diferencia entre 3,5 y 2,4 es 1,1 (p). Las raíces de la ecuación serán r_1 = 3,5 y r_2 = -2,4.



Ejercicios.

1-	$x^2 + 5{,}5x + 7 = 0$	$r_1 = -2$	$r_2 = -3{,}5$
2-	$x^2 + 3{,}7x + 3{,}3 = 0$	$r_1 = -1{,}5$	$r_2 = -2{,}2$
3-	$x^2 + 7{,}5x + 14 = 0$	$r_1 = -4$	$r_2 = -3{,}5$
4-	$x^2 - 13x + 42 = 0$	$r_1 = 6$	$r_2 = 7$
5-	$x^2 - 7{,}7x + 14{,}4 = 0$	$r_1 = 4{,}5$	$r_2 = 3{,}2$
6-	$x^2 - 9x + 14 = 0$	$r_1 = 7$	$r_2 = 2$
7-	$x^2 + 2{,}5x - 26 = 0$	$r_1 = -6{,}5$	$r_2 = 4$
8-	$x^2 + 0{,}5x - 7{,}5 = 0$	$r_1 = -3$	$r_2 = 2{,}5$
9-	$x^2 - 1{,}9x - 11 = 0$	$r_1 = -2{,}5$	$r_2 = 4{,}4$
10-	$x^2 - 3x - 12{,}6 = 0$	$r_1 = -3$	$r_2 = 4{,}2$
11-	$x^2 - 10x + 25 = 0$	$r_1 = 5$	$r_2 = 5$
12-	$x^2 + 8x + 16 = 0$	$r_1 = -4$	$r_2 = -4$
13-	$x^2 - 2x + 10 = 0$	$r_1 = 1 - 3i$	$r_2 = 1 + 3i$
14-	$x^2 + 4x + 5 = 0$	$r_1 = -2 - i$	$r_2 = -2 + i$

Bibliografía.

- Manuales de uso de reglas de cálculo Faber-Castell (modelos 2/83N, 2/82 y 67/21) y Aristo (modelos 0986, 0969 y 829).
- “Ecuaciones de segundo y tercer grado”, de Diodoro Velásquez Gómez; México, 1962. (www.reglasdecalculo.com)
- http://www.sphere.bc.ca/test/sruniverse.html
- http://www.hpmuseum.org/sliderul.htm
- http://www.sliderule.ca/
- http://en.wikipedia.org/wiki/Slide_rule
- Gráficos derivados de la regla de cálculo “Windows Slide Rule Model 640”, de SLG Data Systems and Analysis, 31950 Pembroke Court, Delmar MD 21875. Como la licencia es “Shareware” no se utilizará más en futuras publicaciones.

Licencia.

Autor.

Fernando Tejón.
Editerio Krayono, Ponferrada - España.
krayono@yahoo.es