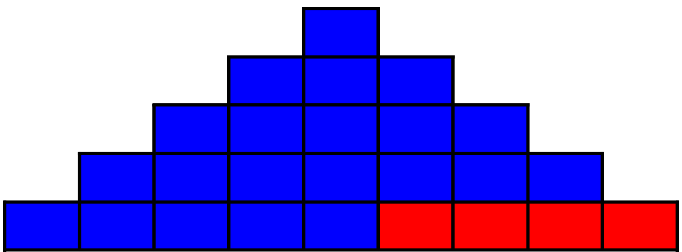
Cálculo de raíces cuadradas contando ladrillos de una pirámide maya



$$\sqrt{21} \approx 4+\frac{5}{9} = \frac{41}{9} = 4.55\ldots \quad \epsilon \leqslant 0.6\,\%$$

Editerio Krayono
Ponferrada – España
2 0 0 8

1. Raíz cuadrada de un número contando ladrillos

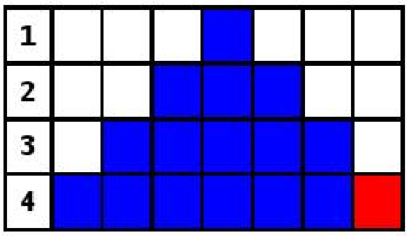
1.1. Método geométrico: contar ladrillos

Saúl Martínez Arroyo (véase el apéndice) propone un interesante método para el cálculo de raíces cuadradas de números positivos basado en dos sucesiones. La primera sucesión es la de los números impares, y la segunda la de los cuadrados de los números naturales. Estas dos sucesiones están relacionadas directamente con la pirámide maya de la figura siguiente:

Nivel	**Pirámide maya**	**Ladrillos en cada nivel**	**Ladrillos acumulados**
1		**1**	**1**
2		**3**	**4**
3		**5**	**9**
4		**7**	**16**
n	**...**	**2*n - 1**	**n^2**

El número de ladrillos existentes en cada nivel, comenzando por el superior, viene determinado por los términos correspondientes de la sucesión de los números impares, mientras que los términos de la sucesión de los números cuadrados determinan el número de ladrillos de un nivel más los de los anteriores niveles. Por ejemplo, en el nivel 4 habrá $2 * 4 - 1 = 7$ ladrillos, y en total se han empleado $4^2 = 16$ ladrillos para construir una pirámide de cuatro niveles; si la pirámide tiene 25 niveles entonces en su base, que es el nivel 25, habrá $25 * 2 - 1 = 49$ ladrillos y para construir toda la pirámide se necesitan $25^2 = 625$ ladrillos.

Supongamos que se quiere calcular la raíz cuadrada de 15. Como $3^2 = 9$ y $4^2 = 16$ se deduce inmediatamente que la raíz cuadrada de 15 es un número comprendido entre 3 y 4. Tomamos 3 como raíz aproximada de 15. Para mejorar el resultado se le suma a 3 una fracción de corrección, cuyo numerador es la diferencia entre 15 y el cuadrado de 3 ($15 - 3^2 = 6$) que es el número de ladrillos que debemos tomar del nivel 4, y el denominador será el número de ladrillos del nivel 4, es decir, 7. El resultado es:



$$\sqrt{15} \approx 3 + \frac{6}{7} = \frac{27}{7} = 3.857\ldots$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada de un número vendrá dada por la suma de un número entero y una fracción. El número entero es el nivel máximo de la pirámide con un total de ladrillos igual o inferior al número cuya raíz cuadrada se quiere obtener. El denominador de la fracción es el número de ladrillos del siguiente nivel, y el numerador es el número de ladrillos de este siguiente nivel que sumados al total de ladrillos de los anteriores niveles dan el número cuya raíz cuadrada se quiere calcular.

Lógicamente el resultado es un valor aproximado ya que en ningún caso un número irracional puede obtenerse como cociente de números enteros, pero el valor calculado, que en el anterior ejemplo tiene un error del 0.4% por defecto, puede ser suficiente para determinados cálculos.

Con una tabla de valores de n, 2*n-1 y n^2, que sólo se necesita hacer una vez, se pueden calcular raíces cuadradas aproximadas sin dificultad. No es descabellado pensar que esa metodología pudiese ser usada en la antigüedad.

1.2. Sistematización

1. Sea N el número cuya raíz cuadrada se quiere calcular.
2. Sea n el mayor número posible cuyo cuadrado sea menor que N (si el cuadrado de n es N entonces n es la raíz cuadrada de N y no hay más calculos que hacer).
3. Entonces, basándonos en el método geométrico anterior, se puede demostrar que la raíz cuadrada aproximada de N es:

$$\sqrt{N} \approx n + \frac{N-n^2}{2n+1} = \frac{n \cdot (n+1)+N}{2n+1}$$

Ejemplo 1: Cálculo de la raíz cuadrada de 15.

Como $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, entonces n = 3, N = 15

$$\sqrt{15} \approx \frac{3 \cdot (3+1)+15}{2*3+1} = \frac{27}{7} \approx 3.857...$$

El error es inferior al 0.4%.

Ejemplo 2: Cálculo de la raíz cuadrada de 127.

Como $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, entonces n = 11, N = 127

$$\sqrt{127} \approx \frac{11 \cdot (11+1)+127}{2*11+1} = \frac{259}{23} \approx 11.26...$$

El error es inferior al 0.8%.

Ejemplo 3: Cálculo de la raíz cuadrada de 301.

Como $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, entonces n = 17, N = 301

$$\sqrt{301} \approx \frac{17 \cdot (17+1)+301}{2*17+1} = \frac{607}{35} \approx 17.34...$$

El error es inferior al 0.04%.

1.3. Reducción del error

El error se puede reducir tanto como se desee si se cuenta con tablas suficientemente extensas. El método consiste en calcular la raíz de ($n * 10^{2k}$) y el resultado se divide por 10^k siendo k un número natural. A mayor valor de k menor error en el cálculo.

$$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N*10^{2k}}}{10^k}$$

Como ejemplo se calculará la raíz cuadrada de 3, con errores cada vez menores:

Ejemplo 4: Cálculo de la raíz cuadrada de 3, directamente (k=0).

Como $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, entonces n = 1, N = 3

$$\sqrt{3}\approx\frac{1\cdot(1+1)+3}{2*1+1}=\frac{5}{3}\approx 1.666...$$

El error es inferior al 4%, demasiado grande.

Ejemplo 5: Cálculo de la raíz cuadrada de 3, con k=1.

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3*10^2}}{10^1}=\frac{\sqrt{300}}{10}$$

En este caso se calcula la raíz cuadrada de 300 y se divide el resultado obtenido por 10. Como $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, entonces n = 17, N = 300

$$\sqrt{300}\approx\frac{17\cdot(17+1)+300}{2*17+1}=\frac{606}{35}\approx 17.314...$$

La raíz cuadrada de 3 será 17.314... / 10 = 1.7314...

El error es inferior al 0.04%, suficientemente pequeño.

Ejemplo 6: Cálculo de la raíz cuadrada de 3, con k=2.

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3*10^4}}{10^2}=\frac{\sqrt{30000}}{100}$$

En este caso se calcula la raíz cuadrada de 30000 y se divide el resultado obtenido por 100. Como $173^2 = 29929$, $174^2 = 30276$, entonces n = 173, N = 30000

$$\sqrt{30000}\approx\frac{173\cdot(173+1)+30000}{2*173+1}=\frac{60102}{347}\approx 173.204...$$

La raíz cuadrada de 3 será 173.204... / 100 = 1.73204...

El error es inferior al 0.0003%.

Ejemplo 7: Cálculo de la raíz cuadrada de $8C_{vig}$ (172_{dec}), con k=0.

No consta que este método fuese usado por los mayas, pero supongamos por un instante que sí lo conocían. ¿Cómo calcular la raíz cuadrada de un número en el sistema vigesimal? La metodología es la ya vista, lo único que cambia es el uso de un sistema de numeración diferente al comunmente usado.

Como $D^2 = 89$, $E^2 = 9G$, entonces n = D, N = 8C

Se usa la misma fórmula que con números decimales:

$$\sqrt{8C} \approx \frac{D \cdot (D+1)+8C}{2*D+1} = \frac{D*E+8C}{17} = \frac{92+8C}{17} = \frac{HE}{17} = D.248H...$$

El valor exacto es: $\sqrt{8C} = D.25J06B...$

El error es inferior al 0.03%.

Ejemplo 8: Cálculo de la raíz cuadrada de $8C_{vig}$ (172_{dec}), con k=1.

Si se quiere reducir aún más el error se puede tomar k=1:

$$\sqrt{8C} = \frac{(\sqrt{(8C*10^2)})}{(10^1)} = \frac{(\sqrt{8C00})}{10}$$

En este caso se calcula la raíz cuadrada de 8C00 y se divide el resultado obtenido por 10. Como $D2^2 = 8BC4$, $D3^2 = 8CI9$, entonces n = D2, N = 8C00

$$\sqrt{8C00} \approx \frac{(D2(D2+1)+8C00)}{(2*D2+1)} = \frac{H456}{165} \approx D2.5IH...$$

La raíz cuadrada de 8C será D2.5IH... / 10 = D.25IH...

El error es inferior al 0.0002%, suficientemente pequeño.

Para saber más sobre cálculos en el sistema vigesimal:

http://es.geocities.com/abacosoroban/nepohualtzintzin.pdf

2. Raíz cúbica aproximada de un número

Para calcular raíces cúbicas aproximadas se opera de modo similar que en el cálculo de raíces cuadradas, aunque la complejidad es lógicamente mayor.

2.1. Algoritmo

1. Sea N el número cuya raíz cúbica se quiere calcular.
2. Sea n el mayor número posible cuyo cubo sea menor que N (si el cubo de n es N entonces n es la raíz cúbica de N y no hay más cálculos que hacer).
3. Se puede demostrar que la raíz cúbica aproximada de N es:

$$\sqrt[3]{N} \approx n + \frac{N-n^3}{3n^2+3n+1}$$

Ejemplo 9: Cálculo de la raíz cúbica de 32.

Como $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, entonces n = 3, N = 32

$$\sqrt[3]{32} \approx 3 + \frac{32-3^3}{3\cdot3^2+3\cdot3+1} = 3 + \frac{5}{37} = \frac{116}{37} \approx 3.135\ldots$$

El error es inferior al 1,2%.

Ejemplo 10: Cálculo de la raíz cúbica de 71.

Como $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, entonces n = 4, N = 71

$$\sqrt[3]{71} \approx 4 + \frac{71-4^3}{3\cdot4^2+3\cdot4+1} = 4 + \frac{7}{61} = \frac{251}{61} = 4.114\ldots$$

El error es inferior al 0.63%.

2.2. Reducción del error

El error se puede reducir tanto como se desee si se cuenta con tablas de cubos suficientemente extensas. El método a seguir consiste en calcular la raíz cúbica de $(n * 10^{3k})$ y el resultado se divide por 10^k siendo k un número natural. A mayor valor de k menor error en el cálculo.

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N*10^{3k}}}{10^k}$$

Como ejemplo se calculará la raíz cúbica de 12, con errores cada vez menores:

Ejemplo 11: Cálculo de la raíz cúbica de 12, directamente (k=0).

Como $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, entonces n = 2, N = 12

$$\sqrt[3]{12} \approx 2 + \frac{12-2^3}{3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1} = 2 + \frac{4}{19} = \frac{42}{19} = 2.21...$$

El error es inferior al 3,5%, demasiado grande.

Ejemplo 12: Cálculo de la raíz cúbica de 12, con k=1.

$$\sqrt[3]{12} = \frac{\sqrt[3]{12 * 10^3}}{10^1} = \frac{\sqrt[3]{12000}}{10}$$

En este caso se calcula la raíz cúbica de 12000 y se divide el resultado obtenido por 10. Como $22^3 = 10648$, $23^3 = 312167$, entonces n = 22, N = 12000

$$\sqrt[3]{12000} \approx 22 + \frac{12000-22^3}{3 \cdot 22^2 + 3 \cdot 22 + 1} = 22 + \frac{1352}{1519} = \frac{34770}{1519} \approx 22.89...$$

La raíz cúbica de 12 será 22.89... / 10 = 2.289...

El error es inferior al 0.02%.

Ejemplo 13: Cálculo de la raíz cúbica de 12, con k=2.

$$\sqrt[3]{12} = \frac{\sqrt[3]{12 * 10^6}}{10^2} = \frac{\sqrt[3]{12000000}}{100}$$

En este caso se calcula la raíz cúbica de 12000000 y se divide el resultado obtenido por 100. Como $228^3 = 11852352$, $229^3 = 12008989$, entonces n = 228, N = 12000000

$$\sqrt[3]{12000000} \approx 228 + \frac{12000000-228^3}{3 \cdot 228^2 + 3 \cdot 228 + 1} = 228 + \frac{147648}{156637} = \frac{35860884}{156637} \approx 228.94...$$

La raíz cúbica de 12 será 228.94.. / 100 = 2.2894...

El error es inferior al 0.0002%.

3. Licencia

Autor de este documento (páginas de 1 a 7): Fernando Tejón, krayono@yahoo.es
Editerio Krayono, Ponferrada – España. 12-2007, 04-2008, 10-2008.
Documento creado con OpenOffice.org en GNU/Linux Ubuntu.

4. Apéndice

Este apéndice es una reprodución textual del documento **¿Cómo calculaban la raíz cuadrada los mayas?,** de **Saúl Martínez Arroyo,** principal fuente de inspiración del estudio mostrado en las páginas 1 a 7.

¿CÓMO CALCULABAN LA RAÍZ CUADRADA LOS MAYAS?*

por: xichari
Saúl Martínez Arroyo

julio de 2004
Toluca, México

ÍNDICE

1.INICIO

1.1.INTRODUCCION

Desde hace tiempo los estudiosos de las matemáticas mayas han mencionado que ellos realizaban cálculos con las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división), aunque sólo mencionan cómo hacían la suma y resta.

Recientemente se ha descrito la forma en que realizaban la multiplicación[1] usando una matriz cuadriculada (trabajo muy interesante de: Verónica Josefina Soria Anguiano), y con la cual se puede deducir la división (aunque no encuentro aún alguna referencia de cómo lo hacían).

Sin embargo, se menciona que también sabían calcular la raíz cuadrada y la referencia a éste procedimiento es un misterio para mí (más aún que la división).

Prácticamente no hay referencia alguna al respecto, pero dados los logros arquitectónicos, y el grado de civilización alcanzados por los mayas, es de suponerse que sabían hacer algunos cálculos. Aunque los algoritmos de cómo lo hacían no se conocen.

Los trabajos de Alejandro Jaen Rojas, han servido para aclarar un poco más acerca de los conocimientos matemáticos mayas y su representación en el telar con figuras geométricas basados en una matriz cuadriculada[2]. Basado en éstos trabajos de Jaen Rojas, me atrevo a hacer las siguientes elucubraciones acerca de cómo calculaban los mayas la raíz cuadrada.

2.RELACION CUADRADO-TRIANGULO

2.1.EQUIVALENCIA DEL CUADRADO Y DEL TRIANGULO

Si tomamos un cuadrado y lo dividimos en dos partes iguales con una diagonal, lo que tenemos son dos triángulos rectángulos iguales o equivalentes, como se puede apreciar en la figura 1:

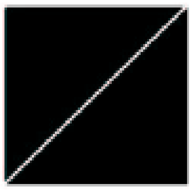


figura 1

Esto nos lleva a la conclusión de que podemos representar a un cuadrado como la unión de dos triángulos rectángulos con catetos iguales (con ángulos de 45º con respecto a la hipotenusa).

Si hacemos una rotación de los mismos, y los unimos por medio de uno de los catetos, podemos representarlos como un triángulo de 45º aún mayor teniendo como base dos catetos unidos (fig 2).

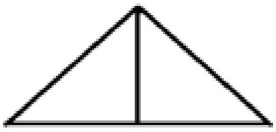


figura 2

En este caso podemos calcular el área del triángulo con la fórmula:

$$Area = \frac{base \times altura}{2}$$

Que, dadas las condiciones bajo las que lo generamos, también es equivalente a:

$$Area = \frac{base}{2} \times altura$$

Y como:

$$\frac{base}{2} = altura$$

Tenemos que, en el caso del triángulo rectángulo de 45º:

$$Area = altura^2 = \left(\frac{base}{2}\right)^2$$

Todo lo anterior se puede aplicar también a la matriz cuadriculada, tomemos como ejemplo una cuadrícula de 3x3 (fig 3).

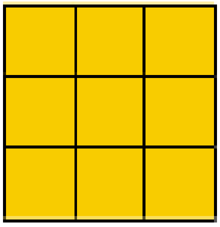


figura 3

Calculamos su área en base al número de cuadros por lado: 3x3 = 9. Y podemos también convertirlo en una matriz piramidal equivalente al triángulo rectángulo de 45º (fig 4).

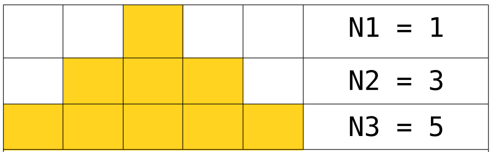


figura 4

En este caso, el cálculo del área está en base a los siguientes aspectos:

-El nivel N o escalón (en el ejemplo es el nivel N3 o tercer escalón de la pirámide.La suma de todos los cuadrados de todos los niveles N o escalones.

-El cálculo de cuadrados por nivel (C), es igual a: $C = 2N - 1$, es decir:

En el nivel 3 el número de cuadrados es $(2 \times 3) - 1 = 5$ cuadrados en dicho escalón.
En el primer nivel el número de cuadros es: $(2 \times 1) - 1 = 1$.
En el segundo escalón el número de cuadros es:$(2 \times 2)-1 = 3$.
Esto se puede apreciar en la figura 4.(ver arriba)
Como se puede apreciar, la suma de los cuadros de acuerdo al nivel nos da el cuadrado de dicho nivel:

-Para el nivel 1 el total de cuadros es: 1.

-Para el nivel 2 el total de cuadros es: 1 + 3 = 4 (nivel 1 + nivel 2).

-Para el nivel 3 el total de cuadros es: 1 + 3 + 5 = 9 (nivel 1 + nivel 2 + nivel 3).

-Los valores coinciden con el cuadrado del nivel o escalón o correspondiente.

Cada nivel o escalón se puede tomar como la representación de los números enteros y los cuadros como las fracciones que los componen calculados con la fórmula referida (pág. 8), con una secuencia de números impares (1,3,5,7. . . etc)
Parece sorprendentemente sencillo la forma en que una matriz piramidal puede ser la base para el cálculo de la raíz cuadrada.

3.SEGUNDA PARTE

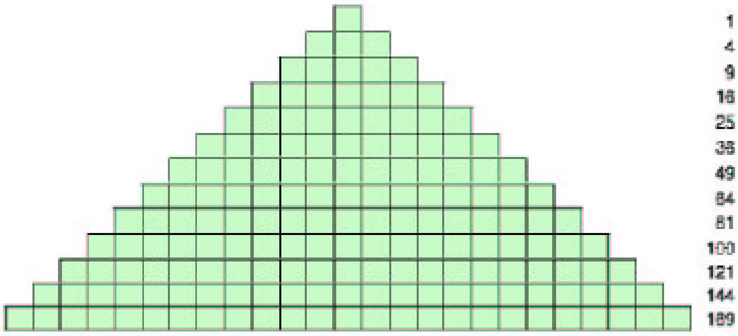
3.1.CALCULO DE LA RAÍZ CUADRADA.

Método maya(?).

Pues bién... la matriz piramidal con escalones de cuadros en número impar (1,3,5,7...), nos puede servir para calcular la raíz cuadrada de forma sorprendentemente aproximada.

Para esto, tomamos el número del que queremos saber su raíz por ejemplo el 16, La matriz piramidal nos servir como una tabla de cuadrados. Si contamos desde el cuadro número 1 (el superior del pimer nivel), hasta el cuadro número 16, veremos que coincide con el nivel 4 completo.

Esto significa que la raíz cuadrada de 16 es: nivel 1 + nivel 2 + nivel 3 + nivel 4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 (total de cuadros hasta el escalón 4 completo). Observa la figura 5.



Pero... ¿qué pasa con un número que no tiene raíz cuadrada exacta?. ...Bueno... pues en este caso pongamos como ejemplo el número 27 (si quieres hacerlo con otro número, hazlo). Notaremos que el nivel 5 completo tenemos un total de 25 cuadros (obvio), por lo que el cálculo de la raíz cuadrada de 27 es como sigue:

- Número de niveles completos: 5 = 25 cuadros.
- Nivel incompleto: 6 = 2 cuadros.
- Total de cuadros del nivel 6 = 11 (calculado por la fórmula: (2 x 6)-1, referida en la pág. 8).

Por lo que la raíz cuadrada de 27 es igual a: nivel 1 + nivel 2 + nivel 3 + nivel 4 + nivel 5 + 2/11 del nivel 6.
Queda expresado de la siguiente forma:

$$\sqrt{27} = 5\frac{2}{11}$$

Si sacamos la fracción decimal y la comparamos con la que nos devuelve la calculadora, nos sorprenderá la aproximación del cálculo.

4.EJERCICIOS RESUELTOS

4.1. ¡¡ Manos a la obra !!

1. calcular la raíz cuadrada de 90.
Tenemos completo hasta el noveno nivel = 81 cuadros.
Nivel incompleto: 10 = 9 cuadros.
Total de cuadros del nivel 10: 19 (fórmula: C = 2N − 1).
SOLUCION:

$$\sqrt{90}=9\frac{9}{19}$$

2. Calcular la raíz cuadrada de 43.
Tenemos completo hasta el sexto nivel = 36 cuadros.
Nivel incompleto: 7 = 7 cuadros.
Total de cuadros del nivel 7: 13 (fórmula: C = 2N − 1).
SOLUCION:

$$\sqrt{43}=7\frac{7}{13}$$

¿Quieres practicar con otros números? ¡¡sorpréndete!!.

5.ACLARACIONES

5.1.Importante.

No tengo evidencia de que los mayas hayan calculado de esta forma la raíz cuadrada (ni arqueológica, histórica, antropológica, esotérica, brujística...etc), pero considero que tuvieron tiempo suficiente manejando las matrices cuadriculadas como para darse cuenta de estas ‘coincidencias’.

De todas maneras, resulta un excelente ejercicio de cálculo simplificado de la raíz cuadrada (aún sin ser mayas), con buena aproximación.

Por lo que: ¡¡ A practicar y a divertirse !!.

Comentarios, adulaciones, aplausos, premios, etc., enviarlos a:
xichari@yahoo.com.mx

Críticas, reclamaciones e insultos, enviarlos a:
xichari@yahoo.com.mx
(Puedes ignorar los dos renglones anteriores).

6.BIBLIOGRAFÍA

6.1.REFERENCIAS

[1] Verónica Josefina Soria Anguiano.
“Sumando y multiplicando como los mayas”. Publicado en internet, http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/indisecc.html, Marzo 1997. Revista “eureka” de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro.
[2] Alejandro Jaen Rojas.
“Modelos matemáticos del cosmos de los indígenas mayas precolombinos”. Publicado en internet, http://www.cientec.or.cr/matematica/mayas.html, mes no referido año no referido. Página de internet sin referencias en cuanto a fecha de publicación

del artículo, con créditos a: Universidad Estatal a Distancia.

7.FIN

7.1.Copyleft

Sugerencias y comentarios: xichari@yahoo.com.mx
Documento realizado en formato LATEX
Transportado a PDF
NOTA: otro símbolo usado para el copyleft es: ⊗copyleft